الفصل الأول

تعريف : الضرب الديكارتي

إذا كان لدينا المجموعة الغير خالية A وكذلك المجموعة B فإن حاصل الضرب A×B يسمى الضرب الديكارتي وهو مكون من أزواج مرتبة على الصورة (a , b) بحيث أن $a \in A$ **و** $b \in B$ **أي أن :** $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$

مثال : إذا كان لدينا المجموعة $A = \{1,2,3\}$ **وكذلك المجموعة** $B = \{0,4,6\}$ **فأوجد حاصل الضرب الديكارتي**

الحل :

$$A \times B = \{(1,0),(1,4),(1,6),(2,0),(2,4),(2,6),(3,O),(3,4),(3,6)\}$$

تمرين : أوجد حاصل الضرب الديكارتي $X \times Y$ **إذا كان :** $X = \{0,1,2\}, Y = \{5,7\}$

ملاحظة مهمة : $A \times B \neq B \times A$

وضح ذلك في التمرين السابق .

الدوال

تعريف : الدالة

إذا كانت A, B **مجموعتين غير خاليتين فإن** f **تسمى دالة من** A **إلى** B **إذا كانت** f **مجموعة جزئية من** $A \times B$ **أي أن :** $f \subset A \times B$ **وكذلك يكون كل عنصر في المجموعة** A **مرتبطا بعنصر واحد فقط من المجموعة** B **.**

- **إذا كانت الدالة** f **دالة من** A **إلى** B **وكان الزوج المرتب** (a,b) **ينتمي للدالة** f **أي أن :** $(a,b) \in f$ **فإن b هي قيمة الدالة** f **عند** a

ونكتب $b = f(a)$ **وعندئذ تسمى b صورة** a

مثال : إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ **و** $B = \{4,5,6\}$ **فإن :** $f_1 = \{(1,4),(2,5),(3,6)\}$ **دالة من** A **إلى** B **وذلك : لأن** $f_1 \subset A \times B$

تمرين : حدد ما إذا كانت العلاقات التالية تمثل دوال مستخدما المجموعتين السابقتين في المثال السابق :

١ - $f_2=\{(1,6),(2,4),(3,5)\}$

٢ - $f_3=\{(1,4),(2,6)\}$

٣ - $f_4=\{(1,4),(2,5),(2,6)\}$

في المثال السابق تسمى المجموعة A التي بدأت منها العلاقة بمجال الدالة وتسمى المجموعة B التي انتهت إليها العلاقة بالمجال المقابل .

أما مجموعة الصور فقط فتسمى مدى الدالة

مثال :إذا كان : $A=\{5,6\}$ **و** $B=\{1,3,7\}$ **ولدينا دالة** f **بحيث :** $f=\{(5,1),(6,7)\}$
فحدد المجال والمجال المقابل والمدى لهذه الدالة :

الحل : $D_f=A$ **المجال**

المجال المقابل = B

مجموعة الصور = المدى $R_f=\{1,7\}$

- **يمكننا أن نعبر عن الدالة بمعرفة مجالها المقابل ومجالها وصور عناصر المجال :**
$f:A\to B, y=f(X)$

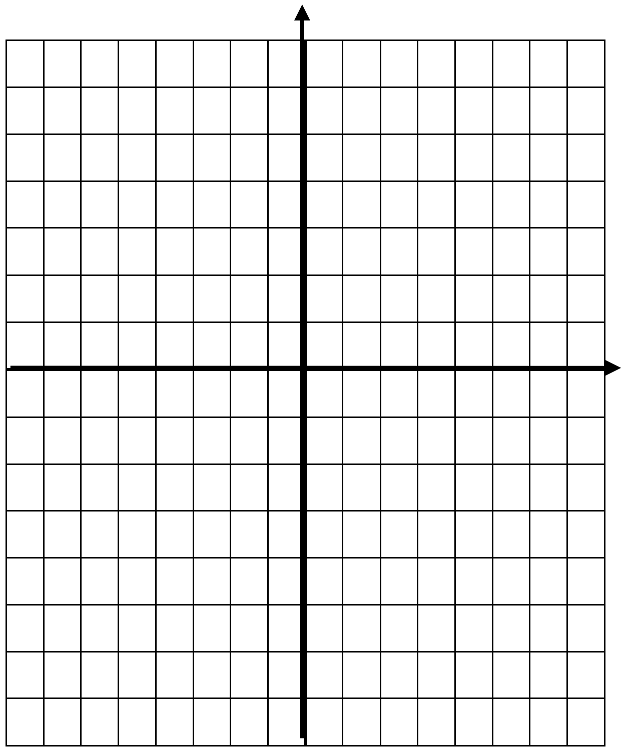
مثال : إذا كانت : $y=f(x)=x-2$ **فأوجد** $f(0)$ **و** $f(-1)$ **و** $f(2)$

ملاحظة : تتساوى الدالتان f ، g **إذا كان لهما نفس المجال وكذلك كل عنصر** x **في المجال يكون :** $f(x)=g(x)$

مثال : إذا كانت : $f_1(x)=x$ **حيث** $x\in R$ **وكانت :** $f_2(x)=2x$ **فإن :**
$f_1(0)=f_2(0)$ **بينما** $f_1(1)\neq f_2(1)$
إذا يتضح لنا أن الدالتين غير متساويتان

التمثيل البياني للدوال :

من أنسب طرائق تمثيل الدوال هو أسلوب التمثيل البياني وللحصول على هذا التمثيل نبدأ برسم خطين مستقيمين متعامدين ونضع تدريجا مناسبا على كل منهما كما هو موضح



يسمى السطح الناتج من تحديد النقاط وتقاطعها بالمستوى البياني ويقسم إلى أربعة أرباع كما هو موضح في الشكل

لاحظ : أن النقطة a هي عبارة عن زوج مرتب مكون من إحداثيين $a=(2,1)$ وكذلك $b=(4,3)$ ونلاحظ أن $2\in x$ وكذلك $1\in Y$ في النقطة a ، أما النقطة b فإن $4\in x$ و $3\in Y$

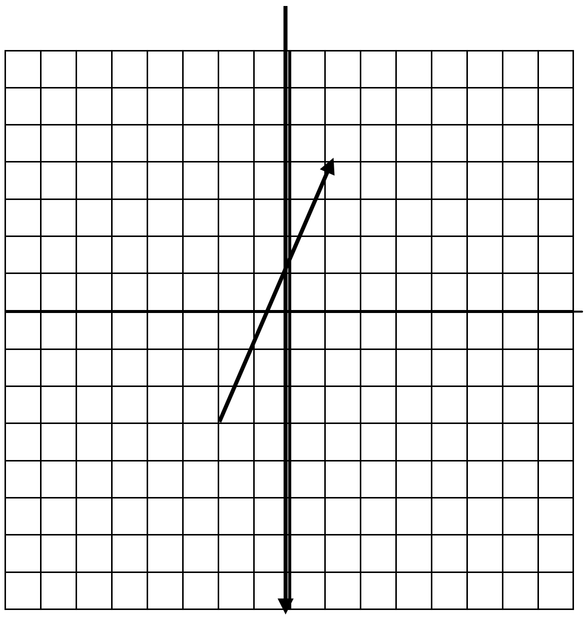
مثال : ارسم منحنى الدالة $f(x) = 2x + 1$

الحل : لكي نرسم هذه الدالة نكون أولا الجدول التالي لتسهيل عملية التمثيل

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	-3	-1	1	3	5

ومن الواضح أن رسم الدالة يتحقق بعدد لانهائي من الأزواج المرتبة ولكن يكفي لرسم هذه الدالة نقطتان على الأقل :

هذا الجدول يحقق الرسم وبعدة أزواج مرتبة هي : $(-2,-3), (-1,-1), (0,1), (1,3), (2,5)$



تمرين : ارسم منحنى الدالة $f(x) = 3x - 1$