

١/الدوال الأسية:

هي ألداله التي تحتوي على أس

مثال:

$$f(x) = 2^x$$

٢/ألداله اللوغاريتمية:

-الدوال اللوغاريتمية معكوسة ألداله الاسيه مجالها R^+ ومجالها المقابل R

اللوغاريتم $\rightarrow \log_a y$
الاساس

-الدوال اللوغاريتمية والدوال الاعتيادية :

العددان ١٠, e, وهي من أكثر الأعداد استعمالا (حيث أن الـ e عدد غير نسبي)

*اللوغاريتمات التي أساسها e لوغاريتمات طبيعيه يرمز لها بالرمز $\ln x$

*اللوغاريتمات التي أساسها ١٠ تسمى اعتيادية يرمز لهل بالرمز $\log x$

#(ذا كان الاساس ١٠ يكتب اللوغاريتم بدون أساس)

قوانين اللوغاريتمات: (الأساس مشترك)

المعادلة	الحالة
$\log_b x y = \log_b x + \log_b y$	١/ الضرب يتحول إلى جمع
$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	٢/القسمة تتحول إلى طرح
$\log_b x^n = n \log_b x$	٣/ إذا كان مرفوع للأس فنضرب الأس في اللوغاريتم
$\log_b 1 = 0$	٤/ لوغاريتم ١ = صفر بغض النظر عن الاساس
$\log_b b = 1$	٥/إذا كان اللوغاريتم والأساس متساويان $\therefore 1 =$

٣/ الدوال المثلثية:

Sin	جا
cos	جتا

قيمة الدالة	الدالة	
$\frac{\sin}{\cos} = \frac{\text{جا}}{\text{جتا}}$	tan (ظا)	→
$\frac{1}{\cos} = \frac{1}{\text{جتا}}$	sec (قا)	→
$\frac{1}{\sin} = \frac{1}{\text{جا}}$	csc (قتا)	→
$\frac{\cos}{\sin} = \frac{\text{جتا}}{\text{جا}}$	cot (ظتا)	→ *مقلوب ال(ظا)*
# $\sin^2 + \cos^2 = 1$ → $1 = \text{جتا}^2 + \text{جا}^2$ #		

٤/ الدوال النسبية أو الكسرية:

- هي الأعداد التي على شكل كسر ويشترط أن لا يكون المقام صفر أو يجعل المقام صفر
- المجال لهذه الدوال هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الأعداد التي تجعل المقام يساوي الصفر

مثال:

$$f(x) = \frac{x+7}{x+5} \Rightarrow \text{مجالها كل القيم ماعدا } -5 \text{ (R-5)}$$

$$f(x) = \frac{x-7}{x^2+3} \Rightarrow \text{مجالها R (كل المجموعة)}$$

٥/ الدوال الصريحة والدوال الضمنية :

- الدوال الصريحة:

هي أداله التي يمكن كتابتها في الصورة $y=f(x)$

*أي يكون y في جهة x وفي جهة أخرى مثال

$$y/x = 2x+3 \quad y/x = 2$$

- الداله الضمنية:

هي التي يمكن في الصورة $f(y,x)=k$ حيث K قيمه ثابتة
(أي أن تكون y,x لا يمكن فصلهم)

$$1/x^2 + y^2 = 20 \quad 2/(x-3)^2 + (y+5)^2 = 49$$

٦/ الدوال الزوجية والدوال الفردية:

- الدوال الزوجية :

نعتبر الدالة زوجية إذا كانت الدالة الـ (+) تساوي الدالة الـ (-) أي $f(-x) = f(x)$

مثال ١: هل الدالة $f(x) = x^2 + x$ زوجية؟

$$f(+x) = x^2 + x$$

$$= (x) (x) + x$$

$$= x^2 + x$$

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x)$$

$$= (-x) (-x) + (-x)$$

$$= -x^2 - x$$

∴ الدالة ليست زوجية لأن $f(-x) \neq f(+x)$

مثال ٢: هل $f(x) = x^2$ دالة زوجية؟

من النظرة الأولى نقول نعم زوجية لأن أي عدد نربعه يكون موجب $(-x) \times (-x) = +$

فستكون $f(-x) = f(+x)$

- الدالة الفردية:

نقول الدالة فردية إذا $f(-x) = -f(x)$

(أي أن $-x$ و ضرب الدالة في - متساويين)

مثال: هل الدالة $f(x) = x^3 + x$ فردية أو زوجية؟

$$-f(x) = -x^3 - x$$

$$= (x) (x) (x) - x$$

$$= x^3 - x$$

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)$$

$$= (-x)(-x)(-x) + (-x)$$

$$= -x^3 - x$$

∴ الدالة فردية لأن $f(-x) = -f(x)$

*تطبيقات اقتصادية:

١- دوال الطلب الخطية:

هناك علاقة عكسية بين كمية الطلب على سلعة معينة وسعرها بمعنى أنه كلما زاد سعر السلعة كلما

قل الطلب عليها. ونرمز لكمية الطلب على السلعة بالرمز Q_D بينما نرمز لسعر السلعة بالرمز P

مثال: إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة: $Q_D = 25 - 5P$

فأوجد: أ. الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما $P = 3$.

ب. سعر الوحدة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_D = 18$

ج. الكمية المطلوبة من هذه السلعة إذا كانت بدون مقابل. أي $P = 0$

د. أعلى سعر يمكن أن يدفعه أي شخص لهذه السلعة. (أي تكون السلعة نادرة فأعلى سعر ممكن تباع به)

الحل:

أ. عندما $P = 3$

$$Q_D = 25 - 5P$$

$$= 25 - 5 \times 3$$

$$= 25 - 15$$

$$= 10$$

ب. عندما $Q_D = 18$

$$Q_D = 25 - 5P$$

$$18 = 25 - 5 \times P$$

$$5P = 25 - 18 = 7$$

$$\therefore P = \frac{7}{5} = 1.4$$

ج. عندما $P = 0$

$$Q_D = 25 - 5P$$

$$= 25 - 5 \times 0$$

$$= 25$$

د. على سعر يحدث عندما $Q_D = 0$

$$Q_D = 25 - 5P$$

$$0 = 25 - 5 \times P$$

$$5P = 25$$

$$\therefore P = 5$$

٢- دالة العرض (الإنتاج) الخطية:

هناك علاقة طردية بين كمية الإنتاج من سلعة معينة وسعرها بمعنى أنه كلما زاد سعر السلعة كلما زادت كمية الإنتاج. ونرمز لكمية العرض (الإنتاج) من سلعة ما بالرمز Q_S بينما نرمز لسعر السلعة بالرمز P

مثال: إذا كانت $Q_S = 3P - 2$ فأوجد:

أ. Q_S إذا كانت $P = 5$

$$Q_S = 10$$

دعواتكم/ اختكم دوحة غناء

ب. P إذا كانت

ج. أقل سعر يمكن أن تباع به وحدة السلعة لتفي حاجة الإنتاج (أي لكي يمكن الإنتاج).

الحل:

$$\begin{aligned} \text{أ. عندما } P=5 \\ Q_s &= 3P - 2 \\ &= 3 \times 5 - 2 \\ &= 15 - 2 \\ &= 13 \\ \text{ب. عندما } Q_s &= 10 \\ Q_s &= 3P - 2 \\ 10 &= 3P - 2 \\ -3P &= -2 - 10 = -12 \\ \therefore P &= 4 \end{aligned}$$

ج. أقل سعر يمكن أن تباع به وحدة السلعة لتفي حاجة الإنتاج (أي لكي يمكن الإنتاج). أي عندما $Q_s = 0$

$$\begin{aligned} Q_s &= 3P - 2 \\ 0 &= 3P - 2 \\ -3P &= -2 - 0 = -2 \\ \therefore P &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

٣- التوازن في السوق بين الدلتى العرض والطلب الخطيتين:

يكون التوازن إذا كانت الكمية المعروضة = الكمية المطلوبة

مثال:

إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي $Q_D = 2 - P$.

وان دالة العرض لنفس السلعة هي $Q_S = P - 1$

أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن

$$\begin{aligned} \text{الحل: } Q_s &= Q_D \\ P - 1 &= 2 - P \\ P + P &= 2 + 1 \\ 2P &= 3 \\ \therefore P &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ثم نعوض في احد الدالتين

$$\therefore Q_s = \frac{3}{2} - 1 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

رسم الدوال:

الخطوات:

أ. نقوم بإنشاء جدول بقيم x وقيم y المناظرة لها للحصول على الأزواج المرتبة.

ب. نرسم المحاور الديكارتية ونقوم بتدريج كل منهما تدريجاً مناسباً .

ت. نقوم بتعيين هذه النقاط على المستوى الديكارتي ثم توصيل هذه النقاط بصورة ملساء للحصول على منحنى الدالة.

الصيغ القياسية لبعض الدوال:

١. دالة خط مستقيم

مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = x$

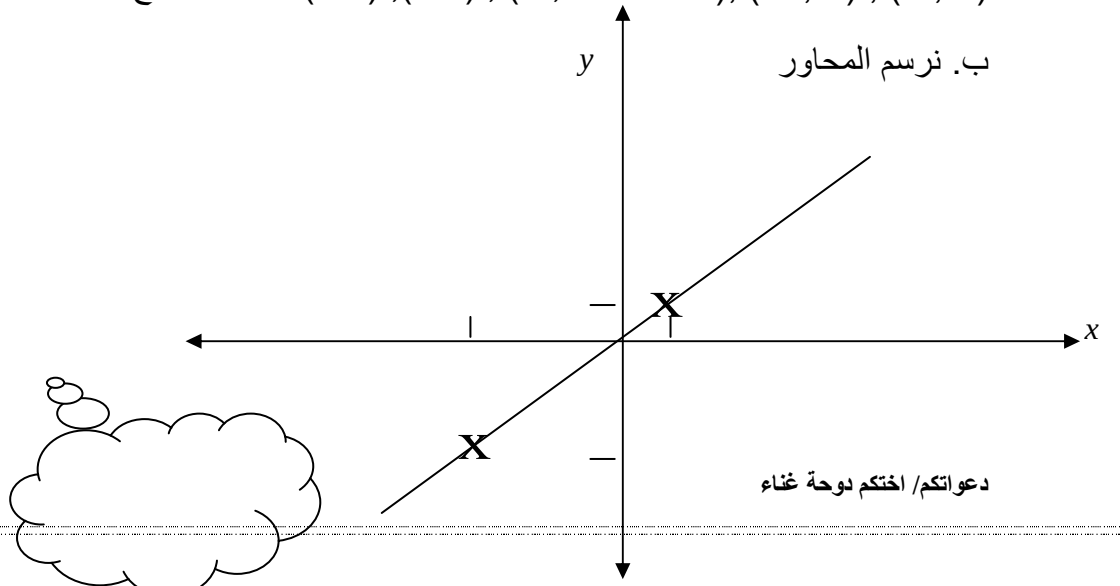
الحل: أ. الخطوة الأولى إنشاء جدول بقيم x و y :

← قيم x نحن من يفرضها دائما	x	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
← نعوض قيم x في معادلة y	$y = (x)$	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣

تعيين النقاط على شكل أزواج مرتبه يكون نقطه من x مع النقطه المقابله لها من y

.....الخ $(١,١), (٠,٠), (١,-,١), (٣-,٣-), (٢-,٢-), (-,)$

ب. نرسم المحاور



دعواتكم/ اختكم دوحة غناء

٢. الدالة التربيعية:

مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = x^2$

الحل:

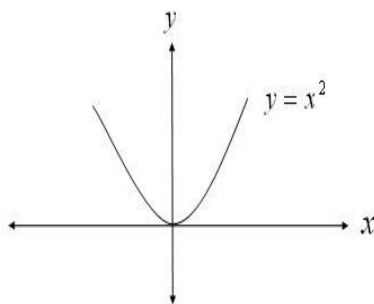
لمعرفة قيم y نعوض قيم x في معادلة $y = x^2$ وهي

$$\text{عند } -3 \quad f(-3)^2 = -3 \times -3 = 9 \quad \leftrightarrow$$

$$\text{عند } -2 \quad f(-2)^2 = -2 \times -2 = 4 \quad \leftrightarrow$$

$$\text{عند } 2 \quad f(2)^2 = 2 \times 2 = 4 \quad \leftrightarrow$$

وهكذا بقية العناصر



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

٣. الدالة التكعيبية:

مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = x^3$

الحل:

x	-2	-1	0	1	2
---	----	----	---	---	---

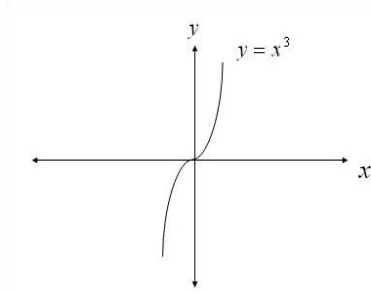
(((لمعرفة قيم y نعوض مباشرة قيم x التي

فرضناها في

معادلة y

[بتكعيب قيم x] نفس الطريقة السابقة ثم نحدد النقاط على المحاور

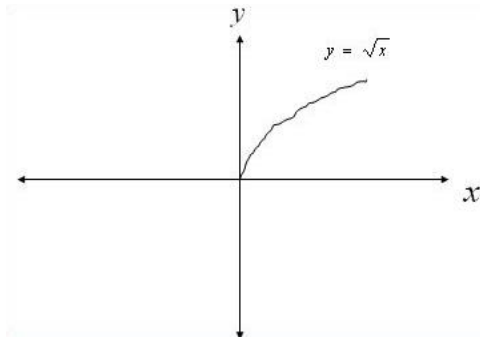
ونوصل النقاط)))



$y = x^3$	-٨	-١	٠	١	٨
-----------	----	----	---	---	---

٤. دالة الجذر التربيعي:

عندما نفرض قيم x في الدالة الجذرية لا نفرض قيم سالبة لأن الأعداد ألسالبه تحت الجذر تخرج أعداد غير حقيقيه



مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = \sqrt{x}$

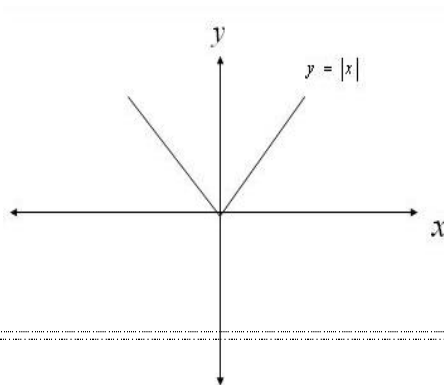
الحل:

x	٠	١	٢	٣	٤
$y = \sqrt{x}$	٠	١	١,٤	١,٧	٢

٥. دالة القيمة المطلقة:

مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = |x|$ (دائما إذا شطنا قيمة مطلقة أو دالة مطلقة المهم أنها مطلقة مباشرة نعرف أن أي عدد يخرج منها راح يكون موجب بأي شكل كان)

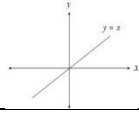
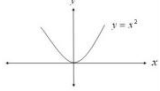
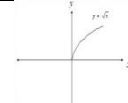
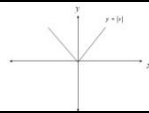
الحل:



x	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
$y = x $	٣	٢	١	٠	١	٢	٣

دعواتكم / اختكم دوحة غناء

*نظرة سريعة على الصيغ القياسية لدوال وأشكالها: (لا ننسى هذا الجدول)

اسم الدالة	معادلتها	شكلها
١. دالة خط مستقيم	$y = (x)$	
٢. الدالة التربيعية	$y = x^2$	
٣. الدالة التكعيبية	$y = x^3$	
٤. دالة الجذر التربيعي	$y = \sqrt{x}$	
٥. دالة القيمة المطلقة	$y = x $	

ملاحظات على رسم الدوال: (الازاحة)

١. الإزاحة إلى الأعلى :

يمكن الحصول على منحنى الدالة $y = f(x) + c$ بإزاحة منحنى $y = f(x)$ بمقدار c وحدة إلى أعلى (على محور y).

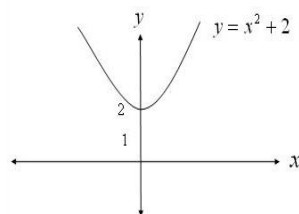
مثال: ارسم منحنى الدالة $y = x^2 + 2$

الحل:

١/ نستخرج أصيغه القياسية من المعادلة ((نшил الوحدات المضافة حتى تتضح لنا الصيغة القياسية))

هذي هي الصيغة $y = x^2$ [في جدول الصيغ القياسية هذي الدالة التربيعية وشكلها مثل U]

٢/ نرسمها



٣/ بعد الرسم نحركها بعدد الوحدات المطلوبة

٢. الإزاحة إلى الأسفل:

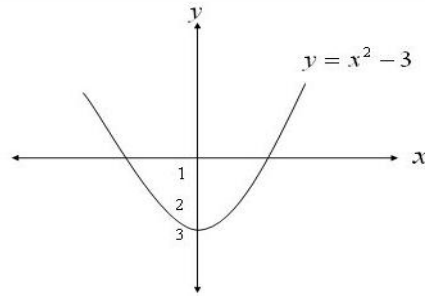
يمكن الحصول على منحنى $y = f(x) - c$ بإزاحة منحنى $y = f(x)$ بمقدار c وحدة إلى أسفل (على محور y).

مثال: ارسم الدالة $y = x^2 - 3$

الحل:

إذا استبعدنا الوحدات المضافه تبقى المعادلة $y = x^2$ الصيغة القياسية لـ الدالة التربيعه ولكن هنا بالطرح

إذا إلى أسفل والمطلوب ٣ وحدات



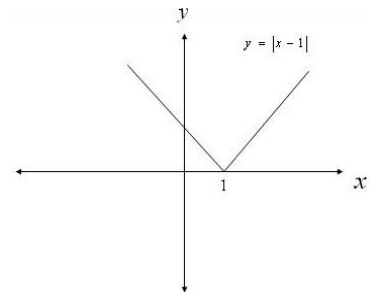
٣. الإزاحة إلى اليمين:

يمكن الحصول على منحنى $y = f(x - c)$ بإزاحة منحنى $y = f(x)$ بمقدار c وحدة إلى اليمين (على محور x).

مثال: ارسم الدالة $y = |x - 1|$

الحل: نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y = |x|$ وحدة واحدة إلى اليمين كما يلي:

نفس الطريقة السابقة



٤. الإزاحة إلى اليسار:

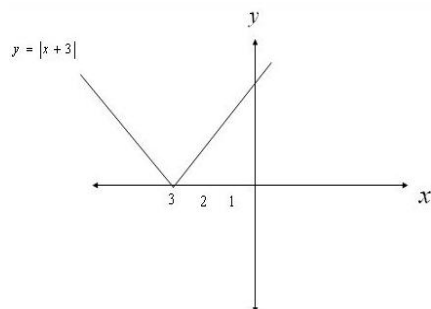
يمكن الحصول على منحنى $y = f(x + c)$ بإزاحة منحنى $y = f(x)$ بمقدار c وحدة إلى اليسار (على محور x).

مثال: ارسم الدالة $y = |x + 3|$

دعواتكم/ اختكم بوحه غناء

الحل:

نحصل على ~~الخط~~ هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة ثلاث وحدات إلى اليسار كما يلي:



مثال على الإزاحة المزدوجة:

ارسم الدالة $y = (x-1)^3 + 2$

الحل:

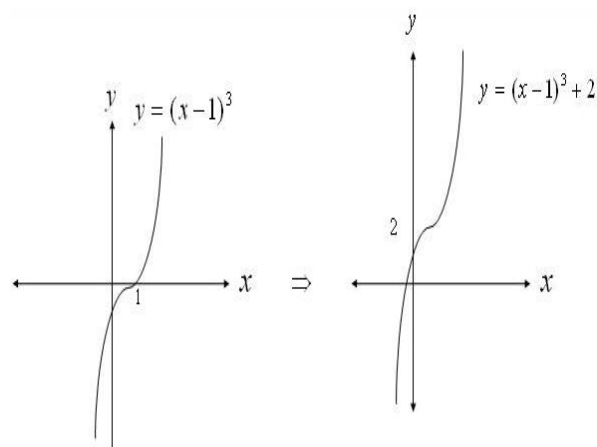
اولايجاد الصيغة القياسية نستبعد الوحدات لـ الدالة (لا ننسى أن لفك القوس لا بد أن ندخل التكعييب) لذلك نقول الصيغة القياسية لدالة هي x^3 ∴ دالة تكعيبيه

هنا نقوم بإزاحتين لدالة التكعيبيه

الأولى $y = (x-1)^3$ [هذي نفس شكل الازاحه الى اليمين]

والثانية $y = x+2$ [نفس شكل الازاحه إلى أعلى]

نزيحه بمقدار وحده إلى اليمين ثم وحدتين إلى الأعلى



٥. الانعكاس على محور x:

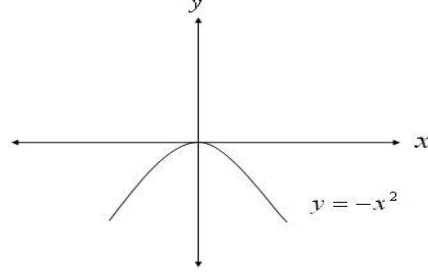
دعواتكم/ اختكم دوحة غناء

يمكن الحصول على منحنى $y = -f(x)$ بانعكاس منحنى $y = f(x)$ على محور x .

مثال: ارسم الدالة $y = -x^2$

الحل: نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة $y = x^2$ على محور x كما يلي:

من شكل الدالة هي تربيعيه وقال معكوس على x (إذا تذكرن في المرحلة الابتدائية كنا نسويها بورق الشفاف وكنا نسمي x محور تناظر)



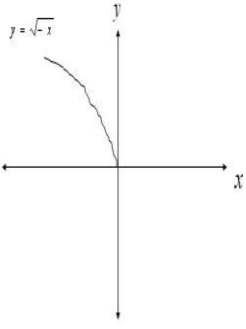
٦. الانعكاس على محور y :

يمكن الحصول على منحنى $y = f(-x)$ بانعكاس منحنى $y = f(x)$ على محور y .

مثال: ارسم الدالة $y = \sqrt{-x}$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة $y = \sqrt{x}$ على محور y كما يلي:



***** الزبد من الازاحات هناع *****

إذا قلنا ازاحه إلى أعلى أو أسفل :. الازاحه على محور الـ y

وإذا قلنا إلى اليمين أو اليسار :. الازاحه على محور الـ x

كيف نميز جهة الإزاحة؟ بشكل المعادلة

نوع الازاحه	المعادلة	مثال
الإزاحة إلى الأعلى	$y = f(x) + c$	$y = x^2 + 2$
الإزاحة إلى الأسفل	$y = f(x) - c$	$y = x^2 - 3$
الإزاحة إلى اليمين	$y = f(x - c)$	$y = x - 1 $
الإزاحة إلى اليسار	$y = f(x + c)$	$y = x + 3 $

الانعكاس على محور x	$y = -f(x)$	الـ (-) مضروب في الدالة $y = -x^2$
الانعكاس على محور y	$y = f(-x)$	الـ (-) مضروب في قيمة الـ x فقط $y = \sqrt{-x}$

***الدكتور قال صيغة السؤال في الاختبار رح تكون بهذي الطريقة**

مثال ١:

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y = x^2$ وحدتين إلى أعلى اختر منحنى الدالة الصحيح (((ثم يعطي خيارات)))

- الحل :

المعطيات/ الصيغة القياسية $y = x^2$

إلى أعلى يعني + (؟؟؟) لأننا حافظين المعادلة للإزاحة إلى الأعلى ($y=f(x)+c$)

و وحدتين يعني ٢

∴ المعادلة رح تكون $y=f(x)+٢$

*مثال ٢:

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة $y = \sqrt{6}$ على محور y أوجد معادلة منحنى الدالة؟؟؟

-الحل

المعطيات/

الصيغة القياسية لدالة $y = \sqrt{6}$ ↔

هو معكوس على y ∴ معادلة المعكوس على محور y هي $y = f(-x)$

∴ المعادلة ← $y = \sqrt{-6}$

مجال الدالة:

تعريف مجال الدالة : هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تكون عندها قاعدة الدالة معرفة. وكثيرات الحدود مجالها R

كثيرات الحدود مجالها دائما R [الصيغة العامة لكثيرات الحدود (أ س + ب ص - ج) المهم أنها س وص ويمكن ج ويكون بينهم إشارات ويمكن يكون الـ س أو الـ ص عليهم أس] ب E $(A x + B Y - s)$

الحل/

١/ الدالة جذرية ودليله ٢ (إذا كان الدليل ٢ ما ينكتب فوق الجذر) من شروط مجال الدالة الجذرية أن نستبعد كل القيم السالبة)

٢/ أن نكتبها على شكل متباينه ونستبعد القيم الـ (-) $x+4 \geq 0$

٣/ حل هذه المتباينة $x \geq -4$ ∴ مجالها $[-4, \infty)$

$$3) f(x) = \sqrt[3]{x-2}$$

الحل /

الدليل فردي ∴ مبالشره نكتب الدليل R

$$4) f(x) = \sqrt{x^2+4}$$

١/ الدليل ٢ زوجي و x مربع ∴ جميع القيم ستصبح + ولن يكون هناك عدد – تحت الجذر

∴ مجال الدالة R

$$5) f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$$

الحل:

الدالة نسبيه ∴ نستثني كل ما سيجعل المقام = صفر

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

∴ مجال الدالة R - 2

$$6) f(x) = \begin{cases} 3x+2 & , x > 1 \\ 7x-6 & , x < 1 \end{cases}$$

الحل/ المتباينه إذا لم يوجد إشارة = مع < و > فإن العدد مستثنى من المجموعة

∴ مجال الدالة (R - ١)

$$7) \quad f(x) = \begin{cases} x+7 & , 1 < x \leq 4 \\ 3x-5 & , 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

الحل/

باختصار نأخذ العدد الأول ١ لاحظوا الإشارة ما فيها = ∴ الفترة مفتوحة

ثم نأخذ العدد الأخير ولاحظوا الإشارة فيها = ∴ الفترة مغلقة

∴ مجال الدالة [١، ٨)

$$8) \quad f(x) = \log(2x+4)$$

الحل/

اللوغاريتم شرطه أن لا يكون سالب

- نحول إلى متباينة ونحلها

∴ $2x+4 > 0$ (نضع إشارة اكبر من الصفر لأنها لابد تكون القيم موجبه)

$$-4 < 2x \quad \text{نقسم على معامل الـ } x$$

$$x > -2$$

∴ مجال الدالة هو (-٢, ∞)

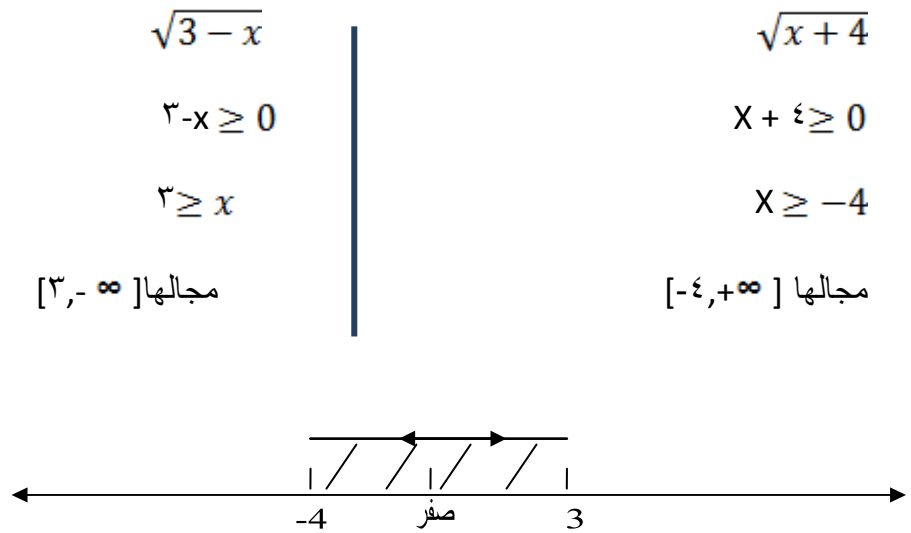
$$9) \quad f(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{3-x}$$

الحل/

جذرا مختلفا ∴ نحدد مجال كل جذر والمجال يكون الفترة المشتركة بين المجالين لأن هذه الفترة هي

التي تحقق الشرط بأن ما تحت الجذر لا يكون -

دعواتكم/ اختكم دوحة غناء



∴ مجال الدالة من $[-4, 3]$

***** ملاحظه *****

بعد حل المتباينة يبقى تحديد المجال أكيد رح يكون العدد الناتج

ولكن كيف نعرف هل هو مغلق أو مفتوح؟

إشارة اكبر واصغر إذا كان فيها = يعني مغلقه [] إذا ما فيها ()

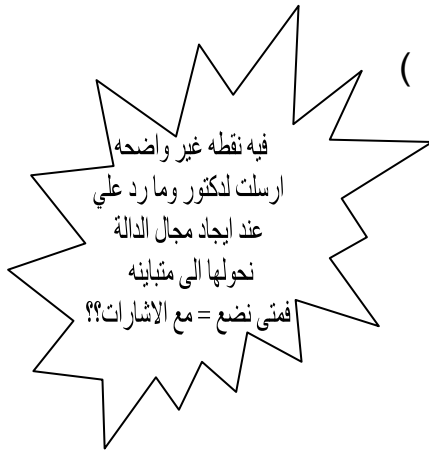
وكيف نعرف هل $+\infty$ او $-\infty$ ؟

(باختصار إذا كان x اكبر ∴ $+\infty$ وإذا كان اصغر $-\infty$)

وممكن نمثلها على خط الأعداد لمعرفة هل هي - أو +

كيف نعرف الإشارة اكبر أو اصغر؟

القيمة التي في الجهة المفتوحة من الإشارة هي اكبر مثال $x \geq 3$ اكبر 3 الـ $x \geq -4$ اكبر -4



ما أصبت فمن الله وحده وما أخطئت فمن نفسي والشيطان

الاشتقاق

قواعد مهمة

١ / العدد الصحيح يحول الى = صفر

٢ / والمتغير الـ X يحول الى = ١

٣ / اذا كان للـ X اس << نقوم بانزال الاس ويكون بجوار الـ X ثم
تطرح من قميه الاوس واحد ونضعه اس جديد للـ X

$$\text{بهذا الشكل } x^2 = 2x^{2-1}$$

مثال :

$$\text{اوجد } y = 5$$

الحل حسب القاعده الاولى << العدد الصحيح يحول الى ٠

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

مثال

اوجد

$$y = 3x^4$$

الحل حسب القاعده ٣

$$\frac{dy}{dx} = 4x^{4-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3$$

مثال شامل

اوجد

$$y = 5x^2 + 4x + 7$$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 5(2)x^{2-1} + 4(1) + 0$$

لاحظ اننا قمنا بانزال الاس بجوار الـ X ثم طرحنا واحد من الاس

تنبيه : اذا كان الاس ٢ وطرحنا منه ١ سيكون الناتج ١ اذا لا يكتب X اس واحد يكتب X بدون اس لان أي عدد او مجهول اسه واحد

لاحظ اننا حولنا الـ X الذي كان مع الـ ٤ الى ١

لاحظ اننا حولنا العدد الصحيح الى صفر

ثم نقوم بضر العدد الذي بين الاقواس بالعدد الذي قبله

$$5 \text{ ضرب } 2 = 10$$

$$4 \text{ ضرب } 1 = \text{واحد}$$

ويكون هذا هو الحل النهائي

$$\frac{dy}{dx} = 10x + 4$$