المحاضره السادسه

(مقاييس النزعة المركزية للتوزيع التكراري) الوسط الهندسي – الوسيط

اهداف المحاضرة:

بنهاية المحاضرة يكون الطالب قادر على:

- تعريف الوسط الهندسي للتوزيع التكراري.
- حساب الوسط الهندسي للتوزيع التكراري.
- تعريف الفئة الوسيطية.
- حساب الوسيط للتوزيع التكراري.

الوسط الهندسي:

تعريف:

اذا كان لدينا توزيع تكراري عدد فئاته h وكانت مراكز الفئات

$X_1, X_2, ..., X_h$ وكانت التكرارات المقابلة لها

$f_1, f_2, ..., f_h$ فأن الوسط الهندسي يكون:

$$G = \sqrt[n]{X_1^{f_1}\ X_2^{f_2}\ .....\ X_h^{f_h}}$$

مثال (١): احسبي الوسط الهندسي لدرجات الطالبات في الاختبار النهائي في التوزيع التكراري التالي:

الفئات	التكرار (f)
٠ – ١٠	٦
١٠ – ٢٠	٧
٢٠ – ٣٠	١٤
٣٠ – ٤٠	١٢
٤٠ – ٥٠	١١
مجموع التكرارات (n)	٥٠

حل المثال ١ : لحساب الوسط الهندسي لدرجات الطالبات في الاختبار النهائي نبدأ اولا بحساب مركز الفئه $X_i = \frac{L+U}{2}$

الفئات	التكرار (f)	التكرار
٠ – ١٠	٦	(١٠+٠)÷٢= ٥
١٠ – ٢٠	٧	(٢٠+١٠)÷٢= ١٥
٢٠ – ٣٠	١٤	(٣٠+٢٠)÷٢= ٢٥
٣٠ – ٤٠	١٢	(٤٠+٣٠)÷٢= ٣٥
٤٠ – ٥٠	١١	(٥٠+٤٠)÷٢= ٤٥
مجموع التكرارات (n)	٥٠	

حل المثال (١): نحسب قيمة الوسط الهندسي بالتطبيق على القانون

$$G = \sqrt[n]{X_1^{f_1}\ X_2^{f_2}\ \ldots..\ X_h^{f_h}}$$

$$G = \sqrt[50]{5^6 \times 15^7 \times 25^{14} \times 35^{12} \times 45^{11}}$$

الوسيط للتوزيع التكراري ذي الفئات:

تعريف: الفئة الوسيطية هي اول فئة يزيد تكرارها المتجمع عن $\frac{n}{2}$ او يساويه حيث n هو مجموع التكرارات.

لتحديد فئة الوسيط:

نحسب ترتيب الوسيط

ترتيب الوسيط= $\frac{n}{2}$

n = مجموع التكرارات

نحسب التكرار المتجمع للتوزيع التكراري

$$M = a + \left(\frac{\frac{n}{2} - n_1}{f_m} \right) X\ C$$

حيث ان:

a = الحد الادنى الفعلي للفئة الوسيطية.

$\frac{n}{2}$ = ترتيب الوسيط. f_m = تكرار الفئة الوسيطية.

n_1 = التكرار المتجمع للفئة التي تسبق الفئة الوسيطية مباشرة.

C = طول الفئة الوسيطية = الحد الاعلى الفعلي – الحد الادنى الفعلي.

مثال (٢): اوجدي الوسيط للتوزيع التكراري التالي:

الفئات	التكرار (f)
٧ – ١٣	١٢
١٣ – ١٩	١٠
١٩ – ٢٥	١٤
٢٥ – ٣١	١١
٣١ – ٣٧	٧
مجموع التكرارات (n)	٥٤

حل المثال (٢):

ترتيب الوسيط = $\frac{n}{2}$ = $\frac{54}{2}$ = 27

الفئات	التكرار (f)	التكرار التجمعي
٧ ــ ١٣	١٢	١٢
١٣ ــ ١٩	١٠	٢٢
١٩ ــ ٢٥	١٤	٣٦
٢٥ ــ ٣١	١١	٤٧
٣١ ــ ٣٧	٧	٥٤
مجموع التكرارات (n)	٥٤	

حل المثال (٢):

فئة الوسيط هي: ١٩ ــ ٢٥

$$M = a + \left(\frac{\frac{n}{2} - n_1}{f_m} \right) X\ C$$

الفئات	التكرار (f)	التكرار التجمعي
٧ ــ ١٣	١٢	١٢
١٣ ــ ١٩	١٠	٢٢
١٩ ــ ٢٥	١٤	٣٦
٢٥ ــ ٣١	١١	٤٧
٣١ ــ ٣٧	٧	٥٤
مجموع التكرارات (n)	٥٤	

a = 19 $\frac{n}{2} = \frac{54}{2} = 27$

$n_1 = 22 \qquad f_m = 14$

C = 25 – 19 = 6

$$M = 19 + \left(\frac{27-22}{14} \right) X\,6 = 21.14$$

مثال (٣): اوجدي الوسيط للتوزيع التكراري التالي:

الفئات	التكرار (f)
٢٥.٥ ــ ٢٩.٥	٤
٢٩.٥ ــ ٣٣.٥	٣
٣٣.٥ ــ ٣٧.٥	٣
٣٧.٥ ــ ٤١.٥	١٥
٤١.٥ ــ ٤٥.٥	٧
٤٥.٥ ــ ٤٩.٥	٨
مجموع التكرارات (n)	٤٠

حل المثال (٣):

ترتيب الوسيط = $\frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20$

التكرار التجمعي	التكرار (f)	الفئات
٤	٤	٢٥.٥ ــ ٢٩.٥
٧	٣	٢٩.٥ ــ ٣٣.٥
١٠	٣	٣٣.٥ ــ ٣٧.٥
٢٥	١٥	٣٧.٥ ــ ٤١.٥
٣٣	٨	٤١.٥ ــ ٤٥.٥
٤٠	٧	٤٥.٥ ــ ٤٩.٥
	٤٠	مجموع التكرارات (n)

حل المثال (٣):

فئة الوسيط هي: ٣٧.٥ ــ ٤١.٥

$$M = a + \left(\frac{\frac{n}{2} - n_1}{f_m} \right) X \ C$$

حل المثال (٣):

التكرار التجمعي	التكرار (f)	الفئات
٤	٤	٢٥.٥ ــ ٢٩.٥
٧	٣	٢٩.٥ ــ ٣٣.٥
١٠	٣	٣٣.٥ ــ ٣٧.٥
٢٥	١٥	٣٧.٥ ــ ٤١.٥
٣٣	٨	٤١.٥ ــ ٤٥.٥
٤٠	٧	٤٥.٥ ــ ٤٩.٥
	٤٠	مجموع التكرارات (n)

a = 37 .5 $\frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20$

$n_1 = 10 \qquad f_m = 15$

C = 41.5 – 37.5 =4

$$M = 37.5 + \left(\frac{20-10}{15} \right) X\, 4 = 40.17$$

انتهى

اهداف المحاضرة بنهاية المحاضرة يكون الطالب قادر على:

- تعريف المنوال للتوزيع التكراري.
- حساب المنوال للتوزيع التكراري.
- تعريف صفات الوسط الحسابي، الوسيط والمنوال.
- المقارنة بين صفات الوسط الحسابي، الوسيط والمنوال.

- المنوال للتوزيع التكراري ذي الفئات

لحساب المنوال في التوزيعات التكرارية ذات الفئات:

١. نحدد الفئة المنوالية (الفئات المنوالية) وهي الفئة (او الفئات) التي يقابلها اكبر تكرار.
٢. نحسب قيمة المنوال وهو عبارة عن مركز الفئة المنوالية ويسمى المنوال التقريبي.

مثال (١):

أحسب المنوال للتوزيع التكراري التالي:

الفئات	f
٧ - ١٣	١٢
١٣ - ١٩	١٠
١٩ - ٢٥	١٤
٢٥ - ٣١	١١
٣١ - ٣٧	٧

الحل :

١- الفئه المنواليه هي ١٩ ــ ٢٥

٢- المنوال التقريبي = مركز الفئه المنواليه = $\frac{25+19}{2} = 22$

مثال ٢ :

أحسب المنوال للتوزيع التكراري التالي:

الفئات	f
٠ - ١٠	٦
١٠ - ٢٠	١٣
٢٠ - ٣٠	١٢
٣٠ - ٤٠	١٣
٤٠ - ٥٠	١١
مجموع التكرارات n	٥٥

حل مثال ٢ :

١- الفئه المنواليه هي ١٠- ٢٠

٢- المنوال التقريبي الاول = مركز الفئه المنواليه = $\frac{20+10}{2} = 15$

٣- الفئه المنواليه الثانيه هي ٣٠ – ٤٠

٤- المنوال التقريبي الثاني = مركز الفئه المنواليه = $\frac{40+30}{2} = 35$

- مقارنة بين صفات الوسط الحسابي والوسيط والمنوال:

١. الوسط الحسابي اكثر مقاييس النزعة المركزية استعمالا، سهل الحساب والتعريف، يخضع للعمليات الجبرية:

اذا علما الوسط الحسابي ومجموع التكرارات نستطيع معرفة مجموع القيم : $\sum X_i = n\overline{X}$

مثال: اذا كان $n = 11$ $\overline{X} = 5$ اوجد قيمة $\sum X_i$ ؟

حل المثال: $\sum X_i = n\overline{X} = 11 \times 5 = 55$

- مجموع انحرافات قيم البيانات عن وسطها الحسابي يساوي صفر: $\sum (X_i - \overline{X}) f_i = 0$; $\sum (X_i - \overline{X}) = 0$
- يعتمد الوسط الحسابي في حسابه جميع القيم، فان قيمته تتغير اذا حذفنا او غيرنا في اي من مفردات البيانات.
- الوسط الحسابي هو نقطة اتزان التوزيع لو اضفنا اي عدد من القيم المساوية للوسط الحسابي الى البيانات فان هذه الاضافة لا تؤثر عليه ولكن اذا اضفنا مفردات تختلف قيمها عن قيمة الوسط الحسابي فان قيمته تتغير.
- من اهم نواقص الوسط الحسابي هو تأثره الشديد بالقيم المتطرفة.

٢. الوسيط سهل التعريف والحساب ولا يتأثر بالقيم الشاذة ولا يعتمد جميع القيم، فتغير بعض القيم ربما يؤثر في قيمته او لا يؤثر فيها، يمكن ايجاد الوسيط في حالة البيانات الناقصة اذا حددنا موقعها.

٣. الوسط الحسابي اكثر ثبوتا من الوسيط.

٤. المنوال في البيانات القليلة العدد عديم الفائدة، اما في البيانات الكبيرة العدد له معنى معقول. وميزته سهل الحساب وهو يتأثر بطريقة اختيار الفئات، لا يتأثر بالقيم الشاذة.

- يفضل استعمال الوسط الحسابي اذا كان التوزيع متماثل تقريبا.
- استعمال الوسيط اذا كان التوزيع ملتويا.
- يفضل استعمال المنوال اذا كان التوزيع متعدد المنوالات.

- تطبيقات على مقاييس النزعة المركزية :

الفئات	f
٥ - ١٥	٥
١٥ -٢٥	٩
٢٥ - ٣٥	١٤
٣٥ - ٤٥	١٥
٤٥ - ٥٥	١٧
مجموع التكرارات n	٦٠

احسبي:

١- الوسط الحسابي ٢- الوسط الهندسي ٣- الوسيط ٤- المنوال .

١- الوسط الحسابي:

لحساب الوسط الحسابي نحسب مركز الفئه اولا :

$$X = \frac{(L+U)}{2}$$

الفئات	f	X
٥ - ١٥	٥	(٥+١٥)÷٢=١٠
١٥ -٢٥	٩	(١٥+٢٥)÷٢=٢٠
٢٥ - ٣٥	١٤	(٢٥+٣٥)÷٢=٣٠
٣٥ - ٤٥	١٥	(٣٥+٤٥)÷٢=٤٠
٤٥ - ٥٥	١٧	(٤٥÷٥٥)÷٢=٥٠
مجموع التكرارات n	٦٠	

ثم نحسب قيمه : $\sum Xi\ Fi$

الفئات	f	X	f.X
٥ - ١٥	٥	(٥+١٥)÷٢=١٠	١٠×٥=٥٠
١٥ -٢٥	٩	(١٥+٢٥)÷٢=٢٠	٢٠×٩=١٨٠
٢٥ - ٣٥	١٤	(٢٥+٣٥)÷٢=٣٠	٣٠×١٤=٤٢٠
٣٥ - ٤٥	١٥	(٣٥+٤٥)÷٢=٤٠	٤٠×١٥=٦٠٠
٤٥ - ٥٥	١٧	(٤٥÷٥٥)÷٢=٥٠	٥٠×١٧=٨٥٠
مجموع التكرارات n	٦٠		٢١٠٠

في الخطوة الاخيرة نحسب قيمة الوسط الحساب بالتطبيق على القانون:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{h} X_i f_i}{n}$$

$$= \frac{2100}{60} = 35$$

٢- الوسط الهندسي:

لحساب الوسط الهندسي نحسب

مركز الفئه اولا :

$$Xi = \frac{(L+U)}{2}$$

X	f	الفئات
١٠=٢÷(١٥+٥)	٥	١٥ - ٥
٢٠=٢÷(٢٥+١٥)	٩	٢٥ -١٥
٣٠=٢÷(٣٥+٢٥)	١٤	٣٥ - ٢٥
٤٠=٢÷(٤٥+٣٥)	١٥	٤٥ - ٣٥
٥٠=٢÷(٥٥÷٤٥)	١٧	٥٥ - ٤٥
	٦٠	مجموع التكرارات n

ثم نحسب قيمة الوسط الهندسي بالتطبيق على القانون:

$$G = \sqrt[n]{X_1^{f_1}\ X_2^{f_2}\ \dots\dots\ X_h^{f_h}}$$

$$G = \sqrt[60]{10^5 \times 20^9 \times 30^{14} \times 40^{15} \times 50^{17}}$$

٣- الوسيط:

لحساب الوسيط نحدد ترتيب الوسيط اولا

ترتيب الوسيط = $\frac{n}{2}$

= $\frac{60}{2}$ = 30

الفئة الوسيطية هي ٣٥ ــ ٤٥

التكرار التجمعي	f	الفئات
٥	٥	١٥ - ٥
١٤	٩	٢٥ -١٥
٢٨	١٤	٣٥ - ٢٥
٤٣	١٥	٤٥ - ٣٥
٦٠	١٧	٥٥ - ٤٥
	٦٠	مجموع التكرارات n

$$M = a + \left(\frac{\frac{n}{2} - n_1}{f_m} \right) X\ C$$

التكرار التجمعي	f	الفئات
٥	٥	١٥ - ٥
١٤	٩	٢٥ -١٥
٢٨	١٤	٣٥ - ٢٥
٤٣	١٥	٤٥ - ٣٥
٦٠	١٧	٥٥ - ٤٥
	٦٠	مجموع التكرارات n

a = 35 $\quad \frac{n}{2} = \frac{60}{2} = 30$

$n_1 = 28 \qquad f_m = 15$

C = 45 – 35 =10

$$M = 35 + \left(\frac{30-28}{15} \right) X\,10 = 36.3$$

٤- المنوال:

الفئة المنوالية هي ٤٥ ــ ٥٥

المنوال التقريبي = مركز الفئة المنوالية = (٤٥+٥٥) ÷ ٢= ٥٠

الفئات	f
٥ ـ ١٥	٥
١٥ـ ٢٥	٩
٢٥ ـ ٣٥	١٤
٣٥ ـ ٤٥	١٥
٤٥ ـ ٥٥	١٧
مجموع التكرارات n	٦٠

انتهى

المدى للبيانات الأولية

- تعريف المدى: المدى في البيانات الاولية هو الفرق بين اعلى قيمة واقل قيمة.

من تعريف المدى نجد انه لايعتمد على كل البيانات وهذا يقلل من اهميته اذا كان اكبر واقل قيمة قيماتان شاذتان ففي هذه الحالة يكون المدى كبيرا والبيانات غير متباعدة.

للتخلص من هذه الصعوبات نستخدم:

المدى المئيني = $P_{90} - P_{10}$

المدى الربيعي = $Q_3 - Q_1$

نصف المدى الربيعي = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

مثال (١): اوجدي المدى للاعداد ٢، ٤، ٦، ٣،٥.

الحل :

المدى = اكبر قيمة – اقل قيمة
= ٦ – ٢ = ٤

التباين للبيانات الأولية

تعريف التباين: إذا كانت $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ تمثل عينة عشوائية، فأن التباين هو: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}$

مثال (٢): اوجد التباين للأعداد ٢، ٤، ٦، ٣، ٥.

الحل:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum \mathrm{X}i}{n} = \frac{2+4+6+3+5}{5} = 4$$

حل المثال (٢):

$$\sum(X_i-\overline{X})^2=(2-4)^2+(4-4)^2+(6-4)^2+(3-4)^2+(5-4)^2$$

$$\sum(X_i-\overline{X})^2=(-2)^2+(0)^2+(2)^2+(-1)^2+(1)^2$$

$$\sum(X_i-\overline{X})^2=4+0+4+1+1=10$$

تابع حل المثال (٢):

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n-1}$$

$$S^2=\frac{10}{5-1}=\frac{10}{4}=2.5$$

الانحراف المعياري للبيانات الأولية

تعريف: الانحراف المعياري للبيانات الأولية هو الجذر التربيعي الموجب للتباين للبيانات الأولية

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n-1}}$$

مثال (٣): اوجد الإنحراف المعياري للأعداد ٣، ٩، ١٢، ٨.

الحل:

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n-1}}$$

$$\overline{X}=\frac{\sum \mathrm{X}i}{n}=\frac{3+9+12+8}{4}=8$$

حل المثال (٣):

$$\sum(X_i-\bar{X})^2=(3-8)^2+(9-8)^2+(12-8)^2+(8-8)^2$$

$$\sum(X_i-\bar{X})^2=(-5)^2+(1)^2+(4)^2+(0)^2$$

$$\sum(X_i-\bar{X})^2=25+1+16+0=42$$

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}} \qquad S=\sqrt{\frac{42}{4-1}}=\sqrt{\frac{42}{3}}=\sqrt{14}=3.74$$

نظرية (١):

التباين للبيانات الاولية هو: $S^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum X_i^2-n\bar{X}^2\right]$

مثال (٤): للأعداد ٢، ٤، ٦، ٣، ٥ اوجد

١. التباين.
٢. الإنحراف المعياري. باستخدام النظرية (١).

حل المثال (٤):

$$S^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum X_i^2-n\bar{X}^2\right]$$

حل المثال (٤):

$$\sum X_i^2=(2)^2+(4)^2+(6)^2+(3)^2+(5)^2$$

$$\sum X_i^2=4+16+36+9+25=90$$

$$\bar{X}=\frac{\sum X_i}{n}=\frac{2+4+6+3+5}{5}=4$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum X_i^2-n\bar{X}^2\right]$$

$$S^2=\frac{1}{5-1}\left[90-5\times(4)^2\right]=\frac{10}{4}=2.5$$

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{2.5}=1.58$$

الانحراف المتوسط للبيانات الأولية

تعريف: اذا كانت $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ تمثل عينة عشوائية، فأن الانحراف المتوسط يكون $M.D. = \frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i - \bar{X}|}{n}$

مثال (٥): اوجد الإنحراف المتوسط للأعداد ٣، ٩، ١٢، ٨.

الحل:

$$M.D. = \frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i - \bar{X}|}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum Xi}{n} = \frac{3+9+12+8}{4} = 8$$

حل المثال (٥):

$$\sum |X_i - \bar{X}| = |3-8| + |9-8| + |12-8| + |8-8|$$

$$\sum |X_i - \bar{X}| = |-5| + |1| + |4| + |0|$$

$$\sum |X_i - \bar{X}| = 5+1+4+0 = 10$$

$$M.D. = \frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i - \bar{X}|}{n}$$

$$M.D. = \frac{10}{4} = 2.5$$

تطبيقات على مقاييس التشتت للبيانات الأولية

٢. **معطى المعلومات التالية:**

$$\sum X_i^2 = 247 \qquad \bar{X} = 3 \qquad n = 8$$

اوجد

أ- **التباين.**

ب- **الانحراف المعياري.**

١. **اذا كان**

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = 144 \qquad n = 10$$

احسب

أ- **التباين.**

ب- **الانحراف المعياري.**

٣. **احسب الانحراف المتوسط اذا كان**

$$n = 5 \qquad \sum|X_i - \bar{X}| = 65$$

١. معطى البيانات التالية ٩ ، ٣ ، ١٧، ١١ ، ٧ ، ١٣ احسب:

١. التباين.
٢. الانحراف المعياري.
٣. الانحراف المتوسط.

انتهى

المدى - التباين

اهداف المحاضرة:

١. تعريف المدى للتوزيع التكراري.
٢. حساب المدى للتوزيع التكراري.
٣. تعريف التباين للتوزيع التكراري.
٤. حساب التباين للتوزيع التكراري.

المدى للتوزيع التكراري:
تعريف: المدى للتوزيع التكراري هو الفرق بين الحد الاعلى للفئة العليا والحد الادنى للفئة الدنيا.

مثال (١): احسب المدى للتوزيع التكراري الاتي؟

الفئات	التكرار
٥ ـ ١٥	٥
١٥ ـ ٢٥	٩
٢٥ ـ ٣٥	١٤
٣٥ ـ ٤٥	١٥
٤٥ ـ ٥٥	١٧
مجموع التكرارات (n)	٦٠

حل المثال (١):

المدى = الحد الاعلى للفئة العليا ـ الحد الادنى للفئة الدنيا
المدى = ٥٥ ـ ٥ = ٥٠

التباين للتوزيع التكراري:
تعريف: اذا كانت مراكز فئات توزيع تكراري هي: $X_1, X_2, ..., X_h$ وكانت التكرارات المقابلة لها $f_1, f_2, ..., f_h$

فالتباين هو
$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{h}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 f_i}{n-1}$$

حيث ان:
$\overline{X}$ = الوسط الحسابي للتوزيع التكراري.
n = مجموع التكرارات.

مثال (٢): اوجد التباين للتوزيع التكراري؟

الفئات	التكرار
٥ ـ ١٥	٥
١٥ ـ ٢٥	٩
٢٥ ـ ٣٥	١٤
٣٥ ـ ٤٥	١٥
٤٥ ـ ٥٥	١٧
مجموع التكرارات (n)	٦٠

حل المثال (٢): لإيجاد التباين للتوزيع التكراري اولا يتم حساب الوسط الحسابي ولحساب الوسط الحسابي نحسب مركز الفئة.

١- نحسب مراكز الفئات للتوزيع التكراري $Xi = \frac{(L+U)}{2}$

الفئات	التكرار	الفئات
٥ ـ ١٥	٥	١٠=٢÷(١٥+٥)
١٥ ـ ٢٥	٩	٢٠=٢÷(٢٥+١٥)
٢٥ ـ ٣٥	١٤	٣٠=٢÷(٣٥+٢٥)
٣٥ ـ ٤٥	١٥	٤٠=٢÷(٤٥+٣٥)
٤٥ ـ ٥٥	١٧	٥٠=٢÷(٥٥+٤٥)
مجموع التكرارات (n)	٦٠	

٢- لحساب الوسط الحسابي نحسب : $\sum Xi\, Fi$

الفئات	التكرار	الفئات	التكرار
٥ ـ ١٥	٥	١٠=٢÷(١٥+٥)	٥٠ =٥×١٠
١٥ ـ ٢٥	٩	٢٠=٢÷(٢٥+١٥)	١٨٠ =٩×٢٠
٢٥ ـ ٣٥	١٤	٣٠=٢÷(٣٥+٢٥)	٤٢٠ =١٤×٣٠
٣٥ ـ ٤٥	١٥	٤٠=٢÷(٤٥+٣٥)	٦٠٠ =١٥×٤٠
٤٥ ـ ٥٥	١٧	٥٠=٢÷(٥٥+٤٥)	٨٥٠ =١٧×٥٠
مجموع التكرارات (n)	٦٠		٢١٠٠

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{h} X_i f_i}{n}$$
$$= \frac{2100}{60} = 35$$

٣- نحسب انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الحسابي: $(X_i - \overline{X})$

الفئات	التكرار	الفئات	التكرار	مراكز الفئات
٥ ـ ١٥	٥	١٠=٢÷(١٥+٥)	٥٠ =٥×١٠	٢٥ =٣٥-١٠
١٥ ـ ٢٥	٩	٢٠=٢÷(٢٥+١٥)	١٨٠ =٩×٢٠	١٥ =٣٥-٢٠
٢٥ ـ ٣٥	١٤	٣٠=٢÷(٣٥+٢٥)	٤٢٠ =١٤×٣٠	٥- =٣٥-٣٠
٣٥ ـ ٤٥	١٥	٤٠=٢÷(٤٥+٣٥)	٦٠٠ =١٥×٤٠	٥ =٣٥-٤٠
٤٥ ـ ٥٥	١٧	٥٠=٢÷(٥٥+٤٥)	٨٥٠ =١٧×٥٠	١٥ =٣٥-٥٠
مجموع التكرارات (n)	٦٠		٢١٠٠	

٤- نحسب: $\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

الفئات	التكرار	الفئات	التكرار	مراكز الفئات X_i	$X_i f_i$
٥ ـ ١٥	٥	١٠=٢÷(١٥+٥)	٥٠ =٥×١٠	٢٥ =٣٥-١٠	٦٢٥
١٥ ـ ٢٥	٩	٢٠=٢÷(٢٥+١٥)	١٨٠ =٩×٢٠	١٥ =٣٥-٢٠	٢٢٥
٢٥ ـ ٣٥	١٤	٣٠=٢÷(٣٥+٢٥)	٤٢٠ =١٤×٣٠	٥- =٣٥-٣٠	٢٥
٣٥ ـ ٤٥	١٥	٤٠=٢÷(٤٥+٣٥)	٦٠٠ =١٥×٤٠	٥ =٣٥-٤٠	٢٥
٤٥ ـ ٥٥	١٧	٥٠=٢÷(٥٥+٤٥)	٨٥٠ =١٧×٥٠	١٥ =٣٥-٥٠	٢٢٥
مجموع التكرارات (n)	٦٠		٢١٠٠		

٥- نحسب: $\left(X_i-\overline{X}\right)^2 f_i$

الفئات	التكرار	الفئات	التكرار	X_i مراكز الفئات	$X_i f_i$	$X_i-\overline{X}$
٥ ــ ١٥	٥	(٥+١٥)÷٢=١٠	٥٠ =٥×١٠	٢٥ =٣٥-١٠	٦٢٥	٣١٢٥ =٥×٦٢٥
١٥ ــ ٢٥	٩	(١٥+٢٥)÷٢=٢٠	١٨٠ =٩×٢٠	١٥ =٣٥-٢٠	٢٢٥	٢٠٢٥ =٩×٢٢٥
٢٥ ــ ٣٥	١٤	(٢٥+٣٥)÷٢=٣٠	٤٢٠ =١٤×٣٠	٥- =٣٥-٣٠	٢٥	٣٥٠ =١٤×٢٥
٣٥ ــ ٤٥	١٥	(٣٥+٤٥)÷٢=٤٠	٦٠٠ =١٥×٤٠	٥ =٣٥-٤٠	٢٥	٣٧٥ =١٥×٢٥
٤٥ ــ ٥٥	١٧	(٤٥+٥٥)÷٢=٥٠	٨٥٠ =١٧×٥٠	١٥ =٣٥-٥٠	٢٢٥	٣٨٢٥ =١٧×٢٢٥
مجموع التكرارات (n)	٦٠		٢١٠٠			

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{h}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 f_i}{n-1}$$

$$S^2=\frac{9700}{60-1}=\frac{9700}{59}=164.4$$

تطبيقات على المدى والتباين للتوزيع التكراري:

مثال (٣): للتوزيع التكراري التالي احسب:

١. المدى.
٢. التباين.

الفئات	التكرار
٣ ــ ٩	١١
٩ ــ ١٥	١٢
١٥ ــ ٢١	٢٠
١٢ ــ ٢٧	١٠
٢٧ ــ ٣٣	٧
مجموع التكرارات (n)	٦٠

حل المثال (٣):

المدى = الحد الاعلى للفئة العليا ــ الحد الادنى للفئة الدنيا
المدى = ٣٣ ــ ٣ = ٣٠

١- نحسب مراكز الفئات للتوزيع التكراري $Xi=\frac{(L+U)}{2}$

الفئات	التكرار	الفئات
٣ ــ ٩	١١	(٣+٩)÷٢=٦
٩ ــ ١٥	١٢	(٩+١٥)÷٢=١٢
١٥ ــ ٢١	٢٠	(١٥+٢١)÷٢=١٨
١٢ ــ ٢٧	١٠	(٢١+٢٧)÷٢=٢٤
٢٧ ــ ٣٣	٧	(٢٧+٣٣)÷٢=٣٠
مجموع التكرارات (n)	٦٠	

٢- لحساب الوسط الحسابي نحسب : $\sum Xi\,Fi$

الفئات	التكرار	الفئات	التكرار
٣ ــ ٩	١١	(٣+٩)÷٢=٦	١١×٦=٦٦
٩ ــ ١٥	١٢	(٩+١٥)÷٢=١٢	١٢×١٢=١٤٤
١٥ ــ ٢١	٢٠	(١٥+٢١)÷٢=١٨	١٨×٢٠=٣٦٠
١٢ ــ ٢٧	١٠	(٢١+٢٧)÷٢=٢٤	٢٤×١٠=٢٤٠
٢٧ ــ ٣٣	٧	(٢٧+٣٣)÷٢=٣٠	٣٠×٧=٢١٠
مجموع التكرارات (n)	٦٠		١٠٢٠

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{h}X_i f_i}{n}$$
$$=\frac{1020}{60}=17$$

٣- نحسب انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الحسابي: $(X_i - \overline{X})$

الفئات	التكرار	الفئات	التكرار	الفئات
٣ – ٩	١١	(٣+٩)÷٢=٦	١١×٦=٦٦	٦-١٧= -١١
٩ – ١٥	١٢	(٩+١٥)÷٢=١٢	١٢×١٢=١٤٤	١٢-١٧= -٥
١٥ – ٢١	٢٠	(١٥+٢١)÷٢=١٨	١٨×٢٠=٣٦٠	١٨-١٧= ١
١٢ – ٢٧	١٠	(٢١+٢٧)÷٢=٢٤	٢٤×١٠=٢٤٠	٢٤-١٧= ٧
٢٧ – ٣٣	٧	(٢٧+٣٣)÷٢=٣٠	٣٠×٧=٢١٠	٣٠-١٧= ١٣
مجموع التكرارات (n)	٦٠		١٠٢٠	

٤- نحسب: $\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

الفئات	التكرار	الفئات	التكرار	مراكز الفئات	$X_i f_i$
٣ – ٩	١١	(٣+٩)÷٢=٦	١١×٦=٦٦	٦-١٧= -١١	١٢١
٩ – ١٥	١٢	(٩+١٥)÷٢=١٢	١٢×١٢=١٤٤	١٢-١٧= -٥	٢٥
١٥ – ٢١	٢٠	(١٥+٢١)÷٢=١٨	١٨×٢٠=٣٦٠	١٨-١٧= ١	١
١٢ – ٢٧	١٠	(٢١+٢٧)÷٢=٢٤	٢٤×١٠=٢٤٠	٢٤-١٧= ٧	٤٩
٢٧ – ٣٣	٧	(٢٧+٣٣)÷٢=٣٠	٣٠×٧=٢١٠	٣٠-١٧= ١٣	١٦٩
مجموع التكرارات (n)	٦٠		١٠٢٠		

٥- نحسب: $\left(X_i - \overline{X}\right)^2 f_i$

الفئات	التكرار	الفئات	التكرار	مراكز الفئات	$X_i f_i$	$X_i - \overline{X}$
٣ – ٩	١١	(٣+٩)÷٢=٦	١١×٦=٦٦	٦-١٧= -١١	١٢١	١٢١×١١= ١٣٣١
٩ – ١٥	١٢	(٩+١٥)÷٢=١٢	١٢×١٢=١٤٤	١٢-١٧= -٥	٢٥	٢٥×١٢= ٣٠
١٥ – ٢١	٢٠	(١٥+٢١)÷٢=١٨	١٨×٢٠=٣٦٠	١٨-١٧= ١	١	١×٢٠=٢٠
١٢ – ٢٧	١٠	(٢١+٢٧)÷٢=٢٤	٢٤×١٠=٢٤٠	٢٤-١٧= ٧	٤٩	٤٩×١٠=٤٩٠
٢٧ – ٣٣	٧	(٢٧+٣٣)÷٢=٣٠	٣٠×٧=٢١٠	٣٠-١٧= ١٣	١٦٩	١٦٩×٧=١١٨٣
مجموع التكرارات (n)	٦٠		١٠٢٠			٣٣٢٤

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{h} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 f_i}{n-1}$$

$$S^2 = \frac{3324}{60-1} = \frac{3324}{59} = 56.34$$

انتهى

المحاضره العاشره

مقاييس التشتت للتوزيعات التكرارية (الانحرف المعياري)

اهداف المحاضره:

- تعريف الانحراف المعياري للتوزيع التكراري.
- حساب الانحراف المعياري للتوزيع التكراري.
- تعريف النظرية (١) للتوزيع التكراري.
- استخدام النظرية (١) لحساب التباين والانحراف المعياري للتوزيع التكراري.

الانحراف المعياري للتوزيع التكراري:

تعريف: اذا كانت مراكز فئات توزيع تكراري هي $X_1, X_2, ..., X_h$ وكانت التكرارات المقابلة لها $f_1, f_2, ..., f_h$

فأن الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{h}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 f_i}{n-1}}$$

حيث ان:

$\overline{X}$ = الوسط الحسابي للتوزيع التكراري.

n = مجموع التكرارات.

مثال (١): اذا كان $\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2 f_i =$ ١٧٢٥ $n =$ ٧٠ احسب الانحراف المعياري ؟

الحل :

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{h}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 f_i}{n-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{1725}{70-1}} = \sqrt{\frac{1725}{69}} = \sqrt{25} = 5$$

مثال (٢): اوجد الانحراف المعياري للتوزيع التكراري؟

الفئات	التكرار
٥ ـــ ١٥	٥
١٥ ـــ ٢٥	٧
٢٥ ـــ ٣٥	٩
٣٥ ـــ ٤٥	١٣
٤٥ ـــ ٥٥	٦
مجموع التكرارات (n)	٤٠

١- نحسب مراكز الفئات للتوزيع التكراري $Xi = \frac{(L+U)}{2}$

الفئات	التكرار	الفئات
٥ ــ ١٥	٥	(٥+١٥)÷٢=١٠
١٥ ــ ٢٥	٧	(١٥+٢٥)÷٢=٢٠
٢٥ ــ ٣٥	٩	(٢٥+٣٥)÷٢=٣٠
٣٥ ــ ٤٥	١٣	(٣٥+٤٥)÷٢=٤٠
٤٥ ــ ٥٥	٦	(٤٥+٥٥)÷٢=٥٠
مجموع التكرارات (n)	٤٠	

٢- لحساب الوسط الحسابي نحسب : $\sum Xi\, Fi$

الفئات	التكرار	الفئات	التكرار
٥ ــ ١٥	٥	(٥+١٥)÷٢=١٠	١٠×٥= ٥٠
١٥ ــ ٢٥	٧	(١٥+٢٥)÷٢=٢٠	٢٠×٧= ١٤٠
٢٥ ــ ٣٥	٩	(٢٥+٣٥)÷٢=٣٠	٣٠×٩= ٢٧٠
٣٥ ــ ٤٥	١٣	(٣٥+٤٥)÷٢=٤٠	٤٠×١٣= ٥٢٠
٤٥ ــ ٥٥	٦	(٤٥+٥٥)÷٢=٥٠	٥٠×٦= ٣٠٠
مجموع التكرارات (n)	٤٠		١٢٨٠

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{h} X_i f_i}{n}$$

$$= \frac{1280}{40} = 32$$

٣- نحسب انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الحسابي: $(X_i - \overline{X})$

الفئات	التكرار	الفئات	التكرار	مراكز الفئات
٥ ــ ١٥	٥	(٥+١٥)÷٢=١٠	١٠×٥= ٥٠	١٠-٣٢= ٢٢
١٥ ــ ٢٥	٧	(١٥+٢٥)÷٢=٢٠	٢٠×٧= ١٤٠	٢٠-٣٢= -١٢
٢٥ ــ ٣٥	٩	(٢٥+٣٥)÷٢=٣٠	٣٠×٩= ٢٧٠	٣٠-٣٢= -٢
٣٥ ــ ٤٥	١٣	(٣٥+٤٥)÷٢=٤٠	٤٠×١٣= ٥٢٠	٤٠-٣٢= ٨
٤٥ ــ ٥٥	٦	(٤٥+٥٥)÷٢=٥٠	٥٠×٦= ٣٠٠	٥٠-٣٢= ١٨
مجموع التكرارات (n)	٤٠		١٢٨٠	

٤- نحسب: $\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

الفئات	التكرار	الفئات	التكرار	مراكز الفئات	$X_i f_i$
٥ ــ ١٥	٥	(٥+١٥)÷٢=١٠	١٠×٥= ٥٠	١٠-٣٢= ٢٢	٤٨٤
١٥ ــ ٢٥	٧	(١٥+٢٥)÷٢=٢٠	٢٠×٧= ١٤٠	٢٠-٣٢= -١٢	١٤٤
٢٥ ــ ٣٥	٩	(٢٥+٣٥)÷٢=٣٠	٣٠×٩= ٢٧٠	٣٠-٣٢= -٢	٤
٣٥ ــ ٤٥	١٣	(٣٥+٤٥)÷٢=٤٠	٤٠×١٣= ٥٢٠	٤٠-٣٢= ٨	٦٤
٤٥ ــ ٥٥	٦	(٤٥+٥٥)÷٢=٥٠	٥٠×٦= ٣٠٠	٥٠-٣٢= ١٨	٣٢٤
مجموع التكرارات (n)	٤٠		١٢٨٠		

٥- نحسب: $\left(X_i-\overline{X}\right)^2 f_i$

الفئات	التكرار	الفئات	التكرار	مراكز الفئات	$X_i f_i$	$X_i-\overline{X}$
٥ ــ ١٥	٥	(٥+١٥)÷٢=١٠	١٠×٥= ٥٠	١٠-٣٢= ٢٢	٤٨٤	٤٨٤×٥= ٢٤٢٠
١٥ ــ ٢٥	٧	(١٥+٢٥)÷٢=٢٠	٢٠×٧= ١٤٠	٢٠-٣٢= -١٢	١٤٤	١٤٤×٧= ١٠٠٨
٢٥ ــ ٣٥	٩	(٢٥+٣٥)÷٢=٣٠	٣٠×٩= ٢٧٠	٣٠-٣٢= -٢	٤	٤×٩= ٣٦
٣٥ ــ ٤٥	١٣	(٣٥+٤٥)÷٢=٤٠	٤٠×١٣= ٥٢٠	٤٠-٣٢= ٨	٦٤	٦٤×١٣= ٨٣٢
٤٥ ــ ٥٥	٦	(٤٥+٥٥)÷٢=٥٠	٥٠×٦= ٣٠٠	٥٠-٣٢= ١٨	٣٢٤	٣٢٤×٦= ١٩٤٤
مجموع التكرارات (n)	٤٠		١٢٨٠			٦٢٤٠

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{h}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 f_i}{n-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{6240}{40-1}}=\sqrt{\frac{6240}{39}}=\sqrt{160}=12.65$$

النظرية (١):

التباين للتوزيع التكراري ذي فئات $S^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum X_i^2 f_i-n\overline{X}^2\right]$

حيث ان:

$\overline{X}$ = الوسط الحسابي للتوزيع التكراري.

n = مجموع التكرارات.

مثال (٣): باستخدام النظرية (١) للتوزيع التكراري اوجد الانحراف المعياري ؟

الفئات	التكرار
٥ ــ ١٥	٥
١٥ ــ ٢٥	٧
٢٥ ــ ٣٥	٩
٣٥ ــ ٤٥	١٣
٤٥ ــ ٥٥	٦
مجموع التكرارات (n)	٤٠

١- نحسب مراكز الفئات للتوزيع التكراري $Xi=\frac{(L+U)}{2}$

الفئات	التكرار	الفئات
٥ ــ ١٥	٥	(٥+١٥)÷٢=١٠
١٥ ــ ٢٥	٧	(١٥+٢٥)÷٢=٢٠
٢٥ ــ ٣٥	٩	(٢٥+٣٥)÷٢=٣٠
٣٥ ــ ٤٥	١٣	(٣٥+٤٥)÷٢=٤٠
٤٥ ــ ٥٥	٦	(٤٥+٥٥)÷٢=٥٠
مجموع التكرارات (n)	٤٠	

٢- لحساب الوسط الحسابي نحسب : $\sum Xi\ Fi$

الفئات	التكرار	الفئات	التكرار
٥ ــ ١٥	٥	١٠=٢÷(١٥+٥)	٥٠ =٥×١٠
١٥ ــ ٢٥	٧	٢٠=٢÷(٢٥+١٥)	١٤٠ =٧×٢٠
٢٥ ــ ٣٥	٩	٣٠=٢÷(٣٥+٢٥)	٢٧٠ =٩×٣٠
٣٥ ــ ٤٥	١٣	٤٠=٢÷(٤٥+٣٥)	٥٢٠ =١٣×٤٠
٤٥ ــ ٥٥	٦	٥٠=٢÷(٥٥+٤٥)	٣٠٠ =٦×٥٠
مجموع التكرارات (n)	٤٠		١٢٨٠

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{h} X_i f_i}{n}$$
$$= \frac{1280}{40} = 32$$

٣- نحسب: $X_i^{\ 2}$

الفئات	التكرار	الفئات	التكرار	X_i
٥ ــ ١٥	٥	١٠=٢÷(١٥+٥)	٥٠ =٥×١٠	١٠٠
١٥ ــ ٢٥	٧	٢٠=٢÷(٢٥+١٥)	١٤٠ =٧×٢٠	٤٠٠
٢٥ ــ ٣٥	٩	٣٠=٢÷(٣٥+٢٥)	٢٧٠ =٩×٣٠	٩٠٠
٣٥ ــ ٤٥	١٣	٤٠=٢÷(٤٥+٣٥)	٥٢٠ =١٣×٤٠	١٦٠٠
٤٥ ــ ٥٥	٦	٥٠=٢÷(٥٥+٤٥)	٣٠٠ =٦×٥٠	٢٥٠٠
مجموع التكرارات (n)	٤٠		١٢٨٠	

٤- نحسب: $X_i^{\ 2} f_i$

الفئات	التكرار	الفئات	التكرار	X_i	$X_i\ f_i$
٥ ــ ١٥	٥	١٠=٢÷(١٥+٥)	٥٠ =٥×١٠	١٠٠	٥٠٠ =٥×١٠٠
١٥ ــ ٢٥	٧	٢٠=٢÷(٢٥+١٥)	١٤٠ =٧×٢٠	٤٠٠	٢٨٠٠ =٧×٤٠٠
٢٥ ــ ٣٥	٩	٣٠=٢÷(٣٥+٢٥)	٢٧٠ =٩×٣٠	٩٠٠	٨١٠٠ =٩×٩٠٠
٣٥ ــ ٤٥	١٣	٤٠=٢÷(٤٥+٣٥)	٥٢٠ =١٣×٤٠	١٦٠٠	٢٠٨٠٠ =١٣×١٦٠٠
٤٥ ــ ٥٥	٦	٥٠=٢÷(٥٥+٤٥)	٣٠٠ =٦×٥٠	٢٥٠٠	١٥٠٠٠ =٦×٢٥٠٠
مجموع التكرارات (n)	٤٠		١٢٨٠		٤٧٢٠٠

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum X_i^2 f_i - n\overline{X}^2\right]$$
$$= \frac{1}{40-1}\left[47200 - 40\times 32^2\right]$$
$$= \frac{1}{39}\times 6240 = 160$$
$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{160} = 12.65$$

اذا كان: $n = 50 \qquad \overline{X} = 24 \qquad \sum X_i^2 f_i = 30564$

اوجد:

- التباين.
- الانحراف المعياري.

انتهى