الباب الأول: مجموعات الأعداد

١- مفهوم المجموعة:

- يعتبر مفهوم المجموعة من أهم المفاهيم الأساسية في علم الرياضيات. والمجموعة هي عبارة عن تجمع من الأشياء أو العناصر المحددة تماما. تكتب عناصر أي مجموعة داخل قوسين على الشكل التالي {   }، ويرمز للمجموعة بأحد الحروف العربية س، ص، ع، ...

ومثال على ذلك، يمكن التعبير عن مجموعة الاعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥ على النحو الآتي:

س = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥ }

- يمكن التعبير عن عناصر المجموعات بأحد الطريقتين التاليتين:

أ- ذكر العناصر: وهي الطريقة التي يتم فيها سرد جميع عناصر المجموعة بين القوسين {   } كما في المثال السابق.

ب- طريقة الوصف (القانون): وتتم من خلال ذكر الخاصية أو الصفة التي تميز عناصر هذه المجموعة، ففي المثال السابق يمكن التعبير عن مجموعة الأعداد الصحيحة من ١ إلى ٥ على الصورة التالية:

س = { س: س عدد صحيح أكبر من أو يساوي ١ وأقل من أو يساوي ٥ }

٢- مجموعات الأعداد:

سنتعرف في هذا البند على بعض من مجموعات الأعداد الشهيرة ومنها:

أ- مجموعة الاعداد الطبيعية (الاعداد الموجبة):

ويرمز لها بالرمز ط وتكتب على النحو الآتي:

ط = { ١، ٢، ٣، ... }

ب - مجموعة الأعداد الصحيحة:

ويرمز لها بالرمز ص وتكتب على النحو الآتي:

ص = { ...، -٣، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣، ... }

جـ - مجموعة الأعداد النسبية:

ويرمز لها بالرمز ن وهي جميع الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ حيث ب

لا تساوي صفر، أ، ب عددان حقيقيان، ومن الأمثلة على ذلك $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{-١}{٥}$.

د ـ مجموعة الأعداد غير النسبية:

ورمزها نَ وهي جميع الاعداد التي لا يمكن كتابتها على شكل عدد نسبي،
زمن الأمثلة عليها $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٥}$.

هـ - مجموعة الأعداد الحقيقية:

ورمزها ح وهي المجموعة التي تحتوي جميع الأعداد في المجموعات سابقة الذكر.

المحاضرة المسجلة الثانية

محاضرة يوم الثلاثاء من الاسبوع الاول

- بعض التعريفات حول المجموعة :-

① المجموعة الجزئية :-

نقول بأن المجموعة م هي مجموعة جزئية من ب اذا كان كل عنصر موجود في م موجود أيضاً في ب .

مثلاً إذا كانت

م = {١ ، ٣ ، ٥} .

ب = {س : س عدد صحيح} .

نقول أن م ⊂ ب .

ونلاحظ أيضاً إذا كان لدينا المجموعة

جـ = {$\frac{1}{2}$ ، ١ ، ٥} .

نقول بأن جـ ⊄ ب (جـ ليست مجموعة جزئية من ب) .

② المجموعة الكلية :-

ورمزها ك ، وهي عبارة عن المجموعة التي تضم جميع المجموعات الجزئية قيد الدراسة .

ملاحظة : اذا لم المجموعة الكلية في مسألة ما، نعتبر ~~المجموعة~~ مجموعة الاعداد الحقيقية هي المجموعة الكلية .

٤) المجموعة الخالية: ويرمز لها بالرمز ϕ أو { } .
وهي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر.

- ملاحظة: اذا كانت لدينا المجموعة

أ = {٥، ٧، ٩} ، ب = {٣، ٥، ٧، ٩، ١١}

فنقول بأن العنصر ٥ ∈ أ ، أما العنصر ١١ ∉ أ.
(عملية الانتماء تكون بين عنصر ومجموعة).

اما عملية الاحتواء فتكون بين مجموعة واخرى.
فنقول بأن المجموعة أ ⊂ المجموعة ب.

أ ⊅ ب.

- ملاحظة: تساوي مجموعتين مثل أ، ب إذا تساوت جميع العناصر في المجموعتين.

مثال: إذا كانت

أ = {١، ٢، ٣، ٤} ، ب = {١، ٤، ٣، ٢}

فنقول بأن أ = ب.

٥ العمليات الجبرية على المجموعات :

١) عملية الاتحاد :

تعريف: إذا كانت أ، ب أي مجموعتين في ك فإن اتحاد أ مع ب هو جميع العناصر الموجودة في أ أو الموجودة في ب .

بالرموز :- أ ∪ ب = {س : س ∈ أ أو س ∈ ب}

مثال: إذا كانت

أ = {٣، ٤، ٥} .

ب = {٣، ٧، ٩} .

فإن ناتج عملية اتحاد أ مع ب هي :-

أ ∪ ب = {٣، ٤، ٥، ٧، ٩} .

٢) عملية التقاطع :

تعريف: إذا كانت أ، ب مجموعتين في ك، فإن تقاطع أ مع ب هو جميع العناصر الموجودة في أ والموجودة في ب (العناصر المشتركة لكلا المجموعتين).

بالرموز: أ ∩ ب = {س : س ∈ أ و س ∈ ب} .

وبالرجوع إلى المثال السابق نلاحظ أن أ ∩ ب = {٣} .

٣ المكملة (المتممة) للمجموعة .

تعريف : إذا كان لدينا المجموعة الجزئية أ في ك ، فإن متممة المجموعة أ ويرمز لها بالرمز $\overline{\text{أ}}$ هي جميع العناصر التي تنتمي الى ك ولا تنتمي إلى أ .

بالرموز : $\overline{\text{أ}} = \{ \text{س} : \text{س} \in \text{ك} \text{ و } \text{س} \notin \text{أ} \}$.

مثال : إذا كانت ك = {١، ٢، ٣، ـــ ، ١٠}

وكانت أ = {١، ٣، ٥، ٧، ٩} ⟸ الأعداد الفردية من ك ،

مجموعة جزئية من ك فإن

$\overline{\text{أ}}$ = {٢، ٤، ٦، ٨، ١٠} ⟸ الأعداد الزوجية من ك

ويمكن التحقق من أن أ $\cup$ $\overline{\text{أ}}$ = ك .

أ $\cap$ $\overline{\text{أ}}$ = ϕ .

(عملية اتحاد اي مجموعة مع متممتها يعطينا المجموعة الكلية ك)

(عملية تقاطع اي مجموعة مع متممتها يعطينا المجموعة الخالية ϕ)

٤ الفرق بين مجموعتين :

تعريف : اذا كان لدينا المجموعتين أ ، ب فإن الفرق بينهما هو جميع العناصر التي تنتمي الى أ ولا تنتمي الى ب .

بالرموز : $\text{أ} - \text{ب} = \{ \text{س} : \text{س} \in \text{أ} \text{ و } \text{س} \notin \text{ب} \}$.

مثال ، اذا كانت

ك = {س : س عدد صحيح موجب أقل من العدد ١٠} .

أ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} .

ب = {٥، ٦، ٧، ٨}

حيث كانت أ ، ب مجموعات جزئية من ك ، فإن

١) ك − أ =

٢) ك − ب =

٣) أ − ب =

٤) ب − أ =

٥) أ − ك =

الحل : ك = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩} .

أ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} .

ب = {٥، ٦، ٧، ٨} .

١) ك − أ = {٦، ٧، ٨، ٩} .

٢) ك − ب = {١، ٢، ٣، ٤، ٩}

٣) أ − ب = {١، ٢، ٣، ٤} .

٤) ب − أ = {٦، ٧، ٨} .

٥) أ − ك = ϕ .

مثال :- اذا كانت

$ك = \{١، ٢، ٣، ٤، \ldots ، ١٠\}$.

$أ = \{س : س \text{ عدد فردي}\} = \{١، ٣، ٥، ٧، ٩\}$

$ب = \{ص : ص \text{ عدد زوجي}\} = \{٢، ٤، ٦، ٨، ١٠\}$

حيث $أ، ب \subset ك$ ، اجب عن الأسئلة التالية :

① $أ \cup ب = ك$.

② $أ \cap ب = \phi$.

③ $\overline{أ} \cup ب = ب \cup ب = ب$.

④ $\overline{أ} \cap \overline{ب} = ب \cap أ = \phi$.

⑤ $أ - ب = أ$.

⑥ $ب - أ = ب$.

⑦ $ك \cap أ = أ$.

⑧ $ك \cup ب = ك$.

⑨ $\overline{ك} = \phi$.

⑩ $\overline{\phi} = ك$.

$\overline{ك} = \phi$

$\overline{\phi} = ك$.

$أ \cap ك = أ$

$أ \cup ك = ك$.

$ك - أ = \overline{أ}$

$أ - ك = \phi$

أنهينا الباب الأول لمقرر مبادئ الرياضيات

نهاية المحاضرة الثانية من الأسبوع الأول .

الباب الثاني :- المفاهيم الأساسية في الجبر .

في العادة، توجد لدينا اربع عمليات اساسية في الجبر وهي

① الجمع ، ② الطرح ، ③ الضرب ، ④ القسمة .

أولاً :- سنتعرف على كيفية اجراء العمليات الجبرية الأربع في الاعداد الحقيقية :-

① مثال : اذا كان لدينا العددين ٣ ، ٥-

فإننا نجري عملية الجمع في النحو الآتي :-

٣ + (٥-) = ٢-

(اذا كانت الاشارات مختلفة في عملية الجمع فإننا نأخذ الفرق بينهما مع وضع اشارة العدد الأكبر)

وكذلك نقول بأن :-

٣- + ٥ = ٢ .

أما اذا كان لدينا العددين ٣- ، ٥-

فإننا نجري عملية الجمع على النحو الآتي :-

٣- + ٥- = ٨-

(اذا كانت الاشارات متشابهة لكلا العددين، فإننا نجمع العددين مع وضع الاشارة نفسها) .

وكذلك نقول بأن :-

٣ + ٥ = ٨ .

٢) عملية الطرح :-

يمكن النظر الى عملية الطرح بأنها شبيهة بعملية الجمع وبذلك يمكن تطبيق القواعد السابقة على عملية الطرح .

مثال :- إذا اردنا أن نجد الفرق بين العددين ٢ ، ٥ فنقول بأن :-

٢ − ٥ = ٢ + (−٥) = −٣

وكذلك

−٣ − ٥ = −٣ + (−٥) = −٨ .

وكذلك

−٤ − ٩ = −٤ + (−٩) = −١٣ .

وكذلك

−٣ − (−٢) = −٣ + (+٢) = −١

* يمكن استنتاج أن عملية الجمع والطرح هي عملية واحدة تسمى عملية الجمع الجبري .

٣) عملية الضرب :-

مثال :- اذا كان لدينا العددين -٣ ، ٥

فإن حاصل ضربهما هو $-٣ \times ٥ = -١٥$

(نلاحظ أنه عند ضرب عددين مختلفين في الإشارة ، فإن الناتج هو حاصل ضربهما مع وضع إشارة العدد السالب)

وكذلك $٣ \times -٥ = -١٥$.

أما اذا كان لدينا العددين ٢ ، ٥ أو -٢ ، -٥

فإن حاصل الضرب هو :-

$$٢ \times ٥ = ١٠$$

$$-٢ \times -٥ = ١٠$$

(نجد أنه عند ضرب عددين متشابهين في الإشارة فإن الناتج هو حاصل ضربهما مع وضع إشارة الموجب)

٤) عملية القسمة :-

اذا اردنا تقسيم العددين ١٥ ، ٣ فإنه يمكن كتابة الناتج في الصورة التالية :-

تحويل القسمة إلى ضرب

$$١٥ \div ٣ = \frac{١٥}{١} \times \frac{١}{٣} = \frac{١٥}{٣} = ٥$$

مقلوب

(نجد أنه يمكن تحويل عملية القسمة الى عملية ضرب العدد الأول في مقلوب العدد الثاني)

مثال :- أوجد ناتج المقادير التالية :-

١) -٢٠ ÷ ٤ = -٢٠ × ١/٤ = -٢٠/٤ = -٥

٢) ٢٠ ÷ -٤ = ٢٠ × -١/٤ = -٢٠/٤ = -٥ .

٣) -٢٠ ÷ -٤ = -٢٠ × -١/٤ = ٢٠/٤ = ٥ .

النتيجة :- نلاحظ أن عملية الضرب والقسمة هي عملية واحدة بحيث نحول عملية القسمة الى ضرب مع تطبيق قواعد الضرب عليها) .

- بعض الملاحظات على الأولويات عند ايجاد ناتج مقدار عددي :

اذا اردنا ان نجد ناتج المقادير التالية :-

١) -٢ + ٥ × -٣ = -٢ + (-١٥) = -١٧

٢) (-٢ + ٥) × -٣ = (٣) × -٣ = -٩

٣) ١٠ ÷ ٢ - ٥ = ٥ - ٥ = صفر .

٤) ٣ × -٣ + ٢ ÷ (١ - ٥) = ٣ × -٣ + ٢ ÷ (-٤)

= -٩ + -٢/٤

= -٩×٢/١×٢ + -١×١/٢×١ = -١٨/٢ + -١/٢

= -١٩/٢ .

الاستنتاج :

دائماً الاولوية للعمليات الجبرية ع الاعداد الحقيقية ع النحو الآتي :

① في حال وجود الاقواس ، فإننا نجري العمليات داخل هذه الاقواس.

② تكون الاولوية لعمليتي الضرب والقسمة .

③ آخر الاولويات لعمليتي الجمع والطرح .

مثال : اوجد ناتج المقادير التالية بابسط صورة :

① $^{-}٩ \div ٣ \times ٢ = {}^{-}٣ \times ٢ = {}^{-}٦$

② $({}^{-}٩ \div ٣) \times ٢ = {}^{-}٣ \times ٢ = {}^{-}٦$

③ $({}^{-}٩ - ٣) + ٢ \times ٣ = {}^{-}١٢ + ٦ = {}^{-}٦$

ملاحظة :-

١) عند ضرب عدد كسري فإننا نضرب البسط ع البسط عموديًا ع المقام في المقام .

مثال : $\frac{١}{٥} \times \frac{{}^{-}٣}{٤} = \frac{{}^{-}٣}{٢٠}$.

٢) في حالة الجمع ، فإنه لابد من توحيد المقامات ثم اجراء عملية الجمع .

مثال : $\frac{١ \times ٤}{٥ \times ٤} + \frac{{}^{-}٣ \times ٥}{٤ \times ٥} = \frac{٤}{٢٠} + \frac{{}^{-}١٥}{٢٠} = \frac{{}^{-}١١}{٢٠}$.

نهاية محاضرة يوم الاحد
من الاسبوع الثاني

بداية محاضرة الاسبوع الثاني صباح يوم الثلاثاء

مثال: اذا اردنا ان نجد ناتج المقدار التالي :-

$$\frac{٢}{١٠} + \frac{٥}{١٠} = \frac{٢\times١}{٢\times٥} + \frac{١\times٥}{٢\times٥}$$

$$\frac{٧}{١٠} =$$

$$\frac{٤}{١٤} = \frac{٢}{١٤} - \frac{٦}{١٤} = \frac{١\times٢}{١\times١٤} - \frac{٣\times٢}{٧\times٢}$$

إذا النتيجة في حالة جمع وطرح الاعداد الكسرية، لابد من عملية توحيد المقامات أولاً باستخدام المضاعف المشترك الأصغر، وبعدها نقوم بجمع أو طرح البسط مع البسط محتوياً على المقام نفسه

مثال: لو اردنا ان نجد قسمة المقدار التالي :-

(نضرب البسط البسط ومقسوما المقام في المقام)

$$\frac{١}{٦} = \frac{\cancel{٦}}{\cancel{٣٦}_{٦}} = \frac{٢}{٩} \times \frac{٣}{٤}$$

لو اخذنا المثال السابق واجرينا عليه عملية القسمة

$$.\frac{٢٧}{٨} = \frac{٩}{٢} \times \frac{٣}{٤} = \frac{٢}{٩} \div \frac{٣}{٤}$$

(لابد من تحويل اشارة القسمة الى ضرب مع أخذ مقلوب الكسر الثاني)

خصائص الأعداد الحقيقية :-

إذا كان لدينا س، ص، ع ∈ ح فإن هذه الأعداد تحقق الخواص التالية :-

١) الخاصية التبديلية :-

عملية الجمع

س + ص = ص + س .

مثال : ٣ + ٥ = ٥ + ٣ = ٨ .

-٣ + ٥ = ٥ + -٣ = ٢ .

٢) الخاصية التجميعية :-

على عملية الجمع

(س + ص) + ع = س + (ص + ع)

مثال :-

(١٣ + -٥) + ٢ = ١٣ + (-٥ + ٢)

٨ + ٢ = ١٣ + (-٣)

١٠ = ١٠

على عملية الضرب

(٤ × ٥) × ٢ = ٤ × (٥ × ٢)

٢٠ × ٢ = ٤ × (١٠)

٤٠ = ٤٠

(س ص) ع = س (ص ع) .

③ خاصية التوزيع : (توزيع الضرب على الجمع)

س (ص + ع) = س ص + س ع .

مثال :- ٣$^{-}$ (٥ + ٢) = (٣$^{-}$ × ٥) + (٣$^{-}$ × ٢)

= ١٥$^{-}$ + ٦$^{-}$

= ٢١$^{-}$.

④ خاصية الاختصار (الحذف) :-

س + ص = س + ع ⟸ ص = ع

مثال :- ٣ + ٥$^{-}$ = ٣ + ع ⟸ ع = ٥$^{-}$

س ص = س ع ⟸ ص = ع .

مثال : ٣ × ٩ = ٣ × ص ⟸ ص = ٩

⑤ خاصية النظير :-

أ) نظير الجمع :-

س + (س$^{-}$) = (س$^{-}$) + س = صفر .

مثال :- ١٠ + ١٠$^{-}$ = ١٠$^{-}$ + ١٠ = صفر .

ب) نظير الضرب :-

$س \times \frac{1}{س} = \frac{1}{س} \times س = 1$ بشرط أن $س \neq$ صفر

$\frac{1}{س}$:- النظير الضربي للمتغير س. (مقلوب المتغير س)

مثال :- $-٣ \times \frac{1}{-٣} = 1$

٦) خاصية العوامل :-

إذا كانت $س ص =$ صفر $\Longleftrightarrow$ $س =$ صفر أو $ص =$ صفر

مثال :- $٥ س =$ صفر $\Longleftarrow$ $٥ \neq$ صفر
أو
$س =$ صفر

وكذلك

$-٣ س ص =$ صفر $\Longleftarrow$ $\frac{-٣ س}{-٣} = \frac{\text{صفر}}{-٣}$ $\Longleftarrow$ $س =$ صفر
أو
$ص =$ صفر

- سندرس ايضاً بعض من المفاهيم الأساسية في علم الرياضيات ومنها :-

١ الأسس والجذور .

٢ اللوغاريتمات .

٣ كثيرات الحدود .

بداية سنبدأ في مفهوم الأسس :-

الأسس :-

تعريف :- اذا كان م عدداً موجباً وكان س ، ص عددين حقيقيين ، فيمكن تعريف القواعد التالية في الأسس :-

١ $س^{م} = \underbrace{س \times س \times .... \times س}_{\text{م من المرات}}$ (م من المرات)

مثال :- $س^{٣} = س \times س \times س$.

حالة خاصة :- $س^{صفر} = ١$ ، $س \neq صفر$

$\boxed{٣}$ $\text{س}^{-\text{م}} = \frac{١}{\text{س}^{\text{م}}}$ ، $\text{س} \neq \text{صفر}$.

مثال :- $(٥)^{-٣} = \frac{١}{٥^{٣}} = \frac{١}{١٢٥}$.

مثال :- $\frac{١}{٢^{-٣}} = ٢^{٣} = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$.

$\boxed{٤}$ $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{-\text{م}} = \left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)^{\text{م}}$ ، $\text{س} \neq \text{صفر}$ ، $\text{ص} \neq \text{صفر}$

مثال :- $\left(\frac{٥}{٣}\right)^{-٢} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} = \frac{٣^{٢}}{٥^{٢}} = \frac{٩}{٢٥}$.

مفهوم الأسس :-

اذا كان س عدد حقيقي ، وكانت ن عدد صحيح فان

$س^م = س × س × ... × س$ (م مرات)

$س^{صفر} = 1$

$س^{-م} = \frac{1}{س^م}$.

$\left(\frac{س}{ص}\right)^{-م} = \left(\frac{ص}{س}\right)^م$.

خواص الأسس :-

اذا كانت س، ص ∈ ح ، وكان م، ن ∈ ص فإن

① $\underset{\text{الاساس}}{س}^{\overset{\text{الأس}}{م}} × س^ن = س^{م+ن}$ ،

مثال :-

$س^٣ × س^٥ = س^٨$.

$س^{-٣} × س^{-٥} = س^{-٨} = \frac{1}{س^٨}$.

$س^٣ × ص^٤$ (الناتج هو أبسط صورة)

$س^٣ × ص^٤ \neq (س ص)^٧$

٢) $\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن}$ ، حيث $س \neq$ صفر .

مثال :- $\frac{س^{٣}}{س^{٥}} = س^{٣-٥} = س^{-٢} = \frac{١}{س^{٢}}$.

اعادة كتابة المقدار بالصورة التالية :-

$$\frac{س^{٣}}{س^{٥}} = \frac{\cancel{س}\times\cancel{س}\times\cancel{س}}{س\times س\times\cancel{س}\times\cancel{س}\times\cancel{س}} = \frac{١}{س\times س} = \frac{١}{س^{٢}} .$$

مثال :- ١) $\frac{س^{-٣}}{س^{٥}} = س^{-٣-٥} = س^{-٨} = \frac{١}{س^{٨}}$.

$$\frac{س^{-٣}}{س^{٥}} = \frac{١}{س^{٥}س^{٣}} = \frac{١}{س^{٨}} .$$

٢) $\boxed{\frac{س^{-٣}}{س^{-٥}}}$

$$\frac{س^{-٣}}{س^{-٥}} = س^{-٣-(-٥)} = س^{-٣+٥} = س^{٢} .$$

أو استطيع حلها بطريقة أخرى :-

$$\frac{س^{-٣}}{س^{-٥}} = \frac{س^{٥}}{س^{٣}} = س^{٥-٣} = س^{٢} .$$

$\boxed{٣}$ $(س^م)^ن = س^{م ن}$.

مثال :- $(س^٣)^{-٢} = س^{-٦} = \frac{١}{س^٦}$ ⟸ ابسط صورة

$(س^{\frac{١}{٥}})^{١٠} = س^{\frac{١}{٥}×١٠} = س^{\frac{١٠}{٥}} = س^٢$.

$\boxed{٤}$ $(س ص)^م = س^م ص^م$.

مثال :- $(٥ص)^٢ = ٥^٢ × ص^٢$

$= ٢٥ ص^٢$ ،

مثال :- اذا اردنا ان نكتب المقدار التالي بابسط صورة

$(٤ س ص)^{-٢} = \frac{١}{(٤ س ص)^٢} = \frac{١}{١٦ س^٢ ص^٢}$.

$\boxed{٥}$ $(\frac{س}{ص})^م = \frac{س^م}{ص^م}$ ، ص ≠ صفر .

مثال : $(\frac{٢٥}{١٦})^٢ = \frac{(٢٥)^٢}{(١٦)^٢} = \frac{٦٢٥}{٢٥٦}$ ،

: $(\frac{س^{-٢}}{٥ ص^٣})^{-٣} = (\frac{٥ص^٣}{س^{-٢}})^٣ = (٥ص^٣ × س^٢)^٣$

$= (٥ س^٢ ص^٣)^٣$

$$\left(\text{٥}\,\text{س}^{\text{٢}}\,\text{ص}^{\text{٣}}\right)^{\text{٣}} = (\text{٥})^{\text{٣}}\,\text{س}^{\text{٦}}\,\text{ص}^{\text{٩}} .$$

مثال :- اوجد المقدار التالي بأبسط صورة :-

$$\left(\frac{\text{س}^{-\text{٢}}\,\text{ص}^{-\text{٣}}}{\text{٢}\,\text{ع}^{\text{٤}}}\right)^{\text{٣}} = \frac{\text{س}^{-\text{٦}}\,\text{ص}^{-\text{٩}}}{\text{٢}^{\text{٣}}\,\text{ع}^{\text{١٢}}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٨}\,\text{س}^{\text{٦}}\,\text{ص}^{\text{٩}}\,\text{ع}^{\text{١٢}}} .$$

نلحق محاضرة يوم
الثلاثاء من الاسبوع
الثاني

بداية محاضرة يوم الأحد
من الأسبوع الثالث

* الجذور :-

تعريف : إذا كان س ، ص $\in$ ح فإن العدد س يسمى الجذر النوني للعدد ص إذا كان :

$س^{ن} = ص$ حيث ن : عدد صحيح .

مثال : نقول بأن العدد ٥ هو الجذر التربيعي للعدد ٢٥

حيث $٥^{٢} = ٢٥$

وكذلك نقول بأن العدد ٣ هو الجذر التكعيبي للعدد ٢٧

حيث $٣^{٣} = ٢٧$

نلاحظ أنه في نظام الأعداد الحقيقية ما يلي :-

١) كل عدد موجب له جذران تربيعيان ، (أحدهما موجب والآخر سالب)

مثال :- $\sqrt{٢٥} = \pm ٥$.

٢) إذا كان العدد سالباً ، فليس له جذر تربيعي .

مثال :- $\sqrt{-٢٥}$ (ليس له جذور حقيقية) .

٣) إذا كان العدد سالباً ، فإن له جذر تكعيبي واحد فقط وإشارته سالبة .

مثال :- $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$ $(-٢٧ = -٣ \times -٣ \times -٢)$

تعريف :- اذا كانت $n \geq ٢$ ، حيث n عدد صحيح فأن

$\text{س}^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\text{س}}$ (اسم الجذر النوني للعدد س)

$\text{س} \in \text{ح}$.

الأس الكسري .

مثال :- يمكن كتابة كل من المقادير التالية على الصورة كما هو موضح في الأسفل :-

١) $(١٦)^{\frac{1}{٢}} = \sqrt{١٦} = \pm ٤$.

٢) $(٢٧)^{\frac{1}{٣}} = \sqrt[٣]{٢٧} = ٣$

٣) $(-٢٧)^{\frac{1}{٣}} = \sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$

٤) $(\frac{1}{٤})^{\frac{1}{٢}} = \sqrt{\frac{1}{٤}} = \pm \frac{1}{٢}$.

قواعد خاصة بالأسس الكسرية :

اذا كانت $\text{س} ، \text{ص} \in \text{ح}$ ، س ، ص اعداد موجبة ، ونفرض أن n ، م اعداد صحيحة فإن :

$\boxed{١}$ $\sqrt[n]{\text{س}^{n}} = \text{س}^{\frac{n}{n}} = \text{س}$.

$\boxed{٢}$ $\sqrt[n]{\text{س}^{\text{م}}} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{n}}$.

$\boxed{٣}$ $\sqrt[n]{\text{س ص}} = \sqrt[n]{\text{س}} \times \sqrt[n]{\text{ص}} = \text{س}^{\frac{1}{n}} \, \text{ص}^{\frac{1}{n}}$.

$\boxed{٤}$ $\sqrt[n]{\frac{\text{س}}{\text{ص}}} = \frac{\sqrt[n]{\text{س}}}{\sqrt[n]{\text{ص}}} = \frac{\text{س}^{\frac{1}{n}}}{\text{ص}^{\frac{1}{n}}}$ ، ص $\neq$ صفر .

مثال :- اكتب المقادير التالية من الصورة الجذرية الى الصورة الأسية بأبسط صورة :-

١) $\sqrt[5]{س^{5}} = س^{\frac{5}{5}} = س$.

٢) $\sqrt[4]{س^{2}} = س^{\frac{2}{4}} = س^{\frac{1}{2}} \longleftarrow \sqrt{س}$.

٣) $\sqrt[3]{س\,ص} = \sqrt[3]{س}\,\sqrt[3]{ص} = س^{\frac{1}{3}}\,ص^{\frac{1}{3}}$.

٤) $\sqrt{\frac{25}{س^{2}}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{س^{2}}} = \frac{\pm 5}{س}$. ($\sqrt{س^{2}} = (س^{2})^{\frac{1}{2}} = س^{\frac{2}{2}} = س^{1} = س$)

٥) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}س^{3}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \times \sqrt[3]{س^{3}}$

$= \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} \times \sqrt[3]{س^{3}}$

$= \frac{2}{3} \times س^{\frac{3}{3}} = \frac{2}{3}س$.

---

٢) اللوغاريتمات :-

نشأت فكرة مفهوم اللوغاريتمات عند محاولة إيجاد حل للمعادلة $س = ص^{م}$ بالنسبة للمجهول م .

~~[illegible]~~ فإذا كان كل من س، ص عددين موجبين، بحيث ص $\neq 1$ فإنه يوجد عدد حقيقي م بحيث $ص^{م} = س$ ويسمى العدد م لوغاريتم العدد س للأساس ص ويكتب بالصورة التالية:

$\text{لو}_{\text{ص}}\,\text{س} = \text{م}$.

وباختصار شديد، يمكن كتابة العلاقتين المعادلتين السابقتين كما يلي :

$$\boxed{\text{ص}^{\text{م}} = \text{س} \Longleftrightarrow \text{لو}_{\text{ص}}\,\text{س} = \text{م}}$$

، ص > صفر
ص ≠ ١
س > صفر

الأمثلة

$\boxed{١}$ اكتب المقادير التالية على الصورة الأسية :

أ) $\text{لو}_{١٠}\,١٠٠٠ = ٣ \Rightarrow ١٠^{٣} = ١٠٠٠$

ب) $\text{لو}_{٣}\,٩ = ٢ \Rightarrow ٣^{٢} = ٩$

ج) $\text{لو}_{٢٥}\,٥ = \frac{١}{٢} \Rightarrow (٢٥)^{\frac{١}{٢}} = ٥$

$\sqrt{٢٥} = ٥$

$\boxed{٢}$ حول المقادير التالية الى الصورة اللوغاريتمية :

أ) $(٨١)^{\frac{١}{٢}} = ٩ \Rightarrow \text{لو}_{٨١}\,٩ = \frac{١}{٢}$

ب) $\left(\frac{١}{٤}\right)^{٢} = \frac{١}{٨} \Rightarrow \text{لو}_{\frac{١}{٤}}\,\frac{١}{٨} = ٢$

ج) $(٥)^{٣} = ١٢٥ \Rightarrow \text{لو}_{٥}\,١٢٥ = ٣$

٣ اذا كان لدينا المقدار

$$\text{لو}\ ١٠٠٠ = م$$

، المطلوب هو ايجاد قيمة م ؟

الحل :- $(١٠)^{م} = ١٠٠٠ \Leftarrow \text{لو}_{١٠}\ ١٠٠٠ = م$

$$١٠^{٣} = (١٠)^{م} \Leftarrow$$

$$\boxed{م = ٣} \Leftarrow$$

٤ اذا كان لدينا المقدار

$$\text{لو}_{٩}\ س = ٢$$

، المطلوب هو ايجاد قيمة المتغير س ؟

الحل : $\boxed{س = ٨١} \Leftarrow س = ٩^{٢} \Leftarrow \text{لو}_{٩}\ س = ٢$

٥ اذا كان لدينا المقدار

$$\text{لو}_{ص}\ ٢٧ = ٣$$

، المطلوب هو ايجاد قيمة ص ؟

الحل :- $\overset{١ \leftrightarrow ٣}{٢٧ = ص^{٣}} \Leftarrow \text{لو}_{ص}\ ٢٧ = ٣$

$$(٣)^{٣} = ص^{٣} \Leftarrow$$

$$\boxed{ص = ٣} \Leftarrow$$

بشكل عام ، يوجد أساسان لها أهمية كبرى في التطبيقات :

أ) الأساس ١٠ (اللوغاريتم العادي أو العشري)

وهذا النوع من الأساس لا يكتب أسفل اللوغاريتم .

مثال :- لو ١٠٠ = ٢ ⇐ $\text{لو}_{١٠}\,١٠٠ = ٢$ ⇐ $١٠^{٢} = ١٠٠$ (log)

ب) الأساس للعدد e = هـ = ٢,٧١٨ (هـ : عدد ثابت)

ويسمى هذا النوع من اللوغاريتم الذي أساسه هـ باللوغاريتم الطبيعي . (ln)

- خواص اللوغاريتمات :-

١) $\text{لو}_{\text{م}}\,١ = \text{صفر}$ (م عدد حقيقي) ،

$\text{لو}_{١٠}\,١ = \text{صفر}$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}\,١ = \text{صفر}$.

٢) $\text{لو}_{\text{م}}\,\text{م} = ١$

$\text{لو}_{١٠}\,١٠ = ١$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} = ١$.

٣) $\text{لو}_{\text{م}}\,N^{\text{س}} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{م}}\,N$.

مثال : اوجد ناتج المقدار التالي بابسط صوره

$\text{لو}_{٥}\,٥^{\text{س}} = \text{س}\,\text{لو}_{٥}\,٥ = \text{س} \times ١ = \text{س}$

مثال :

لو١٠٠٠

ا) اكتب المقدار لو$_{١٠}$ ١٠٠٠ بأبسط صورة ؟

الحل :- لو$_{١٠}$ ١٠٠٠ = لو$_{١٠}$ ١٠^{٣} = ٣ لو$_{١٠}$ ١٠ = ٣ × ١ = ٣

④ لو$_{م}$ (س ص) = لو$_{م}$ س + لو$_{م}$ ص .

مثال :- جد قيمة المقدار لو ٥٠ بأبسط صورة ؟

الحل :- لو ٥٠ = لو(١٠ × ٥)

= لو$_{١٠}$ ١٠ + لو$_{١٠}$ ٥ = ١ + لو$_{١٠}$ ٥ .

⑤ لو$_{م}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{م}$ س − لو$_{م}$ ص .

مثال :- اكتب المقدار التالي بأبسط صورة :-

لو $\frac{١٠٠}{٢٠٠}$ ؟

الحل : لو $\frac{١٠٠}{٢٠٠}$ = لو١٠٠ − لو٢٠٠

= لو ١٠^{٢} − لو(٢ × ١٠٠)

= ٢ لو١٠ − (لو ٢ + لو١٠٠)

= ٢ × ١ − لو ٢ − لو ١٠^{٢}

= ٢ × ١ − لو ٢ − ٢ لو ١٠

= ٢ − لو ٢ − ٢ × ١

= $\cancel{٢}$ − لو ٢ − $\cancel{٢}$ = − لو ٢ .

مثال :- $\text{لو}_{\text{١٠}} (\text{س ص})^{\text{٢}}$ كتب هذا المقدار بأبسط صورة ؟

الحل :- $\text{لو}_{\text{١٠}}(\text{س ص})^{\text{٢}} = \text{٢ لو}_{\text{١٠}}(\text{س ص})$

$= \text{٢} (\text{لو}_{\text{١٠}} \text{س} + \text{لو}_{\text{١٠}} \text{ص})$

$= \text{٢ لو س} + \text{٢ لو ص}$.

فلو فرضنا أن قيمة

س = ١٠ ، ص = ١٠ فيصبح المقدار في ٤٧

ع النحو الآتي :-

$\text{٢ لو س} + \text{٢ لو ص} = \text{٢ لو ١٠} + \text{٢ لو ١٠}$

$= \text{٢} \times \text{١} + \text{٢ لو ١٠}^{\text{٢}}$

$= \text{٢} + \text{٤ لو ١٠} = \text{٢} + \text{٤} \times \text{١}$

$= \text{٦}$

#

٦) $\text{لو}_{\text{م}} \frac{\text{١}}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{م}} \text{س}^{-\text{١}} = -\text{لو}_{\text{م}} \text{س}$ ،

بمعنى $\text{لو}_{\text{م}} \frac{\text{١}}{\text{س}} = -\text{لو}_{\text{م}} \text{س}$.

مثال :- $\text{لو}_{\text{٥}} \frac{\text{١}}{\text{٥}} = -\text{لو}_{\text{٥}} \text{٥} = -\text{١}$ ،

مثال : $\text{لو} \frac{\text{١}}{\text{١٠٠٠}} = \text{لو ١٠٠٠}^{-\text{١}} = -\text{لو ١٠٠٠} = -\text{لو ١٠}^{\text{٣}}$

$= -\text{٣ لو ١٠}$

$= -\text{٣} \times \text{١} = -\text{٣}$

٧) $\text{لو}_{م}\sqrt[ن]{س} = \text{لو}_{م} س^{\frac{1}{ن}} = \frac{1}{ن}\,\text{لو}_{م} س \quad (٢ \leq ن)$.

مثال :- $\text{لو}_{٣}\sqrt[٣]{٢٧} = \text{لو}_{٣} ٢٧^{\frac{1}{٣}} = \frac{1}{٣}\,\text{لو}_{٣} ٢٧$

$= \frac{1}{٣}\,\text{لو}_{٣} ٣^{٣}$

$= \frac{1}{\cancel{٣}_{١}} \times \overset{١}{\cancel{٣}} \times \text{لو}_{٣} ٣$

$= ١ \times ١ \times ١ = ١$.

$\Downarrow$

$\text{لو}_{٣}\sqrt[٣]{٢٧} = \text{لو}_{٣} ٣$

$= ١$

#

جـ) كثيرات الحدود :

تعريف : ان كثيرة الحدود في متغير واحد هي عبارة عن تعبير جبري يكتب على الصورة التالية :-

$$أ_{ن} س^{ن} + أ_{ن-١} س^{ن-١} + ---- + أ_{١} س + أ_{صفر}$$

حيث $ن \geq$ صفر وعدد صحيح

$أ_{ن} ، أ_{ن-١} ، ---- ، أ_{١} ، أ_{٥}$ اعداد حقيقية .

الأمثلة :-

$س^{٥} - ص^{٣}$ (كثيرة حدود من الدرجة الخامسة)

$ع^{٢} - ٣ س^{٤}$ (كثيرة حدود من الدرجة الرابعة)

$س^{٣} - س^{صفر} = س^{٣} - ١$ (كثيرة حدود من الدرجة الثالثة)

$س^{صفر} = ١$ (كثيرة حدود من الدرجة الصفرية [illegible] عدد ثابت

(٣١)

نهاية المحاضرة ليوم الأحد من الاسبوع الثالث

بداية محاضرة يوم الثلاثاء
من الأسبوع الثالث

المقادير الجبرية والعمليات عليها :-

تعريف :- المقدار الجبري هو عبارة عن أي تركيبة من الرموز والاعداد المرتبطة فيما بينها عن طريق العمليات الجبرية الأساسية (الجمع، الطرح، الضرب، القسمة).

مثال : كل من المقادير التالية تمثل مقداراً جبرياً حيث :-

٢أ + ٥ب (يتكون من حدين)

٣س − ص (يتكون من حدين)

$(\text{س}^{2} - \text{ص}^{2})\,\text{ع}$. (يتكون من حدين)

$= \text{س}^{2}\text{ع} - \text{ص}^{2}\text{ع}$.

تعريف : أي مقدار جبري مكون من عدة اجزاء مفصولة باشارة الجمع أو الطرح يسمى مجموعاً جبرياً ويعتبر كل جزء منفصل حداً في المجموع.

مثال :- ٣ $(\underline{\underline{\text{س}^{2}}} - \underline{\underline{\text{٣ص}}} + \underline{\underline{\text{٥}}})$ (مقدار جبري مكون من ثلاثة حدود)

* العمليات الجبرية على المقادير الجبرية :-

[1] الجمع والطرح :

لجمع او طرح مقادير جبرية (كثيرات الحدود) ، فإننا نجمع المعاملات العددية للمتغيرات بعد ترتيب متغيرات كل مقدار وذلك باستخدام الطريقة الأفقية أو الرأسية (العمودية)

مثال :- اوجد ناتج جمع المقدارين

$$(٣س^٢ - ٢س + ٥) + (س^٢ + ٤س - ٩)$$

١- الطريقة الأفقية :-

$$(٣\underline{\underline{س^٢}} - \underline{٢س} + \underline{٥}) + (\underline{\underline{س^٢}} + \underline{٤س} - \underline{٩}) = ٤س^٢ + ٢س - ٤$$

٢- الطريقة العمودية :-

$$\begin{array}{rl} & ٣س^٢ - ٢س + ٥ \\ + & ١س^٢ + ٤س - ٩ \\ \hline & ٤س^٢ + ٢س - ٤ \end{array}$$

مثال :- اوجد ناتج مايلي :

(٣ س^{٢} − ٤ س ص + ص^{٢} + ٢ س) − (٥ س^{٢} − ٤ س ص + ص^{٢})

الطريقة الأفقية :-

(٣ س^{٢} − ٤ س ص + ص^{٢} + ٢ س) − (٥ س^{٢} − ٤ س ص + ص^{٢})

= −٢ س^{٢} + صفر + صفر + ٢ س = −٢ س^{٢} + ٢ س .

تغيير اشارة السالب الى موجب بالطريقة الافقية :-

(٣ س^{٢} − $\cancel{٤}$ س ص + $\cancel{ص^{٢}}$ + ٢ س) + (−٥ س^{٢} + $\cancel{٤}$ س ص − $\cancel{ص^{٢}}$)

= −٢ س^{٢} + ٢ س .

الطريقة العمودية :-

٣ س^{٢} − ٤ س ص + ص^{٢} + ٢ س

± −٥ س^{٢} ± ٤ س ص ∓ ص^{٢}

−٢ س^{٢} + صفر + صفر + ٢ س ⇐ −٢ س^{٢} + ٢ س

مثال :- أوجد ناتج طرح المقدارين

$(٣س^{٣} + ٥س^{٤} + ٢س\,ص + ع) - (س^{٥} + ٣س^{٢} - س^{٣})$

الحل:

$٥س^{٤} - ٣س^{٣} + ٢س\,ص + ع$

$\overset{+}{-}س^{٥} + صفر \overset{+}{-} \cancel{س^{٣}} + صفر + صفر + صفر \overset{-}{+} ٣س^{٢}$

$-س^{٥} + ٥س^{٤} - ٢س^{٣} + ٢س\,ص + ع - ٣س^{٢}$.

* * * * * * *

$\boxed{٤}$ حاصل ضرب كثيرات الحدود (المقادير الجبرية):

لإيجاد حاصل ضرب كثيرات حدود فإننا نستخدم قوانين التوزيع وقوانين الأسس مع قاعدة الإشارات ثم نجمع الحدود المتشابهة.

مثال: أن نجد ناتج عملية ضرب المقدارين

$(\underset{\approx}{٢س^{٢}} - \underline{\underline{٣}})(٣س^{٢} - ٢س + ٤)$

الحل باستخدام الطريقة الأفقية:

$= ٢س^{٢}(٣س^{٢} - ٢س + ٤) + -٣(٣س^{٢} - ٢س + ٤)$

$= ٦س^{٤} - ٤س^{٣} + \underline{\underline{٨س^{٢}}} - \underline{\underline{٩س^{٢}}} + ٦س - ١٢$

$= ٦س^{٤} - ٤س^{٣} - س^{٢} + ٦س - ١٢$.

الحل باستخدام الطريقة العمودية :

$$٣س^{٢} - ٢س + ٤$$
$$\times \quad ٢س^{٢} - ٣$$

$$٦س^{٤} - ٤س^{٣} + ٨س^{٢}$$
$$+ \quad -٩س^{٢} + ٦س - ١٢$$

$$٦س^{٤} - ٤س^{٣} - س^{٢} + ٦س - ١٢$$

في المثالين السابقين فإننا قد اتبعنا الخطوات التالية لإيجاد ناتج ضرب مقدارين جبريين :-

1. قمنا بترتيب كل حد في صف بأكبر أس للمتغير .
2. نقوم بضرب كل حد في المقدار الثاني بجميع حدود المقدار الأول .
3. نقوم بعملية تجميع لمعاملات الحدود المتشابهة .

مثال :- اوجد ناتج المقدار التالي

$(س^{٣} - ١)(س^{٢} - ٥س + ٥)$ بأبسط صورة .

الحل : $(س^{٣} - ١)(س^{٢} - ٥س + ٥) = (س^{٢} - ٥س + ٥)(س^{٣} - ١)$

$$= س^{٣}(س^{٢} - ٥س + ٥) + ^{-}١(س^{٢} - ٥س + ٥)$$

$$= س^{٥} - ٥س^{٤} + ٥س^{٣} - س^{٢} + ٥س - ٥$$

٣ قسمة مقدار جبري على مقدار جبري آخر :-

(نستخدم قوانين الأسس ، قوانين الكسور ، قواعد الإشارات) .

١ـ قسمة حد على حد :-

$$\frac{\text{س}^{\text{م}}}{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{س}^{\text{م}-\text{ن}} \text{ ، } \text{س} \neq \text{صفر} \text{ ،}$$

مثال :- بسط المقادير التالية

١) $$\frac{٢٥\,\text{س}^{٣}}{-٥\,\text{س}} = \frac{٢٥}{-٥}\,\text{س}^{٣-١} = -٥\,\text{س}^{٢} .$$

$\Downarrow$

يمكن كتابة ١ بالصورة التالية

$$\frac{٢٥\,\text{س}^{٣}}{-٥\,\text{س}} = \frac{\text{س} \times \text{س} \times \cancel{\text{س}} \times ٥ \times \cancel{٥}}{-\cancel{٥} \times \cancel{\text{س}}} = -٥\,\text{س}^{٢} .$$

٢) $$\frac{٢٤\,\text{س}^{٥}\,\text{ص}^{٢}}{٣\,\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{-٢}} = ٨\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٢+٢}$$

$(٨\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٢}\,\text{ص}^{٢})$

$$= ٨\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٤} .$$

٣) $$\frac{٨\,\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٥}\,\text{ع}^{-٣}\,\text{هـ}^{٢}}{٢\,\text{س}^{-١}\,\text{ص}^{٢}\,\text{ع}^{٢}\,\text{هـ}^{-٢}} = \frac{٨}{٢} \times \text{س}^{٣}\,\text{س}^{١} \times \frac{\text{ص}^{٥}}{\text{ص}^{٢}} \times \frac{١}{\text{ع}^{٣}\,\text{ع}} \times \text{هـ}^{٢}\,\text{هـ}^{٢}$$

$$= \frac{٤\,\text{س}^{٤}\,\text{ص}^{٣}\,\text{هـ}^{٤}}{\text{ع}^{٤}} .$$

نهاية محاضرة يوم الثلاثاء من الأسبوع الثالث

تمارين ومسائل

الباب الأول :

اذا كانت ك = مجموعة الأعداد الحقيقية .

وكانت أ مجموعة جزئية في ك ، أجب عن الأسئلة التالية :

١) $\text{ك} \cup \text{أ} =$

٢) $\text{ك} \cap \text{أ} =$

٣) $\overline{\text{أ}} =$

٤) $\overline{\text{ك}} =$

٥) $\overline{\phi} =$

الحل :

١) $\text{ك} \cup \text{أ} = \text{ك}$

٢) $\text{ك} \cap \text{أ} = \text{أ}$

٣) $\overline{\text{أ}} = \text{ك} - \text{أ}$

٤) $\overline{\text{ك}} = \phi$.

٥) $\overline{\phi} = \text{ك}$.

الباب الثاني :

السؤال الأول : اوجد ناتج مايلي بأبسط صورة :

أ) $\frac{٣}{٥} - \frac{٧}{١٠}$

ب) $\frac{٣}{٥} \div \frac{٧}{١٠}$

ج) $(١٠^{٢} \div ٥) - ٥ \times ٢$

الحل: أ) $\frac{٣ \times ٢}{٥ \times ٢} - \frac{٧}{١٠} = \frac{٦}{١٠} - \frac{٧}{١٠} = \frac{-١}{١٠}$

ب) $\frac{٣}{٥} \div \frac{٧}{١٠} = \frac{٣}{٥} \times \frac{١٠}{٧} = \frac{٣٠}{٣٥}$.

ج) $(١٠^{٢} \div ٥) - ٥ \times ٢$

$= (١٠٠ \div ٥) - ٥ \times ٢$

$= ٢٠ - ١٠ = ١٠$.

السؤال الثاني :-

١) اوجد قيمة ما يلي بابسط صورة:

١) $(\frac{١}{٨})^{-\frac{١}{٣}} =$

٢) لو ٤ + لو ٢٥ =

٣) لو $\frac{١}{١٠٠}$ =

الحل :- ١) $(\frac{١}{٨})^{-\frac{١}{٣}} = ٨^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$.

٢) لو ٤ + لو ٢٥ = لو (٤×٢٥)
= لو ١٠٠ = لو $١٠^{٢}$ = ٢لو١٠
= ٢×١ = ٢

٣) لو $\frac{١}{١٠٠}$ = لو $\frac{١}{١٠^{٢}}$ = لو $١٠^{-٢}$ = -٢لو١٠ = -٢×١
= -٢

٢) اوجد قيمة س في المقدار التالي :

لو$_{٢٥}$ س = $\frac{١}{٢}$

الحل :- س = $(٢٥)^{\frac{١}{٢}}$

س = $\sqrt{٢٥}$

س = ٥ ،

لاحظوا ان قيمة س في
اللوغاريتمات دائما موجبة

اسئلة المناقشة الأولى

أوجد ناتج كلا من المقادير التالية بأبسط صورة:

١) $(-٥ + ٣) \times ٤ \div ٢ =$

الحل: $(-٢) \times ٤ \div ٢$

$-٨ \div ٢ = -٤$

٢) $\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٧} =$

الحل: توحيد المقامات:

$$\frac{١ \times ٧}{٢ \times ٧} - \frac{٣ \times ٢}{٧ \times ٢} = \frac{٧}{١٤} - \frac{٦}{١٤} = \frac{١}{١٤} .$$

٣) $\frac{-١}{٢} \times \frac{٣}{٧} =$

الحل: ضرب البسط في البسط مقسوما على المقام في المقام .

$$\frac{-٣}{١٤} .$$

٤) $٩ \div ٣ \times ٢ - ٥ =$

الحل: $٣ \times ٢ - ٥ = ٦ - ٥ = ١$

لاحظ أن القسمة والضرب لهما الأولوية نفسها في التنفيذ وفي هذه الحالة تصبح الأولوية للعملية التي ترد أولاً (من اليمين الى اليسار) .

اسئلة المناقشة الثانية

اجب عن الأسئلة التالية:

١- قيمة المقدار - لو $١٠٠٠^{-٣}$

الحل: لاحظ أن الأساس غير مكتوب في اللوغاريتم يعتبر العدد ١٠ .

- لو$_{١٠}$ $١٠٠٠^{-٣}$ = -(-٣) لو$_{١٠}$ ١٠٠٠ = ٣ لو$_{١٠}$ $١٠^{٣}$ = ٩ لو$_{١٠}$ ١٠ = ٩×١

= ٩

٢- قيمة المتغير س في المقدار لو س = ٣ تساوي؟

الحل :- لو$_{١٠}$ س = ٣ ⇐ س = $١٠^{٣}$ ⇐ س = ١٠٠٠

٣- ابسط صورة للمقدار س$^{-٣}$ x س^{٥} + س^{٢} تساوي

الحل: الأولوية للعمليات هي عملية الضرب .

س$^{-٣}$ × س^{٥} + س^{٢} = س^{٢} + س^{٢} = ٢ س^{٢} .

٤- ناتج المقدار لو ١٠٠ - لو$_{٥}$(٢٥) + لو$_{٥}$ (٥$^{-٣}$) - ٢ يساوي

الحل: يمكن اعادة كتابة المقدار على الصورة التالية :

⇐ لو$_{١٠}$ $١٠^{٢}$ - لو$_{٥}$ $٥^{٢}$ + لو$_{٥}$ $٥^{-٣}$ - ٢

⇐ ٢ لو$_{١٠}$ ١٠ - ٢ لو$_{٥}$ ٥ + ٣ لو$_{٥}$ ٥ - ٢ ⇐ ٢ - ٢ - ٣ - ٢ = -٥

٥- الجذر التكعيبي للعدد لو ١٠$^{-١}$ ؟

الحل :- $\sqrt[٣]{\text{لو}_{١٠}\,١٠^{-١}} = \sqrt[٣]{-١\ \text{لو}_{١٠}\,١٠} = \sqrt[٣]{-١ \times ١} = \sqrt[٣]{-١}$

= -١

بداية محاضرة يوم الأحد
من الأسبوع الخامس

٣ قسمة مقدار جبري على مقدار جبري آخر :-

١) قسمة مقدار جبري مكون من حد واحد على مقدار جبري آخر أيضاً مكون من حد واحد :-

$$\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن} \text{ ، } س \neq \text{صفر}$$

٢) قسمة مقدار جبري مكون من أكثر من حد على مقدار جبري آخر مكون من حد واحد :-

ولقسمة هذا النوع من كثيرات الحدود، فإننا نستخدم الخاصية التالية :

$$\frac{أ_1 + أ_2 + --- + أم}{ب} = \frac{أ_1}{ب} + \frac{أ_2}{ب} + --- + \frac{أم}{ب} .$$

مثال :- أوجد ناتج القسمة للمقدار التالي بأبسط صورة :

$$\frac{١٥ س^{٢} ص^{٢} + ٥ س^{٣} ص^{٥} - ٢٥ س^{٣} ص^{٤}}{٥ س ص^{٢}}$$

$$= \frac{١٥ س^{٢} ص^{٢}}{٥ س ص^{٢}} + \frac{٥ س^{٣} ص^{٥}}{٥ س ص^{٢}} - \frac{٢٥ س^{٣} ص^{٤}}{٥ س ص^{٢}}$$

$$= ٣ س + س^{٢} ص^{٣} - ٥ س^{٢} ص^{٢} .$$

مثال :- أوجد ناتج القسمة للمقدار التالي بأبسط صورة

$$\frac{٥ع^{٣}ل^{-٢} + ٢٥ع ل^{٣}}{٥ع^{-٢}ل^{-٥}} \quad ؟$$

الحل :-

$$= \frac{٥ع^{٣}ل^{-٢}}{٥ع^{-٢}ل^{-٥}} + \frac{٢٥ع ل^{٣}}{٥ع^{-٢}ل^{-٥}}$$

$$= \frac{ع^{٣}ع^{٢}ل^{٥}}{ل^{٢}} + ٥ع ع^{٢}ل^{٣}ل^{٥}$$

$$= ع^{٥}ل^{٣} + ٥ع^{٣}ل^{٨}$$

③ قسمة مقدار جبري مكون من أكثر من حد على مقدار جبري آخر مكون من أكثر من حد :-

في هذه الحالة، فإننا نستخدم القسمة الطويلة لإيجاد الناتج، وتتلخص في الخطوات التالية :-

أ - نكتب المقدار الجبري (في المقسوم والمقسوم عليه) في صورة مرتبة ترتيباً تنازلياً من حيث الأس لأحد المتغيرات.

ب - نقسم الحد الأول في المقدار الجبري من المقسوم على الحد الأول من المقدار الجبري في المقسوم عليه.

ج - نضرب خارج القسمة التي حصلنا عليها من الخطوة (ب) في المقسوم عليه ومن ثم نقوم بعملية طرح حاصل الضرب من المقسوم فنحصل على مقدار جبري جديد .

د - نكرر الخطوتين ب ، ج حتى نحصل على باقي الطرح مساوياً للصفر أو أن تكون درجة الباقي أقل من درجة المقسوم عليه .

مثال ١ :- اوجد خارج قسمة المقدارين

$(س^{٥} - ٢س^{٤} - ٣س^{٣}) \div (س - ٣)$.

الحل :-

$س^{٤} + س^{٣}$

المقسوم عليه ← $س - ٣$ | $س^{٥} - ٢س^{٤} - ٣س^{٣}$ المقسوم

$- \quad س^{٥} - ٣س^{٤}$

$صفر + س^{٤} - ٣س^{٣}$

$- \quad س^{٤} - ٣س^{٣}$

$صفر + صفر$ والباقي صفراً (تتوقف عملية القسمة)

أي أن خارج القسمة هو المقدار $س^{٤} + س^{٣}$ والباقي صفراً .

مثال :- أوجد خارج قسمة المقدارين :-

$$(\text{س}^2+3\text{س})\div(\text{س}-12)\,.$$

الحل :

$$\begin{array}{r|l} & \text{س}+15 \\ \hline \text{س}-12 & \cancel{\text{س}^2}+3\text{س}+\text{صفر} \\ - & \cancel{\text{س}^2}-12\text{س} \\ \hline & 15\text{س}+\text{صفر} \\ - & 15\text{س}-180 \\ \hline & \text{صفر}+\boxed{180}\ \text{باقي القسمة} \end{array}$$

أي خارج القسمة $(\text{س}+15)$

والباقي 180

نلاحظ هذا المثال نكون قد أنهينا معظم المواضيع الرئيسية في الباب الثاني .

الباب الثالث: تحليل المقادير الجبرية

أولاً : حاصل ضرب بعض المقادير الجبرية الخاصة :

أ) $\text{س}(\text{ص}+\text{ع})=\text{س ص}+\text{س ع}\,.$

ب) $(\text{س}+\text{ص})(\text{س}-\text{ص})=\text{س}^2-\text{ص}^2\,.$

جـ) $(\text{س}+\text{ص})(\text{س}+\text{ص})=(\text{س}+\text{ص})^2=\text{س}^2+2\text{س ص}+\text{ص}^2$

د) $(\text{س}-\text{ص})(\text{س}-\text{ص})=(\text{س}-\text{ص})^2=\text{س}^2-2\text{س ص}+\text{ص}^2$

هـ) $\underline{(\text{س}-\text{ص})(\text{س}-\text{ص})}(\text{س}-\text{ص})=(\text{س}-\text{ص})^3$

$(\text{س}^2-2\text{س ص}+\text{ص}^2)(\text{س}-\text{ص})=\text{س}^3-\underline{2\text{س}^2\text{ص}}+\text{س ص}^2\underset{-3\text{س}^2\text{ص}}{\underline{-\text{س}^2\text{ص}}}+2\text{س ص}^2$

$=\text{س}^3-3\text{س}^2\text{ص}+3\text{س ص}^2-\text{ص}^3$

و) (س + ص)^{٣} = (س + ص)(س + ص)(س + ص)

= (س + ص)(س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢})

= س^{٣} + ٢ س^{٢} ص + س ص^{٢} +

س^{٢} ص + ٢ س ص^{٢} + ص^{٣}

= س^{٣} + ٣ س^{٢} ص + ٣ س ص^{٢} + ص^{٣}

أمثلة :- أوجد ناتج المقادير التالية بأبسط صورة :

أ) ٥ س (٣ ص − ع) = ١٥ س ص − ٥ س ع .

ب) (٣ س^{٢} − ٤ ص)^{٢} = (٣ س^{٢} − ٤ ص)(٣ س^{٢} − ٤ ص)

= ٩ س^{٤} − ٢٤ س^{٢} ص + ١٦ ص^{٢} .

جـ) (س − ٢)^{٣} = (س − ٢)(س − ٢)(س − ٢)

= (س − ٢)(س^{٢} − ٤ س + ٤)

= س^{٣} − ٤ س^{٢} + ٤ س − ٢ س^{٢} + ٨ س − ٨

= س^{٣} − ٦ س^{٢} + ١٢ س − ٨

ثانياً : التحليل ، ومن الطرق التي سنتعرف عليها في تحليل المقادير الجبرية :

١) إخراج العامل المشترك

ملاحظة : التحليل هو عملية عكسية لعملية حاصل ضرب مقادير جبرية والمقصود بتحليل المقدار الجبري إلى عوامله الأولية (أي لا يمكنه تحليل عوامله إلى حاصل ضرب عوامل جبرية أخرى) .

تعريف :- إذا كان لدينا المقدار هـ س + هـ ص ، فيمكن إخراج عامل مشترك بين الحدين على الصورة التالية :

$$هـ س + هـ ص = هـ (س + ص) .$$

مثال :- حلل المقادير التالية إلى عوامل الأولية

١) $٥س + ١٥ص = ٥(س + ٣ص)$.

٢) $٣س^٢ - ٢٧س = ٣س(س - ٩)$.

٣) $٢س^٢ص - ٨س ص^٣ = ٢س ص(س - ٤ص^٢)$.

٤) $٥س^٢ص^٣ع - ٢٥س ع + ١٥س^٢ع^٢$

$= ٥س ع(س ص^٣ - ٥ + ٣س ع)$.

للتأكد من صحة الحل ، نقوم بضرب النتائج الأخيرة أول

$٥س^٢ص^٣ع - ٢٥س ع + ١٥س^٢ع^٢$.

* * * * * * *

نهاية محاضرة يوم

من الأسبوع

بداية محاضرة يوم الثلاثاء
من الاسبوع الثاني

الباب الثالث : تحليل المقادير الجبرية

٢ الفرق بين مربعين :

الصيغة العامة للفرق بين مربعين :-

$$\text{س}^2 - \text{ص}^2 = (\text{س} - \text{ص})(\text{س} + \text{ص}) = (\text{س} + \text{ص})(\text{س} - \text{ص})$$

مثال ١ :- حلل المقدار الجبري التالي

١) $\text{س}^2 - ٩ = \text{س}^2 - ٣^2 = (\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)$

٢) $٤\text{س}^2 - ٩\text{ص}^2 = (٢\text{س})^2 - (٣\text{ص})^2$

$= (٢\text{س} - ٣\text{ص})(٢\text{س} + ٣\text{ص})$.

٣) $\text{س}^4 - ١ =$

$= (\text{س}^2)^2 - (١)^2$

$= \boxed{(\text{س}^2 - ١)}(\text{س}^2 + ١)$ $\longrightarrow$ فرق مربعين

$= (\text{س} - ١)(\text{س} + ١)(\text{س}^2 + ١)$ (مكتوبة في أبسط صورة)

تأكد من صحة الحل :-

$\underline{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}(\text{س}^2 + ١)$

$(\text{س}^2 - ١)(\text{س}^2 + ١) = \text{س}^4 + \cancel{\text{س}^2} - \cancel{\text{س}^2} - ١$

$= \text{س}^4 - ١$

④ $(١٦ - \text{ص}^4) = (٤^2 - (\text{ص}^2)^2) = (٤ - \text{ص}^2)(٤ + \text{ص}^2)$

$= (٢ - \text{ص})(٢ + \text{ص})(٤ + \text{ص}^2)$.

٣ الفرق بين مكعبين :-

الصيغة العامة للفرق بين مكعبين تكتب على الصورة التالية :-

$$(س^{٣} - ص^{٣}) = (س - ص)(س^{٢} + س ص + ص^{٢}) .$$

(الحد الأول)^٣ (الحد الثاني)^٣ ، الحد الأول ، الحد الثاني ، مربع الحد الأول ، الحد الأول × الحد الثاني ، مربع الحد الثاني

- مثال :- حلل المقادير الجبرية التالية بأبسط صورة :-

١) $٢٧ س^{٣} - ص^{٣} = ((٣س)^{٣} - (ص)^{٣})$

$$= (٣س - ص)(٩س^{٢} + ٣س ص + ص^{٢}) .$$

٢) $٨ س^{٦} - ١٢٥ ص^{٩} = ((٢س^{٢})^{③} - (٥ص^{٣})^{③})$

$$= (٢س^{٢} - ٥ص^{٣})(٤س^{٤} + ١٠س^{٢}ص^{٣} + ٢٥ص^{٦})$$

٤ مجموع مكعبين :

الصيغة العامة لهذا القانون تكتب كما يلي :-

$$(س^{٣} + ص^{٣}) = (س + ص)(س^{٢} - س ص + ص^{٢}) .$$

- مثال :- $(٢٧ س^{٣} + ١) = ((٣س)^{٣} + (١)^{٣})$

$$= (٣س + ١)(٩س^{٢} - ٣س + ١) .$$

$$(١٢٥ س^{٦} + ٨) = ((٥س^{٢})^{٣} + (٢)^{٣})$$

$$= (٥س^{٢} + ٢)(٢٥س^{٤} - ١٠س^{٢} + ٤)$$

٥ تحليل المقدار الثلاثي :-

نستعرض الآن طريقة تحليل كثيرة حدود من الدرجة الثانية وهي من الصيغة :-

$\text{أ}\,\text{س}^{2} + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ}$ ، حيث أ، ب، جـ : أعداد ثابتة.

السعي لإعادة كتابة المقدار :-

$$\text{أ}\,\text{س}^{2} + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = (\text{هـ}_{1}\,\text{س} + \text{و}_{1})(\text{هـ}_{2}\,\text{س} + \text{و}_{2})$$

والمطلوب إيجاد قيم لـ هـ١، و١، هـ٢، و٢.

مثال :- حلل المقدار التالي :-

١) $\text{س}^{2} + \text{س} - 6 = \underbrace{(\text{س} + \overbrace{3)(\text{س}}^{3\text{س}} - 2)}_{-2\text{س}}$

س ، س

٢ أو ١ ×

٣ أو ٦ ×

٢) $\text{س}^{2} + 5\text{س} \underset{\downarrow}{+} 6 = (\text{س} + 2)(\text{س} + 3)$

إشارة الحد الثابت موجب نأخذ الإشارة نفسها

س ، س

٦ أو ٢

×

١ أو ٣

٣) س^{٢} − ٥س − ١٤ = (س + ٢)(س − ٧)

مختلفة

اشارة الطرف سالبة

اشارة الوسط تعطى للعدد الأكبر

٤) س^{٢} − ٢س − ٨ = ؟؟

س   ٢$^{+}$ ١

أو

س   ٤$^{-}$ ٨

اشارة الوسط تذهب للعدد الأكبر

س^{٢} − ٢س − ٨ = (س − ٤)(س + ٢) .

تحدد شكل اشارة المقدارين

لماذا كانت سالبة، تكون اشارة المقدارين مختلفتين (+ و −) .

أما اذا كانت (اشارة الطرف والحد الثابت) موجبة فتكون اشارة المقدارين الناتج متشابهتين.

٥) (س^{٢} − ٢س + ١) = (س − ١)(س − ١)

٦) ٦س^{٢} + ٥س − ٤ = (٢س − ١)(٣س + ٤) ✓ الحل الصحيح

٢س   ١$^{-}$ أو ٢ أو ٢$^{-}$

٣س   ٤$^{+}$ ٢$^{+}$

أو (٢س + ٤)(٣س − ١) ×

أو (٢س + ٢)(٣س − ٢) ×

أو (٢س − ٢)(٣س + ٢) ×

نهاية الباب الثالث (من تحليل المقادير الجبرية)

محاضرة يوم الأحد من
الأسبوع السادس

الفصل الرابع : المقادير الكسرية

ما هو المقدار الكسري :-

تعريف :- المقدار الكسري (النسبي) هو عبارة عن خارج قسمة كثيرتي حدود بحيث يسمى المقسوم بالبسط والمقسوم عليه بالمقام .

ومن الأمثلة على ذلك :-

① $$\begin{matrix}\text{البسط}\leftarrow\\ \text{المقام}\leftarrow\end{matrix}\ \frac{\text{س}-٤}{\text{س}+٢}$$

② $$\begin{matrix}\text{البسط}\leftarrow\\ \text{المقام}\leftarrow\end{matrix}\ \frac{٣\text{س}^{٢}+\text{س}}{٢\text{س}^{٢}-١}$$

مقادير كسرية .

③ $$\text{س}^{٤}+\text{س}^{-٢}=\frac{\text{س}^{٤}}{١}+\frac{١}{\text{س}^{٢}} .$$

$$=\frac{\text{س}^{٤}\times\text{س}^{٢}}{١\times\text{س}^{٢}}+\frac{١}{\text{س}^{٢}}$$

$$=\frac{\text{س}^{٦}}{\text{س}^{٢}}+\frac{١}{\text{س}^{٢}}=\frac{\text{س}^{٦}+١}{\text{س}^{٢}} .$$

العمليات الجبرية على المقادير الكسرية :-

[1] جمع وطرح المقادير الكسرية :

عند جمع أو طرح مقادير كسرية ، يجب ملاحظة ما يلي :-

أ) إذا كانت المقادير الكسرية لها نفس المقام، فيكون الجمع الجبري لها له نفس المقام وبسطه يكون ناتج جمع بسط المقدار الأول مع بسط المقدار الثاني.

بالصورة الرمز :-

$$\frac{س}{ص} + \frac{ع}{ص} = \frac{س + ع}{ص} \qquad (ص \neq صفر)$$

$$\frac{س}{ص} - \frac{ع}{ص} = \frac{س - ع}{ص} \qquad (ص \neq صفر)$$

مثال :- اوجد ناتج المقادير التالية بأبسط صورة :

1) $\frac{س + ٣}{س - ٢} - \frac{س}{س - ٢} = \frac{(س + ٣) - (س)}{س - ٢}$

$= \frac{٣}{س - ٢}$.

2) $\frac{٣س}{س - ٤} + \frac{٢س}{س - ٤} = \frac{٣س + ٢س}{س - ٤} = \frac{٥س}{س - ٤}$.

ب) إذا كانت المقادير الكسرية لها مقامات مختلفة، نقوم بتحويل الكسور متكافئة وذلك بضرب بسط ومقام كل كسر بكمية جبرية مناسبة لكي نحصل على كسور لها نفس المقام ثم نتبع الطريقة السابقة في أ .

بصورة رمزية :-

$$\frac{س}{ص} + \frac{ع}{ل} = \frac{ل \times س}{ل \times ص} + \frac{ع \times ص}{ل \times ص}$$

$$= \frac{ل س}{ل ص} + \frac{ع ص}{ل ص}$$

$$= \frac{ل س + ع ص}{ل ص} .$$

$$\frac{س}{ص} - \frac{ع}{ل} = \frac{ل \times س}{ل \times ص} - \frac{ع \times ص}{ل \times ص}$$

$$= \frac{ل س - ع ص}{ل ص} .$$

مثال :- أوجد ناتج ما يلي :-

$$\frac{5}{س} + \frac{3}{س+1}$$

الحل: $\frac{س+1}{س+1} \times \frac{5}{س} + \frac{3}{س+1} \times \frac{س}{س}$

$$= \frac{5(س+1)}{س(س+1)} + \frac{3س}{س(س+1)} = \frac{5س + 5 + 3س}{س^2 + س} = \frac{8س + 5}{س^2 + س} .$$

مثال :- اختصر ناتج المقدارين التاليين بأبسط صورة :-

$$\frac{٣}{س} - \frac{٥}{س-٢}$$

الحل:

$$\frac{(س-٢)\times ٣}{س\times(س-٢)} - \frac{٥\times س}{س-٢\times س}$$

$$= \frac{٣(س-٢)}{س(س-٢)} - \frac{٥س}{س(س-٢)} = \frac{٣س-٦-٥س}{س^٢-٢س}$$

$$= \frac{-٢س-٦}{س^٢-٢س}$$

ملاحظة: (في عملية جمع وطرح مقادير كسرية) عند استخدام الطريقة (ب)، يجب تحليل مقامات الكسور الى عواملها الأولية إن أمكن.

مثال :- اوجد ناتج طرح المقدارين

$$\frac{٢س}{س^٢-١} - \frac{٢}{س+١}$$

الحل:

$$\frac{٢س}{(س-١)(س+١)} - \frac{٢}{(س+١)}$$

$$\frac{٢س}{(س-١)(س+١)} - \frac{٢}{(س+١)} \times \frac{(س-١)}{(س-١)} = \frac{٢س-(٢س-٢)}{(س-١)(س+١)}$$

$$= \frac{٢}{(س+١)(س-١)} = \boxed{\frac{٢}{س^٢-١}}$$

مثال :- اوجد ناتج جمع المقادير

$$\frac{٥}{س^{٢}} + \frac{٢}{٥س}$$

الحل: $\frac{٥ \times ٥}{٥ \times س \times س} + \frac{٢ \times س}{٥س \times س}$

$$= \frac{٢٥}{٥س^{٢}} + \frac{٢س}{٥س^{٢}} = \frac{٢٥ + ٢س}{٥س^{٢}} ،$$

$\boxed{٢}$ ضرب وقسمة المقادير الكسرية :

١) ضرب المقادير الكسرية :-

القاعدة: لضرب كسرين $\frac{س}{ص}$ ، $\frac{ع}{ل}$ ، نستخدم القاعدة التالية :

$$\frac{س}{ص} \times \frac{ع}{ل} = \frac{س ع}{ص ل}$$

$\left(\frac{\text{ضرب بسط الاول} \times \text{بسط الثاني}}{\text{ضرب مقام الاول} \times \text{مقام الثاني}} \right)$

مثال :- بسط المقادير التالية :-

$$\frac{٣س}{س - ١} \times \frac{٢س}{س + ١}$$

الحل: $\frac{٣س \times ٢س}{(س - ١)(س + ١)} = \frac{٦س^{٢}}{س^{٢} - ١}$

مثال :- اوجد ناتج مايلي

$$س \times \frac{٥}{س^٢}$$

الحل : $\frac{س}{١} \times \frac{٥}{س^٢} = \frac{٥س}{س^٢} = \frac{٥\cancel{س}}{\cancel{س} \times س}$

$= \frac{٥}{س}$ ،

ب) عملية قسمة مقادير جبرية :

القاعدة :- لقسمة مقدارين كسريين $\frac{س}{ص}$ ، $\frac{ع}{ل}$ فإننا نستخدم القاعدة التالية :-

$$\frac{س}{ص} \div \frac{ع}{ل} = \frac{س}{ص} \times \frac{ل}{ع} = \frac{س ل}{ص ع} ،$$

(لقسمة مقدار كسري على مقدار كسري آخر، نقوم بتحويل اشارة القسمة إلى ضرب ونأخذ مقلوب الكسر الثاني) .

مثال :- اوجد ناتج مايلي :-

أ) $\frac{٣}{س} \div \frac{٥}{س^٢}$

الحل : $\frac{٣}{س} \times \frac{س^٢}{٥} = \frac{٣س^٢}{٥س} = \frac{٣}{٥}س$.

ب) $\frac{س^٢+١}{س-١} \div \frac{س^٢-١}{س+١}$

الحل :- $\frac{\text{س}^{٢}+١}{\text{س}-١} \times \frac{\text{س}+١}{\text{س}^{٢}-١}$

$$= \frac{\text{س}^{٢}+١}{\text{س}-١} \times \frac{\cancel{\text{س}+١}}{(\cancel{\text{س}+١})(\text{س}-١)} = \frac{\text{س}^{٢}+١}{(\text{س}-١)(\text{س}-١)}$$

$$= \frac{\text{س}^{٢}+١}{(\text{س}-١)^{٢}}$$

$$= \frac{\text{س}^{٢}+١}{\text{س}^{٢}-٢\text{س}+١}$$

واجب الفصل الرابع

(مفهوم المقدار الكسري)

+
(العمليات الجبرية ع المقادير الكسرية)

واجب محاضرة يوم الأحد
من الأسبوع السادس

بداية محاضرة الاسبوع
السادس يوم الثلاثاء

الباب الخامس: المعادلات

تعريف: المعادلة هي عبارة عن تعبير رياضي يحتوي على متغير واحد أو أكثر مع اشارة المساواة، وهذا التعبير له طرفان أيمن وأيسر تفصل بينهما اشارة (=) بحيث تدعى هذه المتغيرات بالمجاهيل. وعملية حل المعادلة معناه ايجاد كل القيم (الاعداد) التي تجعل المعادلات صحيحة، ومجموعة هذه الحلول تسمى حل المعادلة.

وبداية سنتعرف على بعض من اشكال المعادلات ومنها:-

١- المعادلات الخطية في مجهول (متغير) واحد س:

الصورة العامة لمعادلة خطية بمتغير واحد هي:-

أ س = جـ ، أ، جـ ∈ ح ، أ ≠ صفر.

مثال :- أوجد قيمة س من المعادلة

٥ س − ٢٥ = صفر

الحل: بداية نقوم بنقل الحد الثابت الى الطرف الآخر، ودائماً عند نقل حد ثابت أو متغير من طرف الى الآخر نقوم بتغيير اشارته.

٥ س = ٢٥

سنتخلص من معامل س لنجعله العدد واحد، وذلك عن طريق قسمة حدي المعادلة على ذلك المعامل.

$$\frac{٥س}{٥} = \frac{٢٥}{٥}$$

$\boxed{س = ٥}$ حل المعادلة .

(ملاحظة : دائماً المعادلات من الدرجة الأولى لها حل واحد فقط)

وللتأكد من صحة الحل نقوم بتعويض الناتج (س = ٥) في المعادلة الأصلية :-

$٥س - ٢٥ = $ صفر

$٥ \times ٥ - ٢٥ = $ صفر (الحل الصحيح) .

صفر = صفر

مثال : اوجد حل المعادلة التالية :-

$٤ - ٢س = $ صفر

الحل : $\frac{-٢س}{-٢} = \frac{-٤}{-٢} \Leftarrow \boxed{س = ٢}$

للتأكد من صحة الحل :

$٤ - ٢(٢) = ٤ - ٤ = $ صفر

بعض من خواص الأعداد الحقيقية المستخدمة في حل المعادلات :

١) إذا كانت ب = ج فإن :

أ + ب = أ + ج   (٢ + ب = ٢ + ج)

ب − أ = ج − أ   (ب − ٢ = ج − ٢)

أب = أج   (٢ب = ٢ج)

ب/أ = ج/أ   (ب/٣ = ج/٣) .

٢) إذا كانت أ + ب = أ + ج ⟸ ب = ج

٣) إذا كانت أب = أج ⟸ ب = ج .

٤) 〃 〃 ب/أ = ج/أ ⟸ ب = ج

٥) 〃 〃 ب − أ = ج − أ ⟸ ب = ج

مثال :- س − ٧ = ١٠ (معادلة خطية) .

لو أردنا أن نجد حل لهذه المعادلة :-

س = ١٠ + ٧ ⟸ $\boxed{\text{س} = ١٧}$

بشكل آخر :-

(س − ٧) + ٧ = (١٠) + ٧

$\boxed{\text{س} = ١٧}$

مثال :- اوجد حل المعادلة التالية

$$\frac{١}{٢}\text{س} - ٦ = ٢$$
$$+٦ \qquad +٦$$

$$\frac{١}{٢}\text{س} = ٢ + ٦ \Leftarrow \frac{١}{٢}\text{س} = ٨$$

وللتخلص من معامل س $(\frac{١}{٢})$، نقوم بضرب كلا الحدين بالعدد ٢ :-

$$٢ \times \frac{١}{٢}\text{س} = ٨ \times ٢ \Rightarrow \boxed{\text{س} = ١٦}$$

للتأكد من صحة الحل :-

$$\frac{١}{٢}(١٦) - ٦ \overset{?}{=} ٢$$
$$٨ - ٦ = ٢$$
$$٢ = ٢ \checkmark$$

٢- المعادلات الخطية في مجهولين :-

تعريف: المعادلة الخطية في مجهولين س، ص هي عبارة عن معادلة على الصورة

$$\text{أ}\,\text{س} + \text{ب}\,\text{ص} = \text{جـ}$$

حيث أ، ب، جـ $\in$ ح ، أ، ب $\neq$ صفر .

ملاحظ أنّ حل هذا النوع من المعادلات ليس وحيداً (بمعنى أنه سيكون لدينا عدد لانهائي من الحلول) .

حيث أنه $\boxed{\text{س} = \frac{\text{جـ} - \text{ب}\,\text{ص}}{\text{أ}}}$ بمعنى أنه لكل قيمة للمتغير ص توجد قيمة للمتغير س .

مثال ١ :- اوجد حل المعادلة الآتية

$$\text{٢س} + \text{٣ص} = \text{١٥} \,.$$

الحل :-

$$\frac{\text{٢س}}{\text{٢}} = \frac{\text{١٥} - \text{٣ص}}{\text{٢}}$$

$$\boxed{\text{س} = \frac{\text{١٥} - \text{٣ص}}{\text{٢}}}$$

فنقول عندما ص = ٢ ⟸ $\text{س} = \frac{\text{١٥} - \text{٣(٢)}}{\text{٢}}$

$$= \frac{\text{١٥} - \text{٦}}{\text{٢}} = \frac{\text{٩}}{\text{٢}} = \text{٤,٥} \,.$$

نتأكد من صحة الحل :

نعوض كل من قيمة س = ٤,٥ و ص = ٢ في المعادلة الاصلية :-

$$\text{٢(٤,٥)} + \text{٣(٢)} \overset{?}{=} \text{١٥}$$

$$\text{٩} + \text{٦} = \text{١٥}$$

$$\text{١٥} = \text{١٥}$$ ✓ الحل صحيح .

وكذلك عندما ص = ٣ ⟸ $\text{س} = \frac{\text{١٥} - \text{(٣×٣)}}{\text{٢}}$

$$= \frac{\text{١٥} - \text{٩}}{\text{٢}} = \frac{\text{٦}}{\text{٢}} = \text{٣}$$

وللتأكد من صحة الحل :-

$$\text{٢(٣)} + \text{٣(٣)} \overset{?}{=} \text{١٥}$$

$$\text{٦} + \text{٩} = \text{١٥}$$

$$\text{١٥} = \text{١٥}$$ ✓ الحل صحيح

مثال ١ :- اوجد حل المعادلة

$\text{٥س} - \text{٤ص} = ٢٤$ عندما $\text{ص} = -١$ ؟

$\text{ص} = ٢$ ؟

الحل :-

$$\frac{\text{٥س}}{٥} = \frac{\text{٤ص} + ٢٤}{٥}$$

$$\boxed{\text{س} = \frac{\text{٤ص} + ٢٤}{٥}}$$ هذه الصورة العامة للحل .

عندما ص = −١ : $\text{س} = \frac{٤(-١) + ٢٤}{٥}$

$$= \frac{-٤ + ٢٤}{٥}$$

$$= \frac{٢٠}{٥}$$

$$\boxed{\text{س} = ٤}$$

للتأكد :- $٥ \times ٤ - ٤(-١) \overset{?}{=} ٢٤$

$$٢٠ + ٤ = ٢٤ \checkmark$$

عندما ص = ٢ : $\text{س} = \frac{٤ \times ٢ + ٢٤}{٥}$

$$\text{س} = \frac{٨ + ٢٤}{٥}$$

$$\boxed{\text{س} = \frac{٣٢}{٥}}$$

للتأكد من صحة الحل:

$$\cancel{٥} \times \left(\frac{٣٢}{\cancel{٥}}\right) - ٤(٢) \overset{?}{=} ٢٤$$

$$٣٢ - ٨ = ٢٤ \checkmark$$ الحل صحيح

٣ - معادلات خطية آنية في مجهولين :-

وتأتي هذا النوع من المعادلات على الصورة :

أ$_1$ س + ب$_1$ ص = جـ$_1$

أ$_2$ س + ب$_2$ ص = جـ$_2$

حيث أ$_1$، أ$_2$، ب$_1$، ب$_2$، جـ$_1$، جـ$_2$ $\in$ ح .

أ$_1$، ب$_1$ أحدهما على الأقل $\neq$ صفر .

أ$_2$، ب$_2$ = = $\neq$ صفر .

وحل هذا النظام الآني من المعادلات هو عبارة عن زوج من الأعداد س، ص يحققه كلا المعادلتين معاً .

في هذا البند، سنوضح طريقتين لحل هذا النوع من المعادلات :-

١ـ طريقة الحذف :-

خطوات هذه الطريقة :-

الخطوة الأولى : إذا لم تكن المعاملات المتساوية لأحد المتغيرين س أو ص متساوية، فنضرب المعادلتين في عدد معين حتى تصبح معاملات أحد المتغيرين متساوية .

الخطوة الثانية : إذا كانت الاشارتين للمعاملين المتساويين غير ~~~~ متشابهتين فنقوم بعملية جمع لكلا المعادلتين، أما إذا كانت متشابهتين فنقوم بعملية الطرح .

الخطوة الثالثة : نجد قيمة أحد المتغيرين ثم نعوض في إحدى المعادلتين الأصليتين لإيجاد قيمة المتغير الآخر .

مثال :- اوجد قيمة س ، ص من المعادلتين :-

٥س + ص = ١
س − ص = ٢ +

٦س + صفر = ٣

لاحظوا أن معامل ص في كلا المعادلتين متساوية وإشاراتهم مختلفة، نقوم بعملية جمع مباشرة للحصول ع

$$\boxed{س = \frac{١}{٢}} \Leftarrow س = \frac{٣}{٦}$$

نقوم بإيجاد قيمة المتغير الآخر الا وهو ص من احد المعادلتين

س − ص = ٢ وعندما س = $\frac{١}{٢}$:-

$$\frac{١}{٢} - ص = ٢ \Rightarrow -ص = ٢ - \frac{١}{٢}$$

×−١ ص− = ١,٥ × −١

$$\boxed{ص = -١,٥}$$

للتأكد من صحة الحل :-

المعادلة الأولى

$$٥ (\frac{١}{٢}) + (-١,٥) \overset{?}{=} ١$$

٢,٥ − ١,٥ = ١

١ = ١ ✓

المعادلة الثانية

$$\frac{١}{٢} - (-١,٥) \overset{?}{=} ٢$$

$\frac{١}{٢}$ + ١,٥ = ٢

٢ = ٢ ✓

محاضرة البث المباشر الثانية

مادة: مبادئ الرياضيات

د. رائد الخصاونة

المحاضرة المباشرة الثانية

الباب الخامس (المعادلات)

1) معادلات خطية في مجهول واحد (س).

أ س = جـ ، حيث أ، جـ : اعداد ثابتة ، أ ≠ صفر

مثال : $-٤\text{س} = ٢٠$

من خلال قسمة طرفي المعادلة على معامل س

نحصل على :-

$$\frac{-٤\text{س}}{-٤} = \frac{٢٠}{-٤} \Leftarrow \boxed{\text{س} = -٥}$$

2) معادلات خطية في مجهولين :

أ س + ب ص = جـ ؛ أ، ب، جـ : اعداد ثابتة

أ، ب ≠ صفر .

مثال : أوجد حل المعادلة

$٤\text{س} - ٥\text{ص} = ٢٥$

عندما ص = ٥ ؟

الحل :- $٤\text{س} - ٥\text{ص} = ٢٥$

$٤\text{س} = ٢٥ + ٥\text{ص}$

$\boxed{\text{س} = \frac{٢٥ + ٥\text{ص}}{٤}}$ الحل العام

عندما ص = ٥ :-

$\text{س} = \frac{٢٥ + ٥(٥)}{٤}$

$\text{س} = \frac{٥٠}{٤}$

$\boxed{\text{ص} = ١٢٫٥}$

٣) معادلات خطية آنية في مجهولين :

والصورة العامة لهذا النوع من المعادلات

$$\text{أ}_1\,\text{س} + \text{ب}_1\,\text{ص} = \text{ج}_1$$

$$\text{أ}_2\,\text{س} + \text{ب}_2\,\text{ص} = \text{ج}_2$$

حيث $\text{أ}_1 ، \text{أ}_2 ، \text{ب}_1 ، \text{ب}_2 ، \text{ج}_1 ، \text{ج}_2$: أعداد ثابتة ،

$\text{أ}_1 ، \text{ب}_1$ أحدهما على الأقل ≠ صفر

$\text{أ}_2 ، \text{ب}_2$ أحدهما على الأقل ≠ صفر .

ويمكن حل هذا النوع من المعادلات بأحد الطرق التالية :-

أ) طريقة الحذف .

ب) طريقة التعويض .

حيث تعرفنا في المحاضرة الأخيرة من الأسبوع السادس على خطوات طريقة الحذف وفي المثال التالي سنوضح المزيد من خطوات هذه الطريقة مع ملاحظة أن هذا النوع من المعادلات له حل وحيد فقط .

مثال ٢ :- اوجد قيم س ، ص من :-

٣ ×   ٥س + ٢ص = ٣ —— (١)

٢ ×   ٢س + ٣ص = -١ —— (٢)

الحل :- نقوم بضرب المعادلة الأولى بالعدد ٣ ، والمعادلة الثانية بالعدد ٢

١٥س + ٦ص = ٩

٤س + ٦ص = -٢   -

١١س/١١ = ١١/١١ ⇐ س = ١

نعوض قيمة س في المعادلة الأولى : (لايجاد قيمة المتغير ص)

٥(١) + ٢ص = ٣

٥ + ٢ص = ٣ ⇐ ٢ص = ٣ - ٥

٢ص/٢ = -٢/٢ ⇐ ص = -١

للتأكد من صحة الحل :-

٥(١) + ٢(-١) ≟ ٣

٥ - ٢ = ٣ ✓

٢(١) + ٣(-١) ≟ -١

٢ - ٣ = -١ ✓

٢ـ طريقة التعويض :

تتلخص هذه الطريقة في إيجاد قيمة أحد المجهولين بدلالة الآخر ومن ثم التعويض بهذه القيمة في المعادلة الأخرى، نحصل على معادلة بمجهول واحد ومنه نجد قيمته ثم نعوض به في أحد المعادلتين لنحصل على قيمة المجهول الآخر .

مثال :- أوجد قيمة س، ص من النظام

٢س − ص = ٤ ——— (١)

س + ٢ص = −٣ ——— (٢)

الحل : نكتب المتغير س بدلالة ص من المعادلة (٢) لنحصل على

س + ٢ص = −٣ ⟸ س = −٣ − ٢ص

الآن ، نعوض هذا الناتج في المعادلة (١) :

٢~~س~~ − ص = ٤ ——— (١)

٢(−٣ − ٢ص) − ص = ٤

−٦ − ٤ص − ص = ٤

−٦ − ٥ص = ٤

−٥ص = ٤ + ٦ ⟸ −٥ص = ١٠ ⟸ ص = −٢

نعوض قيمة ص في المعادلة رقم (١) :

٢س + ٢ = ٤ ⟸ ٢س = ٤ + −٢

٢س/٢ = ٢/٢ ⟸ س = ١

مثال ٢ :- اوجد قيمة س ، ص من المعادلتين

٥س + ص = ١ ——— (١)

س − ص = ٢ ——— (٢)

والحل من الطريقة السابقة
س = ١/٢ ، ص = −١,٥

الحل : من المعادلة (٢) نحصل على قيمة المتغير س بالصورة :-

س − ص = ٢ ⟸ $\boxed{\text{س} = \text{ص} + ٢}$

بالتعويض في المعادلة (١) نحصل على :-

٥س + ص = ١

٥(ص + ٢) + ص = ١

٥ص + ١٠ + ص = ١

٦ص = ١ − ١٠ ⟸ ٦ص = −٩ ⟸ $\boxed{\text{ص} = \frac{-٩}{٦}}$

ص = $\frac{-٣}{٢}$ ⟸ $\boxed{\text{ص} = -١,٥}$

بالتعويض قيمة ص = −١,٥ في المعادلة (٢) :-

س − (−١,٥) = ٢ ⟸ س + ١,٥ = ٢

س = ٢ − ١,٥

$\boxed{\text{س} = \frac{١}{٢}}$

٤ - معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد :-

يكتب هذا النوع من المعادلات على الصورة التالية:

$$\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = \text{صفر}$$

حيث أ، ب، جـ ∈ ح ، أ ≠ صفر

بعض الحالات المختلفة من هذه الصيغ :-

أ- في حالة ب = صفر :- (يصبح شكل المعادلة السابقة كالآتي)

$$\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{جـ} = \text{صفر}$$ (تسمى معادلة تربيعية)

وحل هذا النوع من المعادلات يكون على الصورة :-

$$\text{س} = \pm\sqrt{\frac{-\text{جـ}}{\text{أ}}}$$ ($\frac{-\text{جـ}}{\text{أ}}$: عدد غير سالب)

مثال :- اوجد قيم س من المعادلة

$$\text{س}^2 - ٤٩ = \text{صفر} .$$

الحل :- $\text{س}^2 = ٤٩$ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

$$\text{س} = \pm\sqrt{٤٩} = \pm ٧ .$$

$$\text{س}^2 + ٤٩ = \text{صفر}$$

$$\text{س}^2 = -٤٩ \Leftarrow \text{س} = \pm\sqrt{-٤٩}$$ (عدد غير حقيقي)

لا يوجد حل .

ب) اذا كانت أ س^{٢} + ب س = صفر ، أ ≠ صفر .

يتم حل هذا النوع من المعادلات بأخذ س كعامل مشترك لتصبح المعادلة على الصورة :

أ س^{٢} + ب س = صفر

س (أ س + ب) = صفر

حل هذه المعادلة تكون على النحو الآتي :

س = صفر أو أ س + ب = صفر

ومنه **س = $\frac{-ب}{أ}$**

مثال : حل المعادلة

٥ س^{٢} + ٩ س = صفر

الحل :- س (٥ س + ٩) = صفر

إما **س = صفر** وإما ٥ س + ٩ = صفر

٥ س = ٩-

س = $\frac{٩-}{٥}$

مثال :- حل المعادلة

٣ س^{٢} − ٩ س = صفر

اخراج عامل مشترك ٣ س (س − ٣) = صفر ⇐ ٣ س = صفر ⇐ **س = صفر**

س − ٣ = صفر ⇐ **س = ٣**

جـ) إذا كانت أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر ، أ ≠ صفر ، ب ≠ صفر ، جـ ≠ صفر

ويمكن حل هذا النوع من المعادلات بأحد الطريقتين التاليتين :-

١) طريقة التحليل : وتتم من خلال تحليل المعادلة التربيعية إلى مقدارين جبريين نستخدم القاعدة التالية :.

قاعدة : حاصل ضرب مقدارين جبريين يساوي صفر فهذا يعني أن أحد المقدارين يساوي صفر أو المقدار الآخر يساوي صفر .

مثال ١ :- أوجد قيم س التي تحقق المعادلة

س^{٢} − ٧ س + ١٠ = صفر .

(س − ٢)(س − ٥) = صفر

س − ٢ = صفر ⟸ $\boxed{س = ٢}$ (حلين للمعادلة التربيعية)

س − ٥ = صفر ⟸ $\boxed{س = ٥}$

مثال ٢ :. أوجد قيم س التي تحقق المعادلة

س^{٢} − ٢ س + ١ = صفر .

(س − ١)(س − ١) = صفر

س − ١ = صفر ⟸ $\boxed{س = ١}$ (لاحظوا أن للمعادلة التربيعية حل واحد فقط)

للتأكد من صحة الحل :-

(١)^{٢} − ٢(١) + ١ $\overset{?}{=}$ صفر

١ − ٢ + ١ = صفر

حل اسئلة الواجب الأول

س١: ناتج قسمة المقدار

$٢٠س^{٢} - ٥س^{٣} + ٥س$

على المقدار

$٥س$ ؟

الحل: $\frac{٢٠س^{٢} - ٥س^{٣} + ٥س}{٥س} = \frac{٢٠س^{٢}}{٥س} - \frac{٥س^{٣}}{٥س} + \frac{٥س}{٥س}$

$= ٤س - س^{٢} + ١$

س٢: قيمة المقدار لو (١٠٠×١٠^{-٢}) ؟

الحل: لو $(١٠٠ \times ١٠^{-٢}) =$ لو $(١٠٠ \times \frac{١}{١٠^{٢}})$

$=$ لو $(١٠٠ \times \frac{١}{١٠٠})$

$=$ لو $\frac{١٠٠}{١٠٠} =$ لو ١ $=$ صفر

طريقة أخرى:

لو $(١٠٠ \times ١٠^{-٢}) =$ لو ١٠٠ + لو $١٠^{-٢}$

$=$ لو $١٠^{٢}$ + لو $١٠^{-٢}$

$= ٢$ لو ١٠ $- ٢$ لو ١٠

$= ٢(١) - ٢(١) =$ صفر

س٣ : إن قيمة المقدار $(٣^٢ - ٧ + ٢)^٢$ ؟

الحل :- $(٣^٢ - ٧ + ٢)^٢ = (٩ - ٧ + ٢)^٢$
$= (٢ + ٢)^٢ = (٤)^٢ = ١٦$.

س٤ : اذا كانت لو١٠٠٠ = س فإن قيمة س تساوي ؟

الحل :- لو١٠٠٠ = س $\Leftarrow$ $١٠٠٠ = ١٠^{س}$
$١٠^٣ = ١٠^{س}$ $\Leftarrow$ س = ٣

س٥ : ناتج جمع المقدار $٣س^٢ - ٥ص^٣ - ٢ع^٤$
والمقدار $٤ص^٣ + ٢ع^٤ - ٣س^٢$ ؟

الحل : اعادة ترتيب حدود المقدار الأول والثاني مع وضع عملية الجمع :

$$\begin{array}{r} ٣س^٢ - ٥ص^٣ - ٢ع^٤ \\ + \quad -٣س^٢ + ٤ص^٣ + ٢ع^٤ \\ \hline \text{صفر} - ص^٣ + \text{صفر} \end{array}$$

س٦ : الجذر التكعيبي للمقدار $-١٢٥ س^{-٣} ص^٦$ ؟

$\sqrt[٣]{-١٢٥ س^{-٣} ص^٦} = \sqrt[٣]{-١٢٥} \times \sqrt[٣]{س^{-٣}} \times \sqrt[٣]{ص^٦} = -٥ س^{-١} ص^٢$

$= \dfrac{-٥ص^٢}{س}$

شكراً لحضوركم وحسن استماعكم

د. رائد الخصاونة

المحاضرة الأولى من
الاسبوع الثامن

الباب الخامس: المعادلات

انواع المعادلات :-

١) معادلات خطية في مجهول واحد (س) .

أ س = جـ .

٢) معادلات خطية في مجهولين .

أ س + ب ص = جـ .

٣) معادلات خطية آنية في مجهولين .

أ س$_{١}$ + ب ص$_{١}$ = جـ$_{١}$

أ س$_{٢}$ + ب ص$_{٢}$ = جـ$_{٢}$.

٤) معادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد :

أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر .

ومنها :-

أ) أ س^{٢} + ب س = صفر (جـ = صفر)

ب) أ س^{٢} + جـ = صفر (ب = صفر)

جـ) أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر (أ ≠ صفر، ب ≠ صفر، جـ ≠ صفر)

ويمكن حل هذا النوع من المعادلات بأحد الطرق التالية :-

١) طريقة التحليل (المقص) .

٢) طريقة القانون العام :-

والصيغة العامة لهذه الطريقة تكتب على النحو التالي :-

$$س = \frac{-ب \mp \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} .$$

حيث أ : معامل $س^{٢}$
ب : معامل س
جـ : الحد الثابت.

لاحظوا أن المقدار $(ب^{٢} - ٤أجـ)$ يسمى بالمميز ويرمز له بالرمز م

ويوجد هنالك ثلاث حالات للمميز :-

① إذا كانت م > صفر، يكون للمعادلة $أس^{٢} + بس + جـ = صفر$
حلين حقيقين مختلفين هما :-

$$س_{١} = \frac{-ب + \sqrt{م}}{٢أ} ، \quad س_{٢} = \frac{-ب - \sqrt{م}}{٢أ} .$$

(ويسميان أيضاً جذرا المعادلة).

② إذا كانت م = صفر، يكون للمعادلة $أس^{٢} + بس + جـ = صفر$
حل وحيد فقط وهو $س = \frac{-ب}{٢أ}$.

③ إذا كانت م < صفر، يكون للمعادلة $أس^{٢} + بس + جـ = صفر$
حلين غير حقيقين (بمعنى أنه لا يوجد حلول حقيقية لهذه المعادلة)

مثال :- حل المعادلات التالية باستخدام القانون العام :

١) $٢س^{٢} + س - ١٥ = صفر$.

٢) $س^{٢} + ٢س + ٣ = صفر$.

٣) $٢س^{٢} - ٢س = -\frac{١}{٢}$.

الحل :

① $٢س^{٢} + س - ١٥ = صفر$.

لاحظوا أن أ = ٢ ، ب = ١ ، جـ = −١٥ .

وباستخدام قانون المميز نحصل على :-

$ب^{٢} - ٤أجـ = ١^{٢} - ٤(٢)(-١٥) = ١ + ١٢٠ = ١٢١$.

وبما أن المميز > صفر ، إذاً للمعادلة حلان حقيقيان هما :-

$س_{١} = \frac{-١ + \sqrt{١٢١}}{٢(٢)} = \frac{-١ + ١١}{٤} = \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢} = ٢،٥$.

$س_{٢} = \frac{-١ - \sqrt{١٢١}}{٢(٢)} = \frac{-١ - ١١}{٤} = \frac{-١٢}{٤} = -٣$.

② $س^{٢} + ٢س + ٣ = صفر$.

لاحظوا أنه هنا أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = ٣ .

وبحساب المميز $ب^{٢} - ٤أجـ$ نحصل على :-

$٤ - ٤(١)(٣) = ٤ - ١٢ = -٨ < صفر$.

لا توجد حلول حقيقية لهذه المعادلة

حيث أن المميز سالباً .

٣) $٢س^{٢} - ٢س = \frac{-١}{٢}$.

لحل هذه المعادلة من الأسهل إعادة كتابتها على الصورة العامة

$٢س^{٢} - ٢س + \frac{١}{٢} = صفر$.

أ = ٢ ، ب = −٢ ، جـ = $\frac{١}{٢}$.

وباستخدام قانون المميز نحصل على :

$(-٢)^{٢} - ٤(٢)(\frac{١}{٢}) = ٤ - ٤ = صفر$

إذن المعادلة لها حل حقيقي واحد هو :

$س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٢)}{٢(٢)} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$.

ولو أردنا التأكد من صحة الحل، فإننا نقوم بتعويض قيمة

س = $\frac{١}{٢}$ في المعادلة الأصلية لنحصل على :

$٢س^{٢} - ٢س = \frac{-١}{٢}$

عندما س = $\frac{١}{٢}$:

$٢(\frac{١}{٢})^{٢} - ٢(\frac{١}{٢}) \overset{?}{=} \frac{-١}{٢}$

$٢(\frac{١}{٤}) - ١ \overset{?}{=} \frac{-١}{٢}$

$\frac{١}{٢} - ١ \overset{?}{=} \frac{-١}{٢}$

$\frac{-١}{٢} = \frac{-١}{٢}$ ∴ الحل صحيح .

ملاحظة: عند استخدام القانون العام لإيجاد جذور معادلة تربيعية بمتغير واحد، لابد من كتابة المعادلة في الصورة العامة:

$$\text{أ س}^{2} + \text{ب س} + \text{جـ} = \text{صفر}$$

⑤ المتراجحات الخطية بمجهول واحد :-

- تعريف: المتراجحة هي عبارة عن معادلة ولكن تأخذ أحد الإشارات التالية :-

< ، > ، ≤ ، ≥ بدلاً من إشارة المساواة

مثال: ٢س + ١١ > ٥س - ١ (متراجحة خطية بمجهول واحد).

٤س + ٣ ≤ ١

هي أمثلة على متراجحات خطية بمجهول واحد.

- عملية حل المتراجحات الخطية بمجهول واحد (س) هي عبارة عن إيجاد قيمة ~~الد~~ المتغير س الذي يحقق طرفي المتراجحة المعطاة، ويجب ملاحظة أن إشارة المتراجحة تتغير عند الضرب أو القسمة بعدد سالب، أما بقية العمليات كالجمع أو الطرح من عدد موجب أو سالب وكذلك القسمة والضرب لعدد موجب فتبقى إشارة المتراجحة كما هي دون تغيير.

مثال ١ : اوجد حل المتراجحة التالية :

٣س + ١١ ≥ ٥س - ١ .

الحل : نستخدم نفس الاسلوب المشابه لطريقة حل المعادلات الخطية في مجهول واحد حيث نقوم بتجميع الحدود التي تحتوي على المتغير س في طرف والاعداد الحقيقية في الطرف الآخر .

٣س - ٥س ≥ -١ - ١١

-٢س ≥ -١٢

وبالقسمة على معامل س (-٢) نحصل على :-

س ≤ ٦ (لاحظوا ان اشارة المتراجحة تغيرت عند القسمة على العدد -٢)

وبالتالي فإن مجموعة حل هذه المتباينة هي : {س ∈ ح : س ≤ ٦}

أو ~~(∞ ، ٦]~~

(-∞ ، ٦] .

مثال : اوجد مجموعة حل المتراجحة :-

٤س + ٣ ≥ ١ ؟

الحل : ٤س ≥ ١ - ٣

٤س ≥ -٢

س ≥ -٢/٤ (قسمة الطرفين على معامل س = ٤)

$س \geq -\frac{١}{٢}$.

مجموعة الحل = $\{ س \in ح : س \geq -\frac{١}{٢} \} = \left[-\frac{١}{٢} ، \infty\right)$.

- بعض التمارين على الباب الخامس :-

س: أوجد حل كل من المعادلات التالية :-

أ) $-٤س - ٥ = -٦س + ٥$.

الحل: $-٤س + ٦س = ٥ + ٥$. (تجميع الحدود التي تحتوي على المتغير س في طرف والأعداد الحقيقية في الطرف الآخر) .

$٢س = ١٠$

$\boxed{س = ٥}$

ب) $٣س - ٥ = ٢ص$.

الحل: $\frac{٣س}{٣} = \frac{٢ص + ٥}{٣}$

$\boxed{س = \frac{٢ص + ٥}{٣}}$

نلاحظ أنه لدينا عدد لا نهائي من الحلول حيث أن قيمة المتغير س تعتمد على قيمة المتغير ص .

نفرض أن: ص = ٥ ، فتصبح قيمة س كالتالي :-

$س = \frac{٢(٥) + ٥}{٣} \Leftarrow س = \frac{١٥}{٣} \Leftarrow \boxed{س = ٥}$

ج) ٢س − ٣ص = ٧ ـــــ (١)

٣س + ص = ٥ ـــــ (٢)

الحل: باستخدام طريقة الحذف، نحصل على:

نضرب المعادلة الثانية بالعدد ٣:

٢س − ~~٣ص~~ = ٧

٩س + ~~٣ص~~ = ١٥

١١س = ٢٢ ⇐ س = ٢٢/١١ ⇐ س = ٢

بتعويض قيمة س = ٢ في المعادلة (٢)، نحصل على:

٣(٢) + ص = ٥ ⇐ ص = ٥ − ٦ ⇐ ص = ١⁻

حل آخر: باستخدام طريقة التعويض:

من خلال المعادلة الثانية، نجد كتابة ص بدلالة س:

ص = ٥ − ٣س ـــــ (٣)

نعوض المعادلة (٣) في المعادلة (١) لنحصل على:

٢س − ٣(٥ − ٣س) = ٧

٢س − ١٥ + ٩س = ٧

١١س = ٧ + ١٥

١١س = ٢٢ ⇐ س = ٢

وبتعويض قيمة س = ٢ في المعادلة (٢) نحصل على قيمة ص حيث:

٣(٢) + ص = ٥

ص = ١⁻

د) $٣س^{٢} + ٥س = \text{صفر}$.

الحل : بأخذ س العامل مشترك من الطرف الأيمن، نحصل على :-

$س\,(٣س + ٥) = \text{صفر}$ ،

$\boxed{س = \text{صفر}}$ أو $٣س + ٥ = \text{صفر}$

$٣س = -٥ \Leftarrow \boxed{س = \frac{-٥}{٣}}$

هـ) $٤س^{٢} - ١٢س + ٩ = \text{صفر}$

الحل : باستخدام القانون العام، يمكن ايجاد حل هذا النوع من المعادلات (لاحظوا أن معامل $س^{٢} \neq ١$).

من خلال المميز :-

$٣ = ب^{٢} - ٤أجـ = (-١٢)^{٢} - ٤(٤)(٩)$

$= ١٤٤ - ١٤٤$

$= \text{صفر}$.

∴ للمعادلة حل وحيد فقط :-

$س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-١٢)}{٢(٤)} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$.

للتأكد :-

$٤(\frac{٣}{٢})^{٢} - ١٢(\frac{٣}{٢}) + ٩ \overset{?}{=} \text{صفر} \Leftarrow ٩ - ١٨ + ٩ = \text{صفر}$

$\text{صفر} = \text{صفر}$

∴ الحل صحيح

بداية المحاضرة ليوم الثلاثاء
من الاسبوع الثامن

الباب السادس (المصفوفات)

تعريف :- المصفوفة هي عبارة عن تنظيم الاعداد مرتبة على شكل صفوف أو أعمده في جدول مستطيل الشكل بحيث يتكون هذا المستطيل من م من الصفوف و ن من الأعمدة ، سنرمز للمصفوفات بحروف عربية كبيرة تحتها خط مثل أ ، ب ، جـ ، .... وذلك لتمييز المصفوفة عن عناصرها .

تسمى الاعداد المكونة للمصفوفة بعناصر المصفوفة ، وستكتب اي المصفوفة على الصورة العامة من الرتبة م × ن كالتالي :-

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{١٢} & \cdots & \text{أ}_{١ن} \\ \text{أ}_{٢١} & \boxed{\text{أ}_{٢٢}} & \cdots & \text{أ}_{٢ن} \\ \vdots & & & \\ \text{أ}_{م١} & \text{أ}_{م٢} & \cdots & \text{أ}_{من} \end{bmatrix}$$

لاحظوا أن العنصر $\text{أ}_{٢٢}$ هو العنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الثاني ، وسمي هذا بدليل العنصر .

مثال :-

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٥ & \boxed{-١} \\ -٢ & ٧ & ١ \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة مكونه من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة و ٩ عناصر ، والعنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الثالث = -١

يقال أن رتبة أي مصفوفة هي عدد الصفوف X عدد الأعمدة

فالمصفوفة السابقة أ هي من الرتبة ٣X٣ .

مثال :- $ب = \begin{bmatrix} ١ & -٣ & ١ \end{bmatrix}$ ← صف واحد وثلاثة أعمدة

مصفوفة من الرتبة ١X٣ .

مثال :- $جـ = \begin{bmatrix} ١ \\ -٣ \\ ١ \end{bmatrix}$ ← ٣ صفوف ، ↓ عمود واحد

مصفوفة من الرتبة ٣X١

* أنواع المصفوفات :

١) المصفوفة المستطيلة :- حيث عدد الصفوف ≠ عدد الأعمدة .

مثال :- $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ & ٣ \end{bmatrix}$ من الرتبة ٢X٣

عدد عناصر = ٦

٢) المصفوفة المربعة : إذا كانت المصفوفة من الرتبة مXم (أي عدد الصفوف = عدد الأعمدة) فنقول بأن المصفوفة مربعة الشكل :

مثال :- $ب = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & صفر \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة رتبتها ٢X٢ وتحتوي ٤ عناصر .

٣) المصفوفة الصفرية :- وهي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز صفر ، مثال :- $صفر_{٢X٢} = \begin{bmatrix} صفر & صفر \\ صفر & صفر \end{bmatrix}$

٤) المصفوفة القطرية :- هي المصفوفة المربعة التي جميع عناصرها أصفاراً ما عدا العناصر الواقعة على القطر (على الأقل احد عناصر القطر لا يساوي صفراً) .

مثال :- $\underline{أ} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} & ١ \\ \text{صفر} & ٢ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \end{bmatrix}_{٣\times٣}$ مصفوفة قطرية .

٥) مصفوفة الوحدة :- هي المصفوفة القطرية التي يكون فيها جميع عناصر القطر تساوي العدد واحد .

مثال :- $\underline{أ} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & ١ \\ ١ & \text{صفر} \end{bmatrix}$ مصفوفة الوحدة من الرتبة ٢×٢ .

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} & ١ \\ \text{صفر} & ١ & \text{صفر} \\ ١ & \text{صفر} & \text{صفر} \end{bmatrix}$ مصفوفة الوحدة من الرتبة ٣×٣

تعريف :- يقال أن المصفوفتين $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ متساويتان إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :-

(١) رتبة المصفوفة $\underline{أ}$ = رتبة المصفوفة $\underline{ب}$.

(٢) العناصر المتناظرة في كلا المصفوفتين متساوية .

بمعنى العنصر $أ_{هـ و} = ب_{هـ و}$ حيث هـ = ١، ٢، ــــ م
و = ١، ٢، ــــ ن

مثال :- اوجد قيمة س ، ص حيث

$$\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} & ٥ \\ \text{ص} & ٢ \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{س} = ١ \\ \text{ص} = -٣ \end{matrix}$$

- العمليات الجبرية على المصفوفات :-

١) جمع مصفوفتين ، ٢) طرح مصفوفتين ، ٣) ضرب مصفوفة بعدد ثابت
٤) ضرب مصفوفتين .

١) جمع مصفوفتين :- اذا كان $\text{أ} = [\text{أ}_{\text{هو}}]$ ، $\text{ب} = [\text{ب}_{\text{هو}}]$

من الرتبة م × ن فإن مجموعهما هو المصفوفة

شرط التساوي بالرتب

$[\text{أ}_{\text{هو}} + \text{ب}_{\text{هو}}]$ من الرتبة م × ن .

يعني $\text{أ} + \text{ب} = [\text{أ}_{\text{هو}}] + [\text{ب}_{\text{هو}}] = [\text{أ}_{\text{هو}} + \text{ب}_{\text{هو}}]$.

مثال :- اذا كانت

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ \text{صفر} & -١ & -٥ \end{bmatrix}_{٢\times٣} \quad , \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} -٢ & ٤ & ٥ \\ ١ & -١ & ٣ \end{bmatrix}_{٢\times٣}$$

أوجد ١) أ + ب

٢) ب + أ

٣) أ + أ

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣^{-} \\ ٣ & ١^{-} & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥^{-} & ١^{-} & \text{صفر} \end{bmatrix} = \underline{ب} + \underline{أ}$$:- الحل

$$= \begin{bmatrix} ٥+٣ & ٤+٢ & ٣^{-}+١ \\ ٣+٥^{-} & ١^{-}+١^{-} & ١+\text{صفر} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٨ & ٦ & ٢^{-} \\ ٢^{-} & ٢^{-} & ١ \end{bmatrix}$$

٣×٢

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥^{-} & ١^{-} & \text{صفر} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣^{-} \\ ٣ & ١^{-} & ١ \end{bmatrix} = \underline{أ} + \underline{ب}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣+٥ & ٢+٤ & ١+٣^{-} \\ ٥^{-}+٣ & ١^{-}+١^{-} & ١+\text{صفر} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٨ & ٦ & ٢^{-} \\ ٢^{-} & ٢^{-} & ١ \end{bmatrix}$$

نقول بأن عملية الجمع على المصفوفات عملية ابدالية .

$$\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ب} + \underline{أ} \; .$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥^{-} & ١^{-} & \text{صفر} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥^{-} & ١^{-} & \text{صفر} \end{bmatrix} = \underline{أ} + \underline{أ}$$

$$= \begin{bmatrix} ٦ & ٤ & ٢ \\ ١٠^{-} & ٢^{-} & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

وفي الواقع نلاحظ أن $\underline{أ} + \underline{أ} = ٢\,\underline{أ}$.

مثال :- اوجد $\underline{أ} + \underline{أ} + \underline{أ} + \underline{أ} = ٤\,\underline{أ} = ٤ \times \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥^{-} & ١^{-} & \text{صفر} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ١٢ & ٨ & ٤ \\ ٢٠^{-} & ٤^{-} & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

٢) طرح مصفوفتين :-

إذا كانت $\underline{\text{أ}} = [\text{أ}_{\text{هو}}]$ ، $\underline{\text{ب}} = [\text{ب}_{\text{هو}}]$ من الرتبة م × ن

فإن

$$\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} = [\text{أ}_{\text{هو}}] - [\text{ب}_{\text{هو}}] = [\text{أ}_{\text{هو}} - \text{ب}_{\text{هو}}]$$

مثال: إذا كانت

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} ، \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ \text{صفر} & ٣ \end{bmatrix}$$

أوجد :-

① $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}}$

② $\underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}}$

الحل: $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ \text{صفر} & ٣ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ٥ - ٢ & ٣ - ١ \\ -٢ - \text{صفر} & ١ - ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٢ & -٢ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ \text{صفر} & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٣ & -٢ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$$

نستنتج أن أ − ب ≠ ب − أ .

أ − ب = − (ب − أ) .

نلاحظ من الأمثلة السابقة أن عملية الجمع والطرح تتم من خلال العناصر المتناظرة بينهما ولا يمكن جمع أو طرح مصفوفتين من رتبتين مختلفتين .

مثال :- أوجد ناتج ما يلي :-

١) أ + ب   حيث أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ ٣×٢

٢) ب − أ   ب = $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -٥ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ ٣×٢

٣) أ − أ

الحل : ١) أ + ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -٥ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & -٤ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ٣×٢

٢) ب − أ = $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -٥ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ ٥ & -٦ \\ ٣ & -٦ \end{bmatrix}$

٣) أ − أ = صفر ٣×٢ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ٣×٢

نهاية المحاضرة يوم الأربعاء ١١ الأسبوع الثامن

بداية محاضرة يوم الأحد
من الأسبوع الثامن

تابع الباب السادس من المصفوفات

٣) ضرب مصفوفة في عدد حقيقي :-

إذا كانت أ = [أ هـ و] مصفوفة من الرتبة م × ن وكان
ك عدد حقيقياً فإن حاصل ضرب المصفوفة أ بالعدد ك
هو المصفوفة ك أ = [ك أ هـ و] .

مثال : اذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ١ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix}$ فإن المصفوفة ٥ أ هي :-

$$٥ أ = ٥ \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ١ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ & ١٠ \\ ٢٥ & ٥ \\ ١٠ & ٥- \end{bmatrix}$$

ملاحظة : إذا كانت أ ، ب مصفوفتين من الرتبة م × ن ،
وكان ك ، ل ∈ ح فإن :-

١) ك (أ + ب) = ك أ + ك ب .

٢) ك (ل أ) = (ك ل) أ

٣) ك أ = صفر إذا فقط وإذا ك = صفراً أو أ = صفر

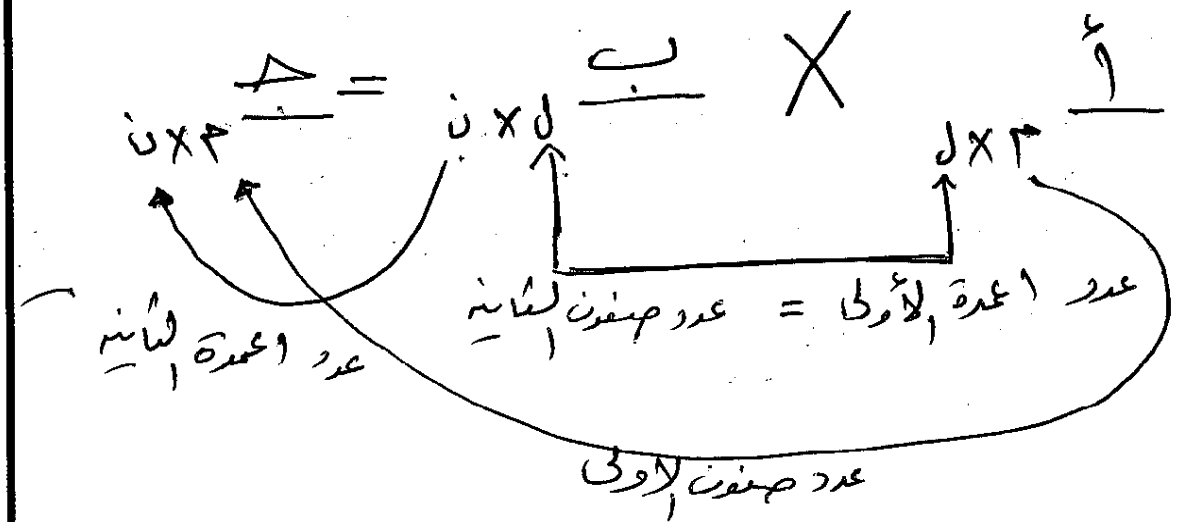
٤) ١ أ = أ ١ = أ .

٥) اذا كانت ك ≠ صفر وكانت ك أ = ك ب فإن أ = ب .

٤) ضرب مصفوفتين :-

إذا كانت أ = [أهو] مصفوفة رتبتها ٣ × ل ، وكانت ب = [بهو] مصفوفة رتبتها ل × ن ، فإن ضرب المصفوفة أ في المصفوفة ب هو المصفوفة جـ = [جـهو] ورتبتها ٣ × ن .

بشكل آخر :-



(حتى تكون عملية ضرب المصفوفات معرّفة ، يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية ، ورتبة حاصل ضربهما تساوي عدد صفوف الأولى مضروب في عدد أعمدة الثانية

وتتم عملية ضرب مصفوفتين على النحو الآتي :

$$\begin{bmatrix} ب_{٢١} & ب_{١١} \\ ب_{٢٢} & ب_{١٢} \end{bmatrix} = ب \quad ، \quad \begin{bmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{bmatrix} = أ$$

٢ × ٢ ⟷ ٣ × ٢
متساوية

أب ٣ × ٢

ويتم عملية الضرب على النحو التالي :-

$$\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{١٢} \\ \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٢٢} \\ \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٣٢} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ب}_{١١} & \text{ب}_{١٢} \\ \text{ب}_{٢١} & \text{ب}_{٢٢} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١}\text{ب}_{١١} + \text{أ}_{١٢}\text{ب}_{٢١} & \text{أ}_{١١}\text{ب}_{١٢} + \text{أ}_{١٢}\text{ب}_{٢٢} \\ \text{أ}_{٢١}\text{ب}_{١١} + \text{أ}_{٢٢}\text{ب}_{٢١} & \text{أ}_{٢١}\text{ب}_{١٢} + \text{أ}_{٢٢}\text{ب}_{٢٢} \\ \text{أ}_{٣١}\text{ب}_{١١} + \text{أ}_{٣٢}\text{ب}_{٢١} & \text{أ}_{٣١}\text{ب}_{١٢} + \text{أ}_{٣٢}\text{ب}_{٢٢} \end{bmatrix}_{٣\times٢}$$

مثال :- إذا كانت

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٢ & \text{ص} \end{bmatrix}_{٢\times٢} ، \quad \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}_{٢\times٢}$$

$$\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٢ & \text{ص} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٢\times٥ + ١\times٢ & -٢\times-٢ + ١\times٤ \\ ٢\times٥ + \text{ص}\times٢ & ٢\times-٢ + \text{ص}\times٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٨ & ٨ \\ ١٠ & -٤ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{ب}}\,\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٢ & \text{ص} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٥\times-٢ + -٢\times٢ & ٥\times١ + -٢\times\text{ص} \\ ٢\times-٢ + ٤\times٢ & ٢\times١ + ٤\times\text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٤ & ٥ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

ملاحظة : $\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}} \neq \underline{\text{ب}}\,\underline{\text{أ}}$ (ضرب المصفوفات عملية غير ابدالية)

مثال: إذا كانت

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٤^- & ٣ & ٢ \\ ٧ & ١^- & ٠ \end{bmatrix}_{٣\times٤} ،\quad \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ١^- & ٣ \\ ٧ & ٤^- \end{bmatrix}_{٢\times٣}$$

المطلوب ايجاد:

١) $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}$ ٢) $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}}$

الحل: $\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٤^- & ٣ & ٢ \\ ٧ & ١^- & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ١^- & ٣ \\ ٧ & ٤^- \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ٧\times٤^- + ١^-\times٣ + ٠\times٢ & ٤^-\times٤^- + ٣\times٣ + ٢\times٢ \\ ٧\times٧ + ١^-\times١^- + ٠\times٠ & ٤^-\times٧ + ٣\times١^- + ٢\times٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢٨^- + ٣^- + ٠ & ١٦ + ٩ + ٤ \\ ٤٩ + ١ + ٠ & ٢٨^- + ٣^- + ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣١^- & ٢٩ \\ ٥٠ & ٣١^- \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{ب}}\,\underline{\text{أ}} = \underline{\text{ب}}_{٢\times٣} \times \underline{\text{أ}}_{٣\times٢} \quad \text{معرفة}$$

$$= \begin{bmatrix} ٤^- & ٣ & ٢ \\ ٧ & ١^- & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ١^- & ٣ \\ ٧ & ٤^- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{صفر} + ٨^- & \text{صفر} + ٦ & \text{صفر} + ٤ \\ ٧^- + ١٢^- & ١ + ٩ & \text{صفر} + ٦ \\ ٤٩ + ١٦ & ٧^- + ١٢^- & \text{صفر} + ٨^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨^- & ٦ & ٤ \\ ١٩^- & ١٠ & ٦ \\ ٦٥ & ١٩^- & ٨^- \end{bmatrix}_{٣\times٣}$$

تعريف: إذا كانت أ مصفوفة م×ن ، فإن المصفوفة التي نحصل عليها من أ بعد تبديل الصفوف مع الأعمدة تسمى مبدل أو منقول المصفوفة أ ويرمز لها بالرمز أ/ ن×م

مثال: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}_{٣×٢}$ فإن $أ/ = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ & ٥ \\ ٤ & ١ & ١ \end{bmatrix}_{٢×٣}$

تعريف: إذا كانت أ مصفوفة مربعة وكانت أ = أ/ فإن أ تسمى مصفوفة متماثلة.

مثال: $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ & -٢ \\ ٣ & -٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $أ/ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ & -٢ \\ ٣ & -٢ & ٠ \end{bmatrix}$

لاحظوا أن أ/ = أ (أ مصفوفة متماثلة)

تعريف: إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين بحيث: أ ب = ب أ = مصفوفة الوحدة فإن ب يسمى النظير الضربي (معكوس ضربي) للمصفوفة أ.

مثال: إذا كانت

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & صفر \\ +١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & صفر \\ \frac{١}{٢} & -١ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} & \frac{١}{٢} \\ ١- & \frac{١}{٢} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{صفر} & ٢+ \\ ١- & ١+ \end{bmatrix} = \underline{\text{ب}}\ \underline{\text{أ}}$$

$$= \begin{bmatrix} ١-\times\text{صفر} + \text{صفر}\times ٢ & \frac{١}{٢}\times\text{صفر} + \frac{١}{٢}\times ٢ \\ ١-\times ١- + \text{صفر}\times ١ & \frac{١}{٢}\times ١- + \frac{١}{٢}\times ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{صفر} & ١ \\ ١ & \text{صفر} \end{bmatrix}_{٢\times٢}$$

مصفوفة الوحدة .

∴ المصفوفة ب هي نظير ضربي للمصفوفة أ .

نهاية الباب السادس

نهاية محاضرة يوم الثلاثاء
من الأسبوع الثامن

بداية محاضرة يوم الثلاثاء
من الأسبوع الثالث

الباب السابع: المحددات

تعريف: اذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن × ن، فإنه يرافقها عدد حقيقي يسمى محدد المصفوفة أ ويرمز له بالرمز |أ|.

سنتعرف في هذا الفصل على محدد مصفوفة من الرتبة ١×١، ٢×٢ وأخيراً مصفوفة من الرتبة ٣×٣.

أولاً: محدد مصفوفة من الرتبة ١×١ :-

إذا كانت أ = [م١١]، نُعرف محدد أ بأنه |أ| = م١١ .

مثال:- اذا كانت لدينا المصفوفة أ = [٥]، فإن |أ| = ٥ .

ثانياً: محدد مصفوفة من الرتبة ٢×٢ :-

اذا كانت أ = $\begin{bmatrix} م_{٢١} & م_{١١} \\ م_{٢٢} & م_{١٢} \end{bmatrix}$ ، فإن محدد أ نُعرفه على النحو الآتي :-

$$م_{١٢}\,م_{٢١} - م_{٢٢}\,م_{١١} = |أ|$$

(محدد مصفوفة ٢×٢ = حاصل ضرب عناصر القطر الأول ـ حاصل ضرب عناصر القطر الثاني.

مثال :- اوجد محدد المصفوفات التالية :-

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \underline{ب} \quad ②\,، \qquad \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = \underline{أ} \quad ①$$

الحل ①

$$(٣-\times ١) - ٢\times ٢ = |\underline{أ}|$$

$$.\; ٧ = ٣ + ٤ = (٣-) - ٤ =$$

$$.\; ٦- = ٦ - ٠ = (٣\times ٢) - ٤\times ٠ = |\underline{ب}| \quad ②$$

ثالثاً : محدد مصفوفة من الرتبة ٣×٣ :-

إذا كانت

$$\begin{bmatrix} م_{٣١} & م_{٢١} & م_{١١} \\ م_{٣٢} & م_{٢٢} & م_{١٢} \\ م_{٣٣} & م_{٢٣} & م_{١٣} \end{bmatrix} = \underline{أ}$$

فإنه يمكن حساب محدد هذا النوع من المصفوفات بأحد الطرق التالية :-

$$\begin{vmatrix} م_{٢٢} & م_{١٢} \\ م_{٣٣} & م_{١٣} \end{vmatrix} م_{٣١} + \begin{vmatrix} م_{٣٢} & م_{١٢} \\ م_{٣٣} & م_{١٣} \end{vmatrix} م_{٢١} - \begin{vmatrix} م_{٣٢} & م_{٢٢} \\ م_{٣٣} & م_{٢٣} \end{vmatrix} م_{١١} = |\underline{أ}| \quad -١$$

$$(م_{٣٢}م_{١٣} - م_{٣٣}م_{١٢})\, م_{٢١} - (م_{٢٣}م_{٣٢} - م_{٣٣}م_{٢٢})\, م_{١١} =$$

$$.\; (م_{٢٢}م_{١٣} - م_{٣٣}م_{١٢})\, م_{٣١} +$$

مثال : اوجد محدد المصفوفة

$$\begin{bmatrix} ٢- & ٢ & ٣ \\ ١ & ٥- & ٦ \\ ٤ & ٣ & ٠ \end{bmatrix} = \underline{أ}$$

الحل :- $$\begin{vmatrix} ٥- & ٦ \\ ٣ & ٠ \end{vmatrix} ٢- + \begin{vmatrix} ١ & ٦ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} ٢ - \begin{vmatrix} ١ & ٥- \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} ٣ = |\underline{أ}|$$

$$(١\times٠ - ٤\times٦)٢ - (١\times٣ - ٤\times٥-)٣ =$$

$$(٥-\times٠ - ٣\times٦)٢ -$$

$$(١٨)٢ - (٢٤)٢ - (٢٣-)٣ =$$

$$١٥٣- = ٣٦ - ٤٨ - ٦٩- =$$

مثال : اوجد محدد المصفوفة

$$\begin{bmatrix} ١- & ١ & ٠ \\ ٥ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ١- & ١ \end{bmatrix} = \underline{ب}$$

الحل :- $$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١- & ١ \end{vmatrix}(١-) + \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} ١ - \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٠ & ١- \end{vmatrix} ٠ = |\underline{ب}|$$

$$(٣\times١ - ١-\times٢)١ - (٥\times١ - ٠\times٢)١ - \text{صفر} =$$

$$.\ ١٠ = ٥ + ٥ =$$

٢) طريقة ساورس :-

تتلخص هذه الطريقة بأن نكتب العمود الأول والعمود الثاني كعمودين رابع وخامس على التوالي بالشكل الموضح أدناه :-

إذا كانت $$\begin{bmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{bmatrix} = \underline{أ}$$

نقوم بإعادة كتابة المصفوفة أ على الصوره :-

\- \- \-

م١١ م٢١ م٣١ م١١ م٢١

م١٢ م٢٢ م٣٢ م١٢ م٢٢

م١٣ م٢٣ م٣٣ م١٣ م٢٣

\+ \+ \+

وعليه فإن محدد المصفوفة أ يصبح على الصورة التالية :-

|أ| = (م١١ م٢٢ م٣٣ + م٢١ م٣٢ م١٣ + م٣١ م١٢ م٢٣)

\- (م١٣ م٢٢ م٣١ + م٢٣ م٣٢ م١١ + م٣٣ م١٢ م٢١) .

مثال :- أ = $\begin{bmatrix} ٢- & ٢ & ٣ \\ ١ & ٥- & ٦ \\ ٤ & ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

|أ| = ١٥٣-
(حسب الطريقة الأولى) .

الحل :-

$\begin{array}{ccccc} ٢ & ٣ & ٢- & ٢ & ٣ \\ ٥- & ٦ & ١ & ٥- & ٦ \\ ٣ & ٠ & ٤ & ٣ & ٠ \end{array}$

|أ| = (٣ × ٥- × ٤ + ٢ × ١ × ٠ + ٢- × ٦ × ٣)

\- (٠ × ٥- × ٢- + ٣ × ١ × ٣ + ٤ × ٦ × ٢) .

= (٦٠- - ٣٦) - (٩ + ٤٨)

= ٩٦- - ٥٧

= ١٥٣- .

مثال : اوجد محدد المصفوفة :-

$$\begin{bmatrix} ١- & ١ & \text{صفر} \\ ٥ & ٣ & ٢ \\ \text{صفر} & ١- & ١ \end{bmatrix} = \underline{ب}$$

$|\underline{ب}| = ١٠$
حسب الطريقة الأولى .

الحل :-

$$\begin{array}{ccccc} ١ & ٠ & ١- & ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٥ & ٣ & ٢ \\ ١- & ١ & ٠ & ١- & ١ \end{array}$$

$$(١- \times ٢ \times ١- + ١ \times ٥ \times ١ + ٠ \times ٣ \times ٠) = |\underline{ب}|$$

$$. \quad (١ \times ٢ \times ٠ + ٠ \times ٥ \times ١- + ١- \times ٣ \times ١) -$$

$$. \ ١٠ = ٣ + ٧ = (٣-) - (٢ + ٥) =$$

---

* خواص المحددات :-

سوف نستعرض ~~هـ~~ في هذا البند بعض من خواص المحددات والتي تفيد الطالب في عملية حساب قيمتها ، ومن هذه الخواص :-

١) إذا وجد صف أو عمود في مصفوفة مربعة بحيث كانت جميع عناصره أصفار ، فإن محدد تلك المصفوفة = صفر .

مثال :-

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} ١- & ١ & ٠ \\ ٢ & ٢ & ٠ \\ ٧ & ٥ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$. \ \text{صفر} = \begin{vmatrix} ١ & ٢- & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ١- & ٧ & ٥ \end{vmatrix}$$

٢) لا تتغير قيمة المحدد اذا استبدلت الاعمدة بالصفوف والصفوف بالاعمدة:

مثال:-

$$١٣- = \begin{vmatrix} ٥ & ١- \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} \ ①$$

$$٢٤ = \begin{vmatrix} ٠ & ٣ & ٠ \\ ٤ & ١- & ٠ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١- & ٣ \\ ٣ & ٤ & ٠ \end{vmatrix} \ ②$$

٣) عند استبدال صف بصف آخر او عمود بعمود آخر فإن اشارة المحدد تتغير :-

مثال:-

$$. \ ٢٤ = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١- & ٣ \\ ٣ & ٤ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$(\text{صفر})(١-) - (٨-)٣ = \begin{vmatrix} ٠ & ١- & ٣ \\ ٢ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٤ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$. \ ٢٤- =$$

مثال:

$$١٠- = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} - = \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$(١\times٢ - ٤\times٣)- \qquad ٤\times٣ - ٢\times١$$

$$١٠- = (٢ - ١٢) - \qquad ١٠- = ١٢ - ٢$$

٤) إذا تساوت العناصر المتناظرة لعمودين (أو صفين) في مصفوفة أ، فإن |أ| = صفر.

مثال:-

$$\begin{vmatrix} ٥ & -٢ & -٢ \\ ٣ & ٣ & ٣ \\ ٤ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

لأن عناصر العمود الثاني = عناصر العمود الثالث.

$$\begin{vmatrix} -١ & ٢ & ٣ \\ -١ & ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ & ٨ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

(لأن عناصر الصف الأول = عناصر الصف الثاني)

٥) إذا ضربت عناصر عمود أو صف لمصفوفة أ بعدد ثابت وليكن م، فإن قيمة المحدد الناتج بعد عملية الضرب تساوي قيمة المحدد الأصلي مضروباً في العدد م.

مثال: إذا كانت

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} \Longrightarrow |\text{أ}| = ٣ \times ٥ - (٢ \times -١)$$

$$= ١٥ + ٢ = ١٧$$

$\times -٢$

ضربنا عناصر الصف الأول في العدد -٢

فتصبح المصفوفة الجديدة:-

$$\text{ب} = \begin{bmatrix} -٦ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} \Longrightarrow |\text{ب}| = (-٦ \times ٥) - (٢ \times ٢)$$

$$= -٣٠ - ٤$$

$$= -٣٤$$

مثال :- اذا كان محدد المصفوفة أ = ١٠
وضرب الصف الثاني بالعدد -٥ ، فإن
محدد المصفوفة الجديد يساوي :-

١٠ × -٥ = -٥٠ .

٦) محدد المصفوفة القطرية يساوي حاصل ضرب عناصر القطر .

مثال :- اوجد محدد المصفوفة

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & -١ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} & ٢ \end{bmatrix}$$

|أ| = ١ × -١ × ٢
= -٢ .

المحاضرة المباشرة الثالثة

مقرر مبادئ الرياضيات

د. رائد الخصاونة

الاحد: 11-1-1434 هـ
الساعة : الرابعة مساءاً

حل اسئلة المناقشة الأولى

- اوجد ناتج كلاً من المقادير التالية بابسط صورة :

١) (-٥ + ٣) × ٤ ÷ ٢ = (-٢) × ٤ ÷ ٢ = -٨ ÷ ٢ = -٤

٢) $\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٧} = \frac{٧ \times ١}{٧ \times ٢} - \frac{٣ \times ٢}{٧ \times ٢}$

$= \frac{٧}{١٤} - \frac{٦}{١٤} = \frac{١}{١٤}$.

٣) $-\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٧} = \frac{-٣}{١٤}$.

٤) ٩ ÷ ٣ × ٢ - ٥ = ٣ × ٢ - ٥
= ٦ - ٥
= ١

حل اسئلة المناقشة الثانية

اجب عن الأسئلة التالية :

١) قيمة المقدار -لو ١٠٠٠$^{-٣}$

الحل :- -لو ١٠٠٠$^{-٣}$ = -٣ × -١ × لو ١٠٠٠
= ٣ لو ١٠^{٣} = ٣ × ٣ × لو ١٠
= ٩ × ١ = ٩ .

٢) قيمة المتغير س في المقدار لو س = ٣ ؟

الحل: لو س = ٣ ⟸ $١٠^{٣} = س$ ⟸ س = ١٠٠٠

٣) ابسط صورة المقدار $س^{-٣} \times س^{٥} + س^{٢}$ ؟

الحل: $س^{-٣} \times س^{٥} + س^{٢} = \frac{س^{٥}}{س^{٣}} + س^{٢} = س^{٢} + س^{٢}$

$= ٢\,س^{٢}$

٤) ناتج المقدار $\text{لو}\ ١٠٠ - \text{لو}_{٥}\ ٢٥ + \text{لو}_{٥}\ ٥^{-٣} - ٢$ ؟

الحل: $\text{لو}\ ١٠٠ - \text{لو}_{٥}\ ٢٥ + \text{لو}_{٥}\ ٥^{-٣} - ٢$

⇓

$\text{لو}\ ١٠^{٢} - \text{لو}_{٥}\ ٥^{٢} - ٣\ \text{لو}_{٥}\ ٥ - ٢$

$٢\ \text{لو}\ ١٠ - ٢\ \text{لو}_{٥}\ ٥ - ٣\ \text{لو}_{٥}\ ٥ - ٢$

$٢ \times ١ - ٢ \times ١ - ٣ \times ١ - ٢$

$٢ - ٢ - ٣ - ٢ = -٥$

٥) الجذر التكعيبي للعدد $\text{لو}\ ١٠^{-١}$ ؟

$\sqrt[٣]{\text{لو}\ ١٠^{-١}} = \sqrt[٣]{-\text{لو}\ ١٠} = \sqrt[٣]{-١}$

$= -١$

المناقشة الثالثة

السؤال الأول: إذا كان لديك المقدارين

$(س^{٣} - ٥س^{٢})$ ، $(س^{٢} - ٥س)$ أوجد :

١) $(س^{٣} - ٥س^{٢}) + (س^{٢} - ٥س) = س^{٣} - ٤س^{٢} - ٥س$.

٢) $(س^{٢} - ٥س) - (س^{٣} - ٥س^{٢}) = (س^{٢} - ٥س) - س^{٣} + ٥س^{٢}$

$= - س^{٣} + ٦س^{٢} - ٥س$.

٣) $(س^{٣} - ٥س^{٢})(س^{٢} - ٥س) = س^{٣}س^{٢} - ٥س\,س^{٣} - ٥س^{٢}س^{٢} + ٥س^{٢}\,٥س$

$= س^{٥} - ٥س^{٤} - ٥س^{٤} + ٢٥س^{٣}$

$= س^{٥} - ١٠س^{٤} + ٢٥س^{٣}$.

٤) $(س^{٣} - ٥س^{٢}) \div (س^{٢} - ٥س)$.

باستخدام القسمة الطويلة :

$$
\begin{array}{r|l}
س & \\
\hline
س^{٣} - ٥س^{٢} & س^{٢} - ٥س \\
- \quad س^{٣} - ٥س^{٢} & \\
\hline
صفر &
\end{array}
$$

خارج القسمة = س

والباقي = صفر

حل أسئلة المناقشة الرابعة

السؤال الأول : حلل المقادير الجبرية التالية إلى عواملها الأولية :

أ) $٣\text{س ص} - ٩\text{س}^{٢}\text{ص}^{٣} + ٢٧\text{ص} = ٣\text{ص}(\text{س} - ٣\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} + ٩)$
(إخراج عامل مشترك)

ب) $(٢٥\text{س}^{٢} - ٨١\text{ص}^{٢}) = (٥\text{س} - ٩\text{ص})(٥\text{س} + ٩\text{ص})$
(الفرق بين مربعين) .

ج) $(٢٧ + \text{ع}^{٣}) = (٣ + \text{ع})(٩ - ٣\text{ع} + \text{ع}^{٢})$
(مجموع مكعبين)

د) $\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} + ١٦ = (\text{س} - ٨)(\text{س} - ٢)$

السؤال الثاني : إذا كان لدينا المقادير

$$\frac{١}{\text{س}^{٢} - ١} \quad ، \quad \frac{٢}{\text{س} + ١}$$

١) $$\frac{١}{\text{س}^{٢} - ١} + \frac{٢}{\text{س} + ١} = \frac{١}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)} + \frac{٢}{\text{س} + ١} \times \frac{\text{س} - ١}{\text{س} - ١}$$

$$= \frac{١ + ٢\text{س} - ٢}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}$$

$$= \frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} - ١} .$$

٢- حاصل قسمة :-

$$\frac{١}{١-س^{٢}} \div \frac{٢}{١+س} = \frac{١}{١-س^{٢}} \times \frac{١+س}{٢}$$

$$= \frac{١}{\cancel{(١+س)}(١-س)} \times \frac{\cancel{١+س}}{٢}$$

$$= \frac{١}{٢(١-س)}$$

تمارين ومسائل على الفصل الخامس
(المعادلات)

١- أوجد حل كل من المعادلات التالية :-

١) $٧س - ٢ = ٨ - ٣س$

الحل: تجميع الحدود التي تحتوي على المتغير س في طرف والثوابت في الطرف الآخ

$٧س + ٣س = ٨ + ٢ \Leftarrow ١٠س = ١٠ \Leftarrow \boxed{س = ١}$

٢) $٦س - ٣ص + ٥ = صفر$ عندما $ص = -١$ ؟

الحل :- $٦س = ٣ص - ٥$

$\Leftarrow س = \frac{٣ص - ٥}{٦}$

عندما $ص = -١ \Leftarrow س = \frac{٣(-١) - ٥}{٦} \Leftarrow س = \frac{-٨}{٦}$

$س = \frac{-٤}{٣}$

٣) $٧ س^{٢} = ٢١ س$. (معادلة من الدرجة الثانية حيث نلاحظ أنه فيه الحد الثابت = صفر)

الحل :

$٧ س^{٢} - ٢١ س = صفر$

وباخراج عامل مشترك للمتغير س :-

$س (٧ س - ٢١) = صفر$

$\Leftarrow س = صفر$

أو

$٧ س - ٢١ = صفر \Leftarrow ٧ س = ٢١ \Leftarrow س = \frac{٢١}{٧}$

$\Leftarrow س = ٣$

٤) $٣ س^{٢} - ٢ س - ١ = صفر$.

الحل :- معادلة من الدرجة الثانية حيث نلاحظ وجود جميع حدود المعادلة، ومن خلال استخدام المميز والقانون العام نحاول ايجاد جذور هذه المعادلة :-

$المميز = ب^{٢} - ٤ أ جـ = (-٢)^{٢} - ٤ (٣)(-١)$

$= ٤ + ١٢ = ١٦ > صفر$

إذاً للمعادلة جذران مختلفان :-

$س = \frac{- ب \mp \sqrt{المميز}}{٢ أ} \Leftarrow س = \frac{-(-٢) \mp \sqrt{١٦}}{٢ (٣)}$

$= \frac{٢ \mp ٤}{٦}$

$س_{١} = \frac{٦}{٦} = ١$

$س_{٢} = \frac{-٢}{٦} = \frac{-١}{٣}$

٥) ٤س − ٦ < ٦س + ٤

الحل :- متباينة بمتغير واحد :

٤س − ٦س < ٤ + ٦

−٢س < ١٠ بقسمة الطرفين ÷ معامل س = −٢

س > ١٠ / −٢ ⟸ س > −٥

(لاحظ أنه تم تغيير اشارة المتباينة من اصغر الى اكبر بسبب القسمة على عدد سالب)

٦) ٣س − ٢ص = ١٠ ——(١)

س − ص = ٥ ——(٢)

الحل :- باستخدام طريقة الحذف :

(نضرب المعادلة الثانية في العدد ٢)

٣س − ٢ص = ١٠

−٢س + ٢ص = −١٠ نجمع مع تغيير اشارة الثاني

س = صفر

بالتعويض في المعادلة الثانية :

صفر − ص = ٥ ⟸ −ص = ٥

⟸ ص = −٥

الحل باستخدام طريقة التعويض :

من المعادلة الثانية :

س = ص + ٥ ——(٣)

بالتعويض في المعادلة (١) :

٣(ص + ٥) − ٢ص = ١٠

٣ص + ١٥ − ٢ص = ١٠

ص = ١٠ − ١٥

ص = −٥

بالتعويض في ٣ :

س = −٥ + ٥ ⟸ س = صفر

تمارين ومسائل على الفصل السادس

المصفوفات

١- إذا كان لدينا

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix} = \text{ب} \quad ، \quad \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} = \text{أ}$$

أوجد :-

$$\begin{bmatrix} ٤-٥ & ٣-٢ \\ (١-)-١ & ٢-١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} = \text{ب} - \text{أ} \quad (١$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} ٢ = \text{ب} + \text{أ}٢ \quad (٢$$

$$\begin{bmatrix} ١٤ & ٧ \\ ١ & \text{صفر} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٠ & ٤ \\ ٢ & ٢- \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} = \text{ب} \times \text{أ} \quad (٣$$

$$\begin{bmatrix} ١-\times ٥ + ٤\times ٢ & ٢\times ٥ + ٣\times ٢ \\ ١-\times ١ + ٤\times ١- & ٢\times ١ + ٣\times ١- \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ١٦ \\ ٥- & ١- \end{bmatrix} =$$

- إذا كان لدينا

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ١- & ١ & \text{صفر} \\ ٤ & ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \underline{\text{أ}}$$

أوجد $|\underline{\text{أ}}|$ ؟

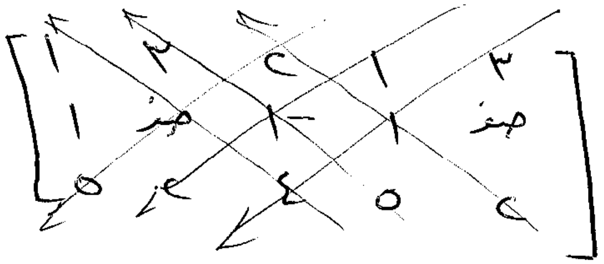
$$\begin{vmatrix} ١ & \text{صفر} \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} ٢ + \begin{vmatrix} ١- & \text{صفر} \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} ١ - \begin{vmatrix} ١- & ١ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} ٣ = |\underline{\text{أ}}|$$

$$(٢-)٢ + (٢)١ - (٥+٤)٣ =$$

$$٢١ = ٤ - ٢ - ٢٧ = \quad .$$

وطريقة أخرى :- ساروس .

$$؟ = |\text{أ}|$$



$$(٥ \times \text{صفر} \times ٢ + ٢ \times ١- \times ١ + ٤ \times ١ \times ٣) = |\text{أ}|$$

$$\overline{}\,(١ \times \text{صفر} \times ٤ + ٣ \times ١- \times ٥ + ٢ \times ١ \times ٢)$$

$$٢١ = ١١ + ١٠ =$$

شاكراً للجميع
حسن الحضور والاستماع

محاضرة يوم الأحد
من الأسبوع الحادي عشر

الباب السابع : المحددات

كيفية ايجاد النظير الضربي لمصفوفة :-

إذا كان لدينا المصفوفة أ ، وأوجدنا مصفوفة أخرى ولتكن ب حيث

أ × ب = ب × أ = مصفوفة الوحدة

عندئذٍ نقول بأن ب هي النظير الضربي للمصفوفة أ .

ونرمز للنظير الضربي للمصفوفة أ بالرمز $\boxed{أ^{-1}}$

ولإيجاد النظير الضربي لمصفوفة ولتكن من الرتبة ٢، فإنه يمكن استخدام الصيغة التالية :-

نقول إذا كانت

$$\begin{bmatrix} م_{١٢} & م_{١١} \\ م_{٢٢} & م_{٢١} \end{bmatrix} = أ$$

فإن

$$\begin{bmatrix} -م_{١٢} & م_{٢٢} \\ م_{١١} & -م_{٢١} \end{bmatrix} \frac{1}{|أ|} = أ^{-1}$$

مثال ١ :- اوجد النظير الضربي للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} \text{١-} & \text{٤} \\ \text{صفر} & \text{١} \end{bmatrix} = \underline{\text{أ}}$$.

الحل: الخطوة الأولى: اوجد قيمة المحدد للمصفوفة $\underline{\text{أ}}$:

$$(\text{١-} \times \text{١}) - \text{صفر} \times \text{٤} = |\underline{\text{أ}}|$$

$$\text{١} = (\text{١-}) - \text{صفر} =$$.

$$\begin{bmatrix} \text{١} & \text{صفر} \\ \text{٤} & \text{١-} \end{bmatrix} \text{١} = \begin{bmatrix} \text{١} & \text{صفر} \\ \text{٤} & \text{١-} \end{bmatrix} \frac{\text{١}}{\text{١}} = \underline{\text{أ}}^{\text{١-}}$$

$$\begin{bmatrix} \text{١} & \text{صفر} \\ \text{٤} & \text{١-} \end{bmatrix} =$$

للتأكد من صحة الحل :

هل $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}}^{\text{١-}}$ = مصفوفة الوحدة

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{١} \\ \text{١} & \text{صفر} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{١} & \text{صفر} \\ \text{٤} & \text{١-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{١-} & \text{٤} \\ \text{صفر} & \text{١} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{١} \\ \text{١} & \text{صفر} \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} \text{٤×١-+١×٤} & \text{١-×١-+صفر×٤} \\ \text{٤×صفر+١×١} & \text{١-×صفر+صفر×١} \end{bmatrix}$$

مثال ٢ :- أوجد النظير الضربي للمصفوفة

$$\text{؟} \quad \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix} = \underline{ب}$$

الحل :-

١) نجد محدد المصفوفة ب :-

$$.\quad (٢ \times ١-) - (٣ \times ١) = |\underline{ب}|$$

$$٥ = ٢ + ٣ = (٢-) - ٣ =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{٢-}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \frac{١}{٥} = \underline{ب}^{١-}$$

وللتأكد من صحة الحل :-

هل $\underline{ب} \times \underline{ب}^{١-} =$ مصفوفة الوحدة

$$\begin{bmatrix} صفر & ١ \\ ١ & صفر \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢-}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$$

$$\frac{صفر}{٥} \qquad \frac{٥}{٥}$$

$$\begin{bmatrix} صفر & ١ \\ ١ & صفر \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} \frac{١}{٥} \times ٢ + \frac{٢-}{٥} \times ١ & \frac{١}{٥} \times ٢ + \frac{٣}{٥} \times ١ \\ \frac{١}{٥} \times ٣ + \frac{٢-}{٥} \times ١- & \frac{١}{٥} \times ٣ + \frac{٣}{٥} \times ١- \end{bmatrix}$$

$$\frac{٥}{٥} \qquad \frac{صفر}{٥}$$

- طريقة كرامر لحل نظام من معادلات خطية بمتغيرين :-

لنفرض أن لدينا النظام التالي من المعادلات في الصورة التالية :-

$$\text{أ}_{11}\,\text{س}_1 + \text{أ}_{12}\,\text{س}_2 = \text{جـ}_1$$

$$\text{أ}_{21}\,\text{س}_1 + \text{أ}_{22}\,\text{س}_2 = \text{جـ}_2 \,.$$

① سنعرف محدد المعاملات Δ (دلتا) كالتالي :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} \end{vmatrix} \text{ ، بفرض أن } \Delta \neq \text{صفر} .$$

حيث نلاحظ أن العمود الأول هو معاملات س_1 والعمود الثاني هو معاملات س_2 .

② سنوجد مصفوفة جديدة من خلال استبدال عناصر العمود الأول (معاملات س_1) في Δ بالحدود المطلقة $\begin{vmatrix} \text{جـ}_1 \\ \text{جـ}_2 \end{vmatrix}$ ونجد محدد هذه المصفوفة ونرمز له بالرمز $\Delta\text{س}_1$:

$$\Delta\text{س}_1 = \begin{vmatrix} \text{جـ}_1 & \text{أ}_{12} \\ \text{جـ}_2 & \text{أ}_{22} \end{vmatrix}$$

وكذلك سنستبدل عناصر العمود الثاني (معاملات س_2) في Δ بالحدود المطلقة $\begin{vmatrix} \text{جـ}_1 \\ \text{جـ}_2 \end{vmatrix}$ ونجد محدد هذه المصفوفة ونرمز له بالرمز $\Delta\text{س}_2$:

$$\Delta_{\text{س}_{٢}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{ج}_{١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{ج}_{٢} \end{vmatrix} .$$

③ لإيجاد قيمة س١ نقسم Δس١ على Δ ، وقيمة س٢ نحصل عليها من خلال قسمة Δس٢ على Δ نحصل :-

$$\text{س}_{١} = \frac{\Delta_{\text{س}_{١}}}{\Delta} \quad ، \quad \text{س}_{٢} = \frac{\Delta_{\text{س}_{٢}}}{\Delta} .$$

مثال ١ :- باستخدام طريقة كرامر ، أوجد حل النظام التالي من المعادلات الخطية :-

$$٣\text{س}_{١} + ٤\text{س}_{٢} = ٢$$
$$٢\text{س}_{١} + ٥\text{س}_{٢} = ٣$$

(الصورة القياسية : المتغيرات في طرف والثوابت في الطرف الآخر)

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٣ \times ٥ - ٢ \times ٤ = ١٥ - ٨ = ٧ .$$

$$\Delta_{\text{س}_{١}} = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = ٢ \times ٥ - ٤ \times ٣ = ١٠ - ١٢ = ٢^{-}$$

$$\Delta_{\text{س}_{٢}} = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٣ \times ٣ - ٢ \times ٢ = ٩ - ٤ = ٥ .$$

$$\text{س}_{١} = \frac{\Delta_{\text{س}_{١}}}{\Delta} = \frac{٢^{-}}{٧} \quad ، \quad \text{س}_{٢} = \frac{\Delta_{\text{س}_{٢}}}{\Delta} = \frac{٥}{٧} .$$

مثال :- حل النظام التالي باستخدام قاعدة كرامر

$٤\text{س}_{١} - ٢\text{س}_{٢} - ١٠ = \text{صفر}$

$٣\text{س}_{١} - ٥\text{س}_{٢} - ١١ = \text{صفر}$

الحل: لابد من اعادة كتابة هذا النظام في الصورة القياسية :-

$٤\text{س}_{١} - ٢\text{س}_{٢} = ١٠$

$٣\text{س}_{١} - ٥\text{س}_{٢} = ١١$

(١) نجد محدد المعاملات :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & -٥ \end{vmatrix} = (٤ \times -٥) - (٣ \times -٢)$$

$$= -٢٠ - (-٦) = -٢٠ + ٦ = \underline{-١٤} \neq \text{ص}$$

(٢) نجد $\Delta_{\text{س}_{١}}$:

$$\Delta_{\text{س}_{١}} = \begin{vmatrix} ١٠ & -٢ \\ ١١ & -٥ \end{vmatrix} = (١٠ \times -٥) - (١١ \times -٢)$$

$$= -٥٠ - (-٢٢) = -٥٠ + ٢٢$$

$$= \underline{-٢٨} .$$

(٣) نجد $\Delta_{\text{س}_{٢}}$:-

$$\Delta_{\text{س}_{٢}} = \begin{vmatrix} ٤ & ١٠ \\ ٣ & ١١ \end{vmatrix} = (٤ \times ١١) - (٣ \times ١٠)$$

$$= ٤٤ - ٣٠ = ١٤$$

(٤) $\text{س}_{١} = \frac{-٢٨}{-١٤} \Leftarrow \boxed{\text{س}_{١} = ٢}$ ، $\text{س}_{٢} = \frac{١٤}{-١٤} \Leftarrow \boxed{\text{س}_{٢} = -١}$

وللتأكد من صحة الحل :-

٤س١ − ٢س٢ = ١٠

٣س١ − ٥س٢ = ١١

(س١ = ٢
س٢ = −١)

المعادلة الأولى :-

(٤ × ٢) − (٢ × −١) = ٨ − (−٢) = ٨ + ٢ = ١٠

المعادلة الثانية :-

(٣ × ٢) − (٥ × −١) = ٦ − (−٥) = ٦ + ٥ = ١١

فقط للتذكير أنه يمكن إعادة كتابة النظام السابق بالصورة :-

٢س١ − س٢ = ٥

٣س١ − ٥س٢ = ١١

نلاحظ الفصل السابع من المحددات

بداية محاضرة يوم ١١ للارشاد من الاسبوع الحادي عشر

الباب الثامن :- المتواليات

تعريف : المتوالية هي عبارة عن متتابعة لمجموعة من الاعداد مرتبة حسب قاعدة معينة أو صيغة معينة، أي عنصر من عناصرها يسمى حداً. فمثلاً { ٢، ٤، ٦، ٨، --- } ،

وأيضاً مجموعة الاعداد { ١/١ ، ١/٢ ، ١/٣ ، ١/٤ ، --- } ،

وكذلك مجموعة الاعداد { ١، ٣، ٥، ٧، --- } .

تقسم المتواليات الى قسمين :-

١) متواليات حسابية (عددية) .

٢) متواليات هندسية .

أولاً :- المتواليات الحسابية :

تعريف : المتوالية الحسابية هي عبارة عن متتابعة من الاعداد كل حد من حدودها يزيد أو ينقص بمقدار ثابت عن الحد الذي يسبقه (باستثناء الحد الأول) .

فإذا كان أ، ه ∈ ح فإن المتتابعة :-

أ ، أ + ه ، أ + ٢ه ، أ + ٣ه ، ---- تسمى متوالية حسابية كل حد فيها (عدا الحد الأول) يكون من إضافة العدد

هـ ال الحد الذي يسبقه . يسمى العدد أ بالحد الأول والعدد هـ أساس المتوالية .

من خلال الصورة العامة للمتوالية الحسابية نلاحظ أن :-

$ح_{١}$ = الحد الأول = أ .

$ح_{٢}$ = الحد الثاني = أ + هـ .

$ح_{٣}$ = الحد الثالث = أ + ٢هـ .

⋮

وبالاستمرار بهذه الطريقة نستنتج أن الحد النوني $ح_{ن}$ للمتوالية الحسابية التي حدها الأول = أ وأساسها = هـ هو :-

$\boxed{ح_{ن} = أ + (ن - ١) هـ}$ ، حيث ن ∈ ط .

وكذلك يمكن إيجاد مجموع ن من الحدود لمتوالية حسابية حسب القانون التالي :-

$$\boxed{جـ_{ن} = \frac{ن}{٢} \left[٢أ + (ن - ١) هـ \right]}$$

حيث أ : الحد الأول .

هـ : أساس المتوالية

ن : عدد الحدود المطلوب إيجاد مجموعها .

وأيضا اذا كانت لدينا متوالية حسابية حدها الأول م وحدها الأخير ل ، فإن مجموع ن من الحدود يعطى بالصيغة التالية :

$$\boxed{\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{\text{٢}}\left[\text{م} + \text{ل}\right]}$$

مثال ١ : اوجد الحد السادس عشر من المتوالية ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ....
ثم اوجد مجموع أول ستة حدود منها ؟

الحل : لدينا متوالية حسابية حدها الأول = ٤ والأساس = ٣

$$\text{هـ} = \text{٧} - \text{٤} = \text{٣} \quad \text{أو} \quad \text{هـ} = \text{١٠} - \text{٧} = \text{٣}$$

نجد قيمة الـهـ من خلال طرح أي حدين متتاليين .

① $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{م} + (\text{ن} - \text{١})\,\text{هـ}$.

$$\text{ح}_{\text{١٦}} = \text{٤} + (\text{١٦} - \text{١}) \times \text{٣}$$

$$= \text{٤} + (\text{١٥} \times \text{٣}) = \text{٤} + \text{٤٥} = \boxed{\text{٤٩}} \leftarrow \text{قيمة الحد السادس عشر}$$

ج)

$$ح_{ن} = \frac{ن}{٢}\left[٢أ + (ن-١)د\right]$$

$$ح_{٦} = \frac{٦}{٢}\left[٢ \times ٤ + (٦-١) \times ٣\right]$$

$$= ٣\left[٨ + ١٥\right]$$

$$= ٣\left[٢٣\right] = ٦٩$$

التأكد :- ٤، ٧، ١٠، ١٣، ١٦، ١٩

أول ستة حدود

$$\boxed{٤ + ٧ + ١٠ + ١٣ + ١٦ + ١٩ = ٦٩}$$

مثال ٢ :- أوجد مجموع أول ١٢ حداً من المتوالية الحسابية
٣، ٨، ١٣، ...... ؟

الحل :- $أ = ٣$ ، $د = ٨ - ٣ = ٥$.

$$ح_{ن} = \frac{ن}{٢}\left[٢أ + (ن-١)د\right]$$

$$ح_{١٢} = \frac{١٢}{٢}\left[٢ \times ٣ + (١٢-١) \times ٥\right]$$

$$= ٦\left[٦ + ١١ \times ٥\right]$$

$$= ٦\left[٦ + ٥٥\right]$$

$$= ٦\left[٦١\right] = ٣٦٦ .$$

متوالية حسابية

٣
٨
١٣
١٨
٢٣
٢٨
٣٣
٣٨
٤٣
٤٨
٥٣
٥٨
٣٦٦

مثال ٣: أوجد مجموع أول عشرة حدود لمتوالية حسابية فيها الحد الأول = ٥ والحد الأخير = ١٠٠ ؟

الحل: $ح_{ن} = \frac{ن}{٢}[أ + ل]$

$ح_{١٠} = \frac{١٠}{٢}[١٠٠ + ٥]$

$= ٥[١٠٥] = \boxed{٥٢٥}$

ثانياً: المتواليات الهندسية

تعريف: المتوالية الهندسية هي متتابعة من الاعداد كل حد من حدودها يمكن إيجاده بضرب الحد الذي قبله بعدد ثابت (باستثناء الحد الأول)، فإذا كان أ، د ∈ ح فإن المتتابعة أ، أ د، أ $د^{٢}$، ...... تسمى متوالية هندسية حدها الأول أ وأساسها د ويمكن إيجاد قيمة د من خلال قسمة حد ما على الحد الذي يسبقه مباشرة (باستثناء الحد الأول) وبعض أن:

$ح_{١}$ = الحد الأول = أ

$ح_{٢}$ = الحد الثاني = أ د

$ح_{٣}$ = الحد الثالث = أ $د^{٢}$

بالاستمرار بهذه الطريقة، نجد أن الحد النوني $ح_ن$ لمتتالية هندسية حدها الأول أ وأساسها د يعطى بالصيغة التالية :-

$$ح_ن = أ د^{ن-1}$$ ، $ن \in ط$.

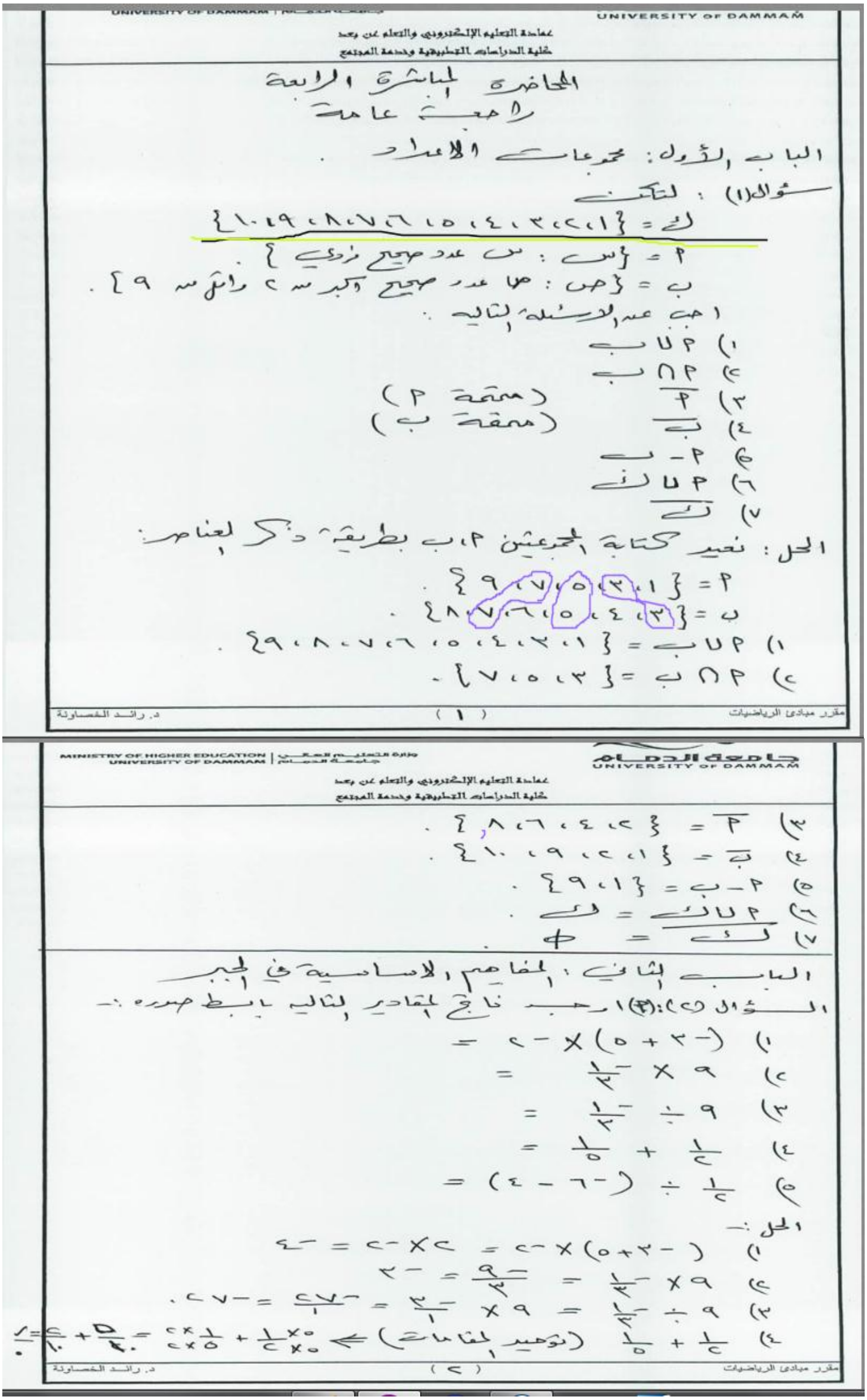
وكذلك يمكن إيجاد مجموع ن من حدود متتالية هندسية حدها الأول أ وأساسها د بالصيغة التالية :-

$$ج_ن = \frac{أ(د^ن - 1)}{د - 1}$$ ، حيث $د \neq 1$

وكذلك يمكن ايجاد حدود لانهائي من حدود متتالية هندسية وتسمى المتتالية الهندسية اللانهائية من خلال الصيغة التالية :-

$$ج_\infty = \frac{أ}{1 - د}$$ حيث $|د| < 1$.

ملاحظة محاضرة يوم الثلاثاء
من الأسبوع الحادي عشر



المحاضرة المباشرة الرابعة
مراجعة عامة

الباب الأول: مجموعات الأعداد.

سؤال(١): لتكن

ك = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ ٧، ٨، ٩، ١٠}

أ = {س : س عدد صحيح فردي}.

ب = {ص : ص عدد صحيح أكبر من ٢ وأقل من ٩}.

اجب عن الأسئلة التالية:

١) أ ∪ ب
٢) أ ∩ ب
٣) $\overline{أ}$ (متممة أ)
٤) $\overline{ب}$ (متممة ب)
٥) أ − ب
٦) أ ∪ ك
٧) $\overline{ك}$

الحل: نعيد كتابة المجموعتين أ، ب بطريقة ذكر العناصر:

أ = {١، ٣، ٥، ٧، ٩}.
ب = {٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}.

١) أ ∪ ب = {١، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩}.
٢) أ ∩ ب = {٣، ٥، ٧}.

٣) $\overline{أ}$ = {٢، ٤، ٦، ٨،}.
٤) $\overline{ب}$ = {١، ٢، ٩، ١٠}.
٥) أ − ب = {١، ٩}.
٦) أ ∪ ك = ك.
٧) $\overline{ك}$ = φ.

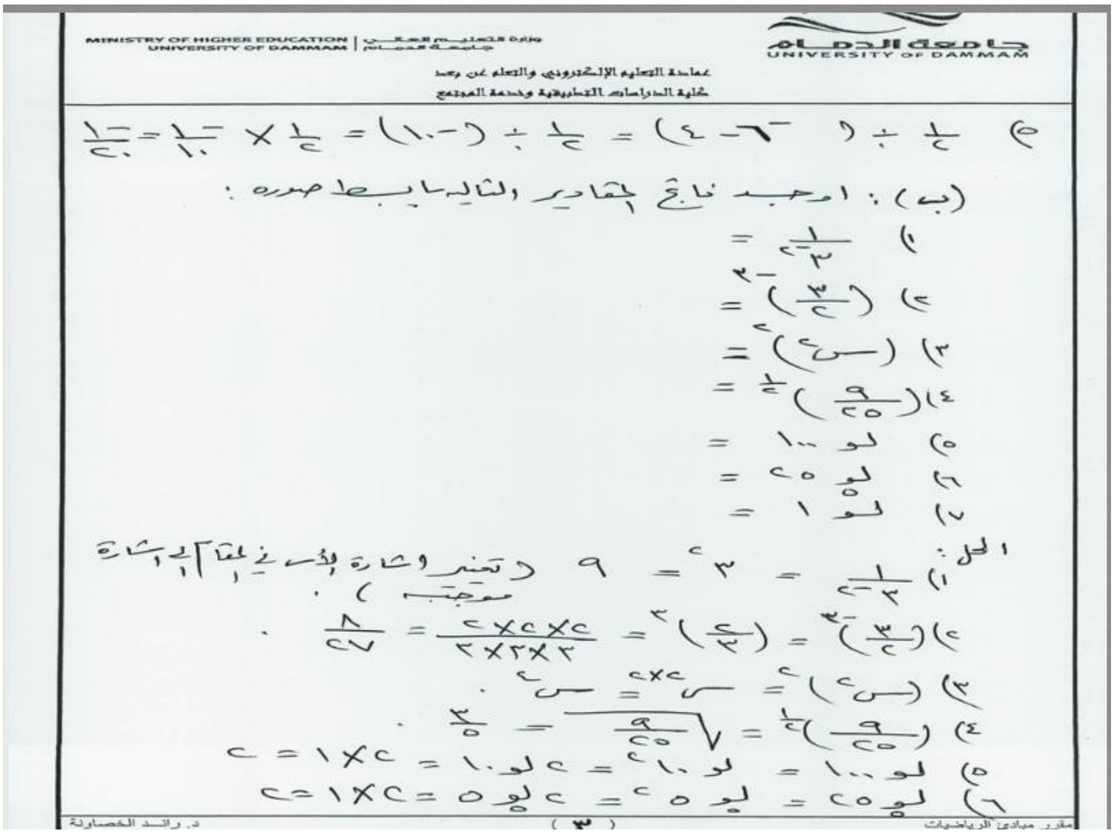
الباب الثاني: المفاهيم الاساسية في الجبر

السؤال (٢): أحسب ناتج المقادير التالية بأبسط صوره:-

١) $(-٣ + ٥) \times -٢ =$
٢) $٩ \times -\frac{١}{٣} =$
٣) $٩ \div -\frac{١}{٣} =$
٤) $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٥} =$
٥) $\frac{١}{٢} \div (-٦ - ٤) =$

الحل:-

١) $(-٣ + ٥) \times -٢ = ٢ \times -٢ = -٤$
٢) $٩ \times -\frac{١}{٣} = \frac{-٩}{٣} = -٣$
٣) $٩ \div -\frac{١}{٣} = ٩ \times \frac{-٣}{١} = \frac{-٢٧}{١} = -٢٧$.
٤) $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٥}$ (توحيد المقامات) $\Leftarrow \frac{١ \times ٥}{٢ \times ٥} + \frac{١ \times ٢}{٥ \times ٢} = \frac{٥}{١٠} + \frac{٢}{١٠} =$



٥) ١/٢ ÷ (٦⁻ − ٤) = ١/٢ ÷ (−١٠) = ١/٢ × −١/١٠ = −١/٢٠

(ب) : اوجد ناتج المقادير التالية بأبسط صورة :

١) ١/٣⁻² =

٢) (٣/٢)⁻³ =

٣) (س²)² =

٤) (٩/٢٥)^(١/٢) =

٥) لو ١٠٠ =

٦) لو₅ ٢٥ =

٧) لو ١ =

الحل :

١) ١/٣⁻² = ٣² = ٩ (تتغير اشارة الأس في المقام إلى اشارة موجبة) .

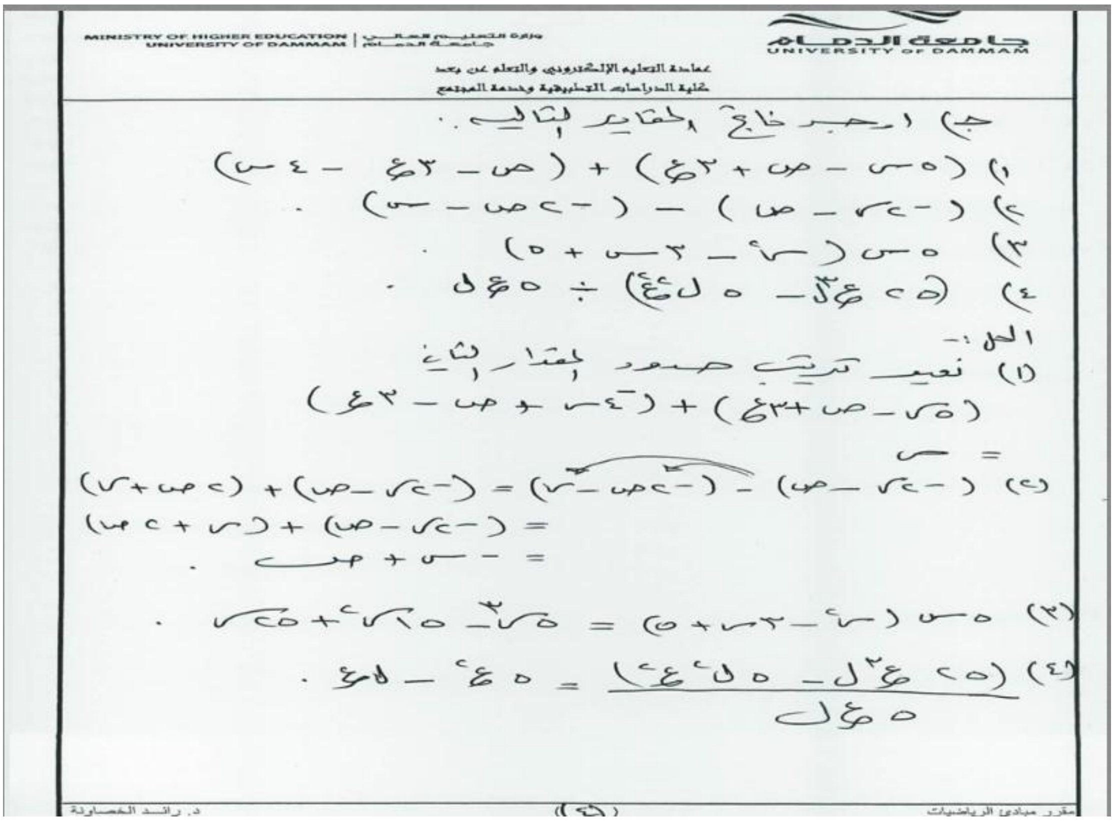
٢) (٣/٢)⁻³ = (٢/٣)³ = (٢×٢×٢)/(٣×٣×٣) = ٨/٢٧ .

٣) (س²)² = س^(٢×٢) = س² .

٤) (٩/٢٥)^(١/٢) = √(٩/٢٥) = ٣/٥ .

٥) لو ١٠٠ = لو ١٠² = ٢ لو ١٠ = ٢×١ = ٢

٦) لو₅ ٢٥ = لو₅ ٥² = ٢ لو₅ ٥ = ٢×١ = ٢



ج) اوجد ناتج المقادير التالية :

١) (٥س − ص + ٣ع) + (ص − ٣ع − ٤س)

٢) (−٢س − ص) − (−٢ص − س) .

٣) ٥س (س² − ٣س + ٥) .

٤) (٢٥ع³ل − ٥ل²ع²) ÷ ٥عل .

الحل :-

(١) نعيد ترتيب حدود المقدار الثاني

(٥س − ص + ٣ع) + (−٤س + ص − ٣ع)

= س

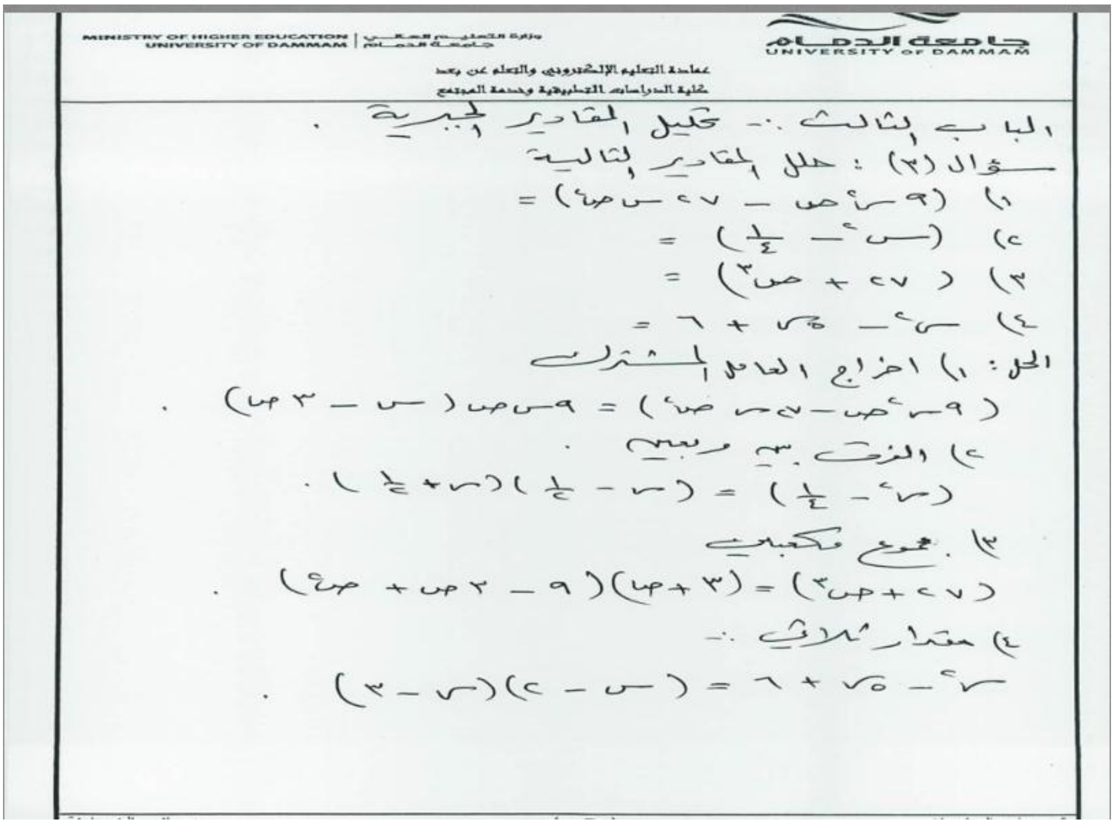
(٢) (−٢س − ص) − (−٢ص − س) = (−٢س − ص) + (٢ص + س)

= (−٢س − ص) + (٢ص + س)

= − س + ص .

(٣) ٥س (س² − ٣س + ٥) = ٥س³ − ١٥س² + ٢٥س .

(٤) (٢٥ع³ل − ٥ل²ع²) / ٥عل = ٥ع² − لع .



MINISTRY OF HIGHER EDUCATION | وزارة التعليم العالي
UNIVERSITY OF DAMMAM | جامعة الدمام

جامعة الدمام
UNIVERSITY OF DAMMAM

عمادة التعليم الإلكتروني والتعلم عن بعد
كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

الباب الثالث :- تحليل المقادير الجبرية .

سؤال (٣) : حلل المقادير التالية

١) $(\text{٩}\text{س}^{\text{٢}}\text{ص} - \text{٢٧}\,\text{س}\,\text{ص}^{\text{٢}}) =$

٢) $(\text{س}^{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٤}}) =$

٣) $(\text{٢٧} + \text{ص}^{\text{٣}}) =$

٤) $\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥}\text{س} + \text{٦} =$

الحل: ١) اخراج العامل المشترك

$(\text{٩}\text{س}^{\text{٢}}\text{ص} - \text{٢٧}\text{س}\,\text{ص}^{\text{٢}}) = \text{٩}\text{س}\,\text{ص}\,(\text{س} - \text{٣}\text{ص})$.

٢) الفرق بين مربعين .

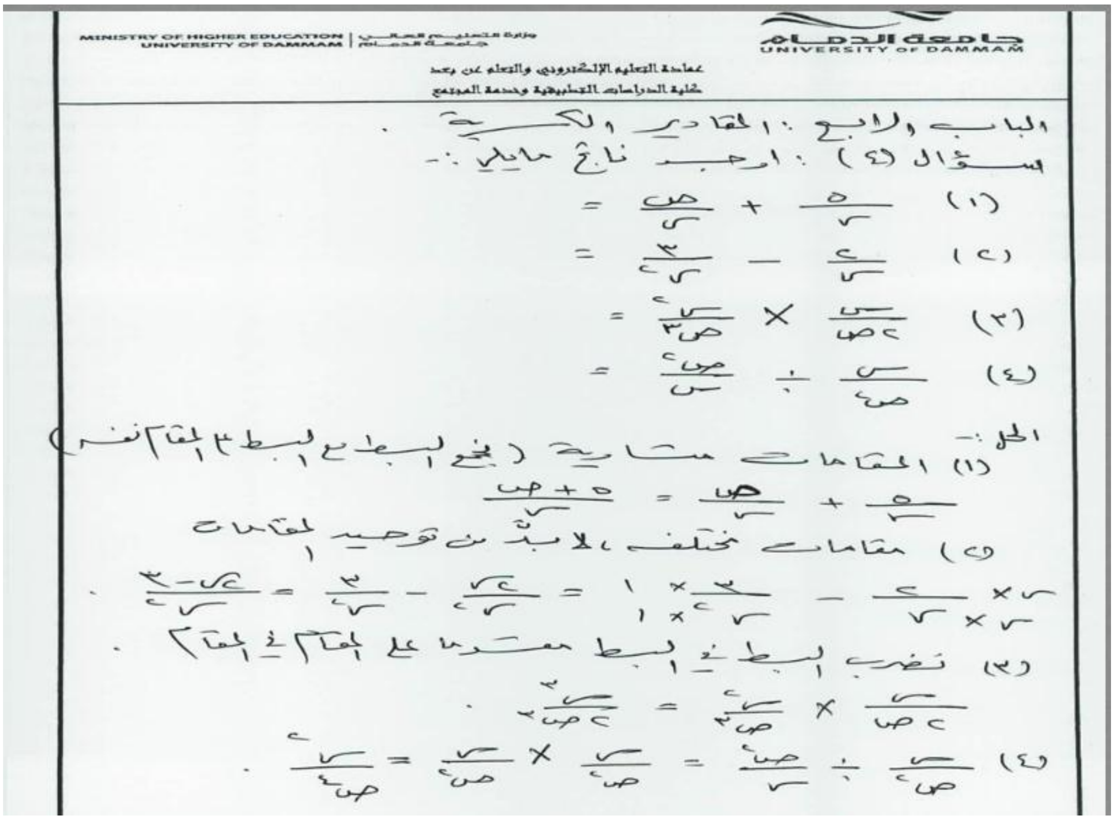
$(\text{س}^{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٤}}) = (\text{س} - \frac{\text{١}}{\text{٢}})(\text{س} + \frac{\text{١}}{\text{٢}})$.

٣) مجموع مكعبين

$(\text{٢٧} + \text{ص}^{\text{٣}}) = (\text{٣} + \text{ص})(\text{٩} - \text{٣}\text{ص} + \text{ص}^{\text{٢}})$.

٤) مقدار ثلاثي :-

$\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥}\text{س} + \text{٦} = (\text{س} - \text{٢})(\text{س} - \text{٣})$.



MINISTRY OF HIGHER EDUCATION | وزارة التعليم العالي
UNIVERSITY OF DAMMAM | جامعة الدمام

جامعة الدمام
UNIVERSITY OF DAMMAM

عمادة التعليم الإلكتروني والتعلم عن بعد
كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

الباب الرابع :- المقادير الكسرية .

سؤال (٤) :- اوجد ناتج مايلي :-

(١) $\frac{\text{٥}}{\text{س}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}} =$

(٢) $\frac{\text{٢}}{\text{س}} - \frac{\text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}}} =$

(٣) $\frac{\text{س}}{\text{٢}\text{ص}} \times \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{ص}^{\text{٣}}} =$

(٤) $\frac{\text{س}}{\text{ص}^{\text{٢}}} \div \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{س}} =$

الحل :-

(١) المقامات متشابهة (نجمع البسط مع البسط والمقام نفسه)

$\frac{\text{٥}}{\text{س}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{٥} + \text{ص}}{\text{س}}$

(٢) مقامات مختلفة، لا بدَّ من توحيد المقامات

$\frac{\text{س} \times \text{٢}}{\text{س} \times \text{س}} - \frac{\text{٣} \times \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} \times \text{١}} = \frac{\text{٢}\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}}} - \frac{\text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٢}\text{س} - \text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}}}$.

(٣) نضرب البسط في البسط مقسوما على المقام في المقام .

$\frac{\text{س}}{\text{٢}\text{ص}} \times \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{ص}^{\text{٣}}} = \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٢}\text{ص}^{\text{٤}}}$.

(٤) $\frac{\text{س}}{\text{ص}^{\text{٢}}} \div \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}^{\text{٢}}} \times \frac{\text{س}}{\text{ص}^{\text{٢}}} = \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{ص}^{\text{٤}}}$.

الباب الخامس: المعادلات

سؤال (٥): (أ) اوجد حل المعادلات التالية :

(١) ٥س − ٢٥ = صفر

(٢) ٦س − ٣ص = صفر (معادلة بمتغيرين)

(٣) س − ص = ١
٢س + ص = ٥ (نظام من معادلتين) .

(٤) ٥$س^{٢}$ − ١٢٥ = صفر .

(٥) $س^{٢}$ − ٢س = صفر .

(٦) $س^{٢}$ − ٦س − ١٦ = صفر ،

الحل : (١) ٥س − ٢٥ = صفر ⇐ ٥س = ٢٥ ⇐ $\boxed{س = ٥}$

(٢) ٦س − ٣ص = صفر ⇐ −٣ص = −٦س
⇐ ص = $\frac{−٦س}{−٣}$ ⇐ $\boxed{ص = ٢س}$

(٣) س − ص = ١
٢س + ص = ٥ (نستخدم طريقة الحذف)
٣س = ٦ ⇐ س = $\frac{٦}{٣}$ ⇐ $\boxed{س = ٢}$
نعوض قيمة س = ٢ في معادلة (١) :.
٢ − ص = ١ ⇐ −ص = ١ − ٢ ⇐ −ص = −١ ⇐ $\boxed{ص = ١}$

(٤) ٥$س^{٢}$ − ١٢٥ = صفر ⇐ ٥$س^{٢}$ = ١٢٥
⇐ $س^{٢}$ = $\frac{١٢٥}{٥}$
⇐ $س^{٢}$ = ٢٥ ⇐ س = ± ٥ .

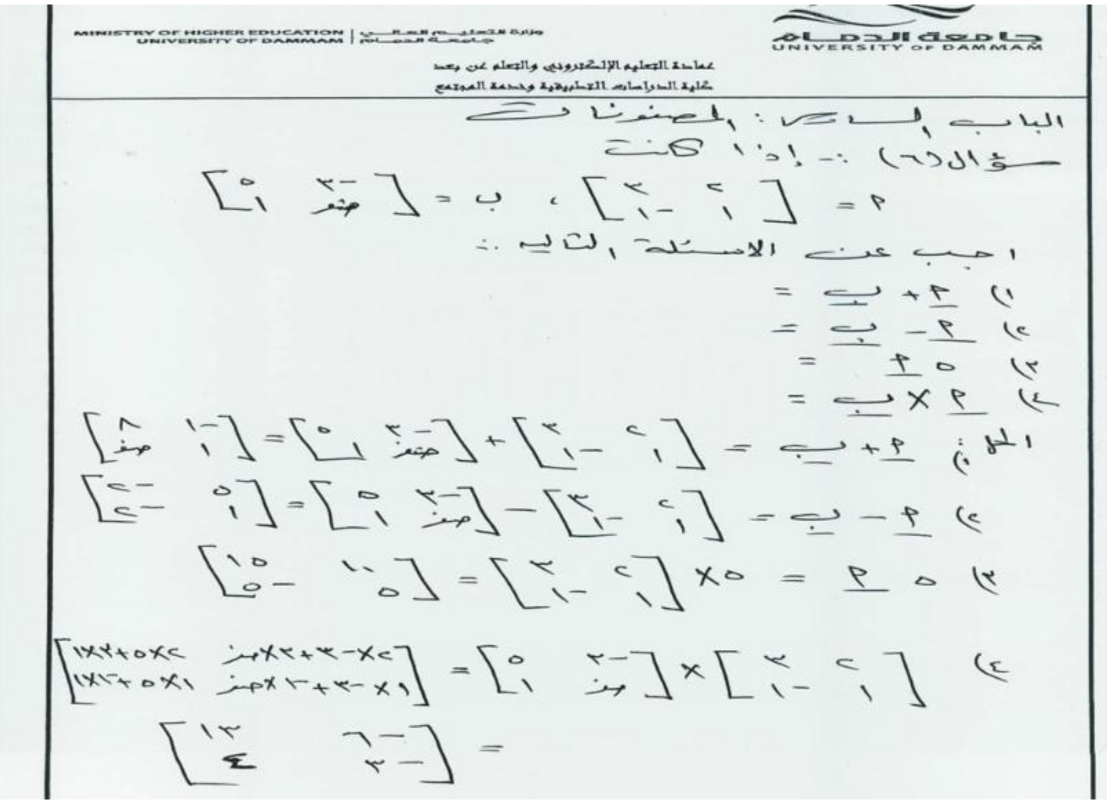
(٥) $س^{٢}$ − ٢س = صفر (إخراج عامل مشترك)
س (س − ٢) = صفر ⇐ $\boxed{س = صفر}$ أو س − ٢ = صفر
$\boxed{س = ٢}$

(٦) $س^{٢}$ + ٦س − ١٦ = صفر .
(س − ٢)(س + ٨) = صفر
س − ٢ = صفر ⇐ $\boxed{س = ٢}$ أو س + ٨ = صفر ⇐ $\boxed{س = −٨}$
أو باستخدام القانون العام .

فرع (ب): اوجد حل المتباينة :.

س − ٥ > −٢س + ١٠

الحل : س + ٢س > ١٠ + ٥
٣س > ١٥ ⇐ س > ٥ .
منطقة الحل :. (−∞ ، ٥)



MINISTRY OF HIGHER EDUCATION | وزارة التعليم العالي
UNIVERSITY OF DAMMAM | جامعة الدمام

جامعة الدمام
UNIVERSITY OF DAMMAM

عمادة التعليم الإلكتروني والتعلم عن بعد
كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

الباب السادس : المصفوفات

سؤال (٦) :- إذا كانت

$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ \text{صفر} & ١ \end{bmatrix}$

اجب عن الاسئلة التالية :-

١) $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}} =$
٢) $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} =$
٣) $٥ \underline{\text{أ}} =$
٤) $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} =$

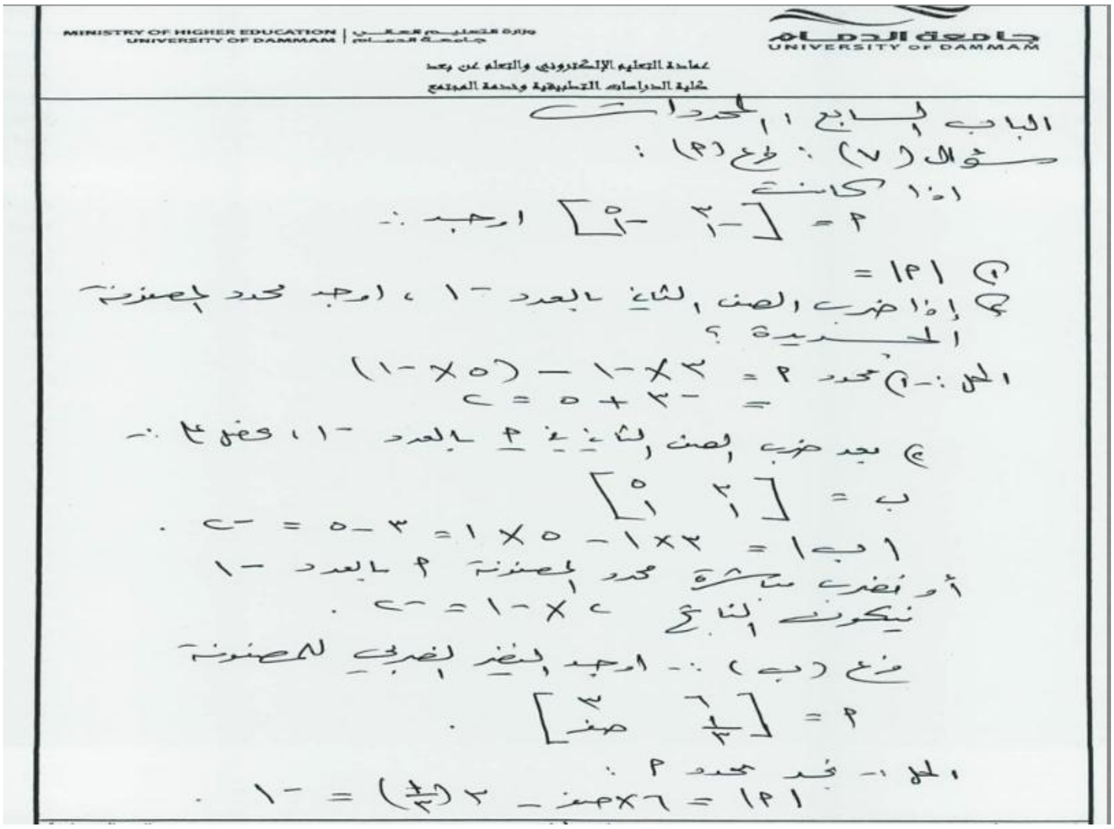
الحل : ١) $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ \text{صفر} & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٨ \\ ١ & \text{صفر} \end{bmatrix}$

٢) $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ \text{صفر} & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$

٣) $٥ \underline{\text{أ}} = ٥ \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٥ \\ ٥ & -٥ \end{bmatrix}$

٤) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ \text{صفر} & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢\times-٣+٣\times\text{صفر} & ٢\times٥+٣\times١ \\ ١\times-٣+-١\times\text{صفر} & ١\times٥+-١\times١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -٦ & ١٣ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix}$



MINISTRY OF HIGHER EDUCATION | وزارة التعليم العالي
UNIVERSITY OF DAMMAM | جامعة الدمام

جامعة الدمام
UNIVERSITY OF DAMMAM

عمادة التعليم الإلكتروني والتعلم عن بعد
كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

الباب السابع : المحددات

سؤال (٧) : فرع (أ) :

إذا كانت

$\text{أ} = \begin{bmatrix} -٣ & -٥ \\ -١ & -١ \end{bmatrix}$ اوجد :-

① $|\text{أ}| =$

② إذا ضرب الصف الثاني بالعدد -١ ، اوجد محدد المصفوفة الجديدة ؟

الحل :- ١) محدد $\text{أ} = ٣ \times -١ - (٥ \times -١)$
$= -٣ + ٥ = ٢$

٢) بعد ضرب الصف الثاني في $\underline{\text{أ}}$ بالعدد -١ ، نحصل على :-

$\text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

$|\text{ب}| = ٣\times١ - ٥\times١ = ٣ - ٥ = -٢$.

أو نضرب مباشرة محدد المصفوفة أ بالعدد -١
فيكون الناتج $٢ \times -١ = -٢$.

فرع (ب) :- اوجد النظير الضربي للمصفوفة

$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ \frac{١}{٣} & \text{صفر} \end{bmatrix}$.

الحل :- نجد محدد أ :

$|\text{أ}| = ٦\times\text{صفر} - ٣(\frac{١}{٣}) = -١$.

نستخدم الصيغة :-

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|} \times \begin{bmatrix} \text{أ}_{٢٢} & -\text{أ}_{٢١} \\ -\text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{١١} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{١}{-١} \times \begin{bmatrix} \text{صفر} & -٣ \\ -\frac{١}{٣} & ٦ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{صفر} & ٣ \\ \frac{١}{٣} & -٦ \end{bmatrix} .$$

فرع (جـ) : اوجد محدد المصفوفة

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} -١ & ٢ & \text{صفر} \\ ٢ & ٣ & ١ \\ ١ & \text{صفر} & ١ \end{bmatrix}$$

الحل :-

$$|\text{أ}| = -١ \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ \text{صفر} & ١ \end{bmatrix} - ٢ \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} + \text{صفر} \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

$$= -١ \, (٣) - ٢ \, (٢ - ١) + \text{صفر}$$

$$= -٣ - ٢ = -٥ .$$

الباب الثامن : المتواليات

سؤال (٨) : فرع (أ)

اذا كانت لديك المتوالية

٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ---

اجب عما يلي :-

١) اساس المتوالية .
٢) قيمة الحد العاشر .
٣) مجموع أول خمسة حدود .

الحل :-

(١) اساس المتوالية = ٥

(٢) $\text{ع}_{١٠} = ٥ + (٩) \times ٥ = ٥ + ٤٥ = ٥٠$.

لاحظ أن $\text{ع}_{\text{ن}} = \text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{هـ}$.

(٣) $\text{جـ}_{٥} = \frac{٥}{٢} [٢ \times ٥ + (٥ - ١) \times ٥]$

$$= \frac{٥}{٢} [١٠ + ٢٠] = \frac{٥}{٢} [٣٠]$$

$$= \frac{١٥٠}{٢}$$

$$= ٧٥$$

لاحظ أن $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢} [٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{هـ}]$.

س٢ (ب) :-

أ) إذا كانت لديك المتوالية

٢، -٤، ٨، -١٦، ــ

أوجد :-

١) أساس المتوالية .

٢) الحد السابع .

٣) مجموع أول ستة حدود ؟

الحل :-

١) أساس المتوالية = -٢

٢) $ح_{٧} = ٢ \times -٢^{٦} = ٢ \times ٦٤ = ١٢٨$.

لاحظ أن :-

$ح_{ن} = أ\, ر^{ن-١}$

٣) $$جـ_{٧} = \frac{٢\,(١ - (-٢)^{٧})}{١ - (-٢)}$$

$$= \frac{٢\,(١ - ١٢٨)}{(١ + ٢)}$$

$$= \frac{٢\,(-١٢٧)}{٣} =$$