بداية محاضرة يوم الثلاثاء من الأسبوع الثاني عشر

الباب السابع : المحددات

تعريف : إذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة $N \times N$ ، فإنه يرافقها عدد حقيقي يسمى محدد المصفوفة A ويرمز له بالرمز $|A|$.

وسنتعرف في هذا الفصل على محدد مصفوفة من الرتبة 1×1 ، 2×2 و أخيراً مصفوفة من الرتبة 3×3.

أولاً : محدد مصفوفة من الرتبة 1×1 :-

إذا كانت $A = [a_{11}]$ ، نعرف محدد A بأنه

$|A| = a_{11}$.

مثال :- إذا كان لدينا المصفوفة

$A = [5]$ ، فإن $|A| = 5$.

ثانياً : محدد مصفوفة من الرتبة 2×2 :-

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ، فإن محدد A نعرفه على النحو الآتي :-

$|A| = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$.

(محدد مصفوفة 2×2 = حاصل ضرب عناصر القطر الأول − حاصل ضرب عناصر القطر الثاني.

مثال :- اوجد محدد المصفوفات التالية :-

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢- & ٥ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$

الحل ① $|\underline{أ}| = ٥×٥ - (٢-×١)$

$= ٤ - (٢-) = ٤ + ٢ = ٧$.

② $|\underline{ب}| = ٤×٠ - (٣×٥) = ٠ - ١٥ = -١٥$.

ثالثاً : محدد مصفوفة من رتبة ٣×٣ :-

اذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١١ & ٥ & ٣ \\ ١٤ & ٤٥ & ٣٥ \\ ١٣ & ٤٣ & ٣٣ \end{bmatrix}$

فإنه يمكن حساب محدد هذا النوع من المصفوفات بأحد الطرق التالية :-

١- $|\underline{أ}| = ١١ \begin{vmatrix} ٤٥ & ١٥ \\ ٤٣ & ١٣ \end{vmatrix} - ٥ \begin{vmatrix} ١٤ & ١٥ \\ ١٣ & ١٣ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} ١٤ & ٤٥ \\ ١٣ & ٤٣ \end{vmatrix}$

$= ١١ (٤٥ ١٣ - ٤٣ ١٥) - ٥ (١٤ ١٣ - ١٣ ١٥) + ٣ (١٤ ٤٣ - ١٣ ٤٥)$.

مثال : اوجد محدد المصفوفة

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ٥- \\ ٦- & ٥- & ١ \\ ٠ & ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

الحل :- $|\underline{أ}| = ٣\begin{vmatrix} ١ & -٥ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} ١ & ٦ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix} + (-٢)\begin{vmatrix} -٥ & ٦ \\ ٣ & ٠ \end{vmatrix}$

$= ٣(٣ - ٤ \times -٥) - ٢(٠ - ٤ \times ٦) - ٢(٠ - ٣ \times ٦)$

$= ٣(١٨) - ٢(-٢٤) - ٢(-١٨)$

$= ٥٤ + ٤٨ + ٣٦ = ١٣٨$

مثال : اوجد محدد المصفوفة

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & -١ \\ ٣ & ٢ & ٥ \\ ١ & -١ & ٠ \end{bmatrix}$$

الحل :- $|\underline{ب}| = ٠\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ -١ & ٠ \end{vmatrix} - ١\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} + (-١)\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & -١ \end{vmatrix}$

$= صفر - ١(٠ - ٥ \times ١) - ١(-٣ - ٢ \times ١)$

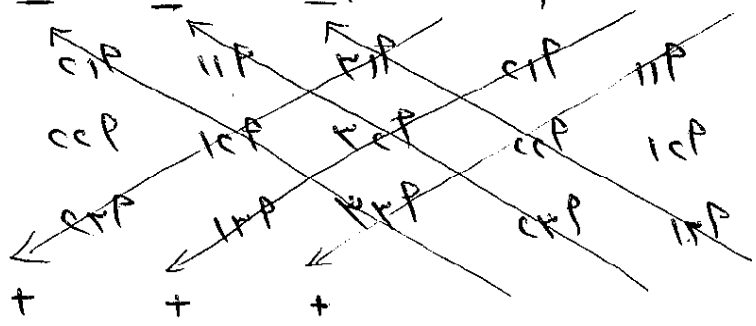
$= ٥ + ٥ = ١٠$

© طريقة ساروس :-

تلخص هذه الطريقة بأن نكتب العمود الأول والعمود الثاني كعمودين رابع وخامس على التوالي بالشكل الموضح أدناه :-

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١١ & ١٢ & ١٣ \\ ٢١ & ٢٢ & ٢٣ \\ ٣١ & ٣٢ & ٣٣ \end{bmatrix}$

نقوم بإعادة كتابة المصفوفة أ على الصورة :-



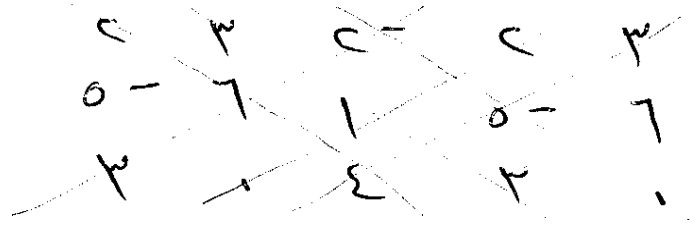
وعليه فإن محدد المصفوفة أ يصبح على الصورة التالية :-

$$|\underline{أ}| = (ج_{31} ب_{22} أ_{13} + ب_{12} ج_{23} ج_{31} + أ_{32} ج_{21} ب_{11}) - (ج_{31} ب_{22} أ_{32} + ب_{12} ج_{21} ج_{33} + أ_{13} ج_{23} ب_{11})$$

مثال :- $\underline{أ} = \begin{bmatrix} -ج & ج & 3 \\ 1 & -5 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ أوجد $|\underline{أ}|$

الحل :- (حسب القاعدة الأولى)

$$|\underline{أ}| = -105$$



$$|\underline{أ}| = (3 \times 6 \times -ج + 0 \times 1 \times ج + 4 \times -5 \times 3) - (ج \times 6 \times 4 + 3 \times 1 \times 3 + -ج \times -5 \times 0)$$

$$= (-36 - 60) - (96 + 9)$$

$$= -57 - 96$$

$$= -105$$

مثال : أوجد محدد المصفوفة :-

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} صفر & ١ & ١- \\ ٣ & ٥ & ٢ \\ ١ & ١- & صفر \end{bmatrix}$$

$|\underline{ب}| = ١٠$
حسب الطريقة الأولى .

الحل :-

١	١-	١	٠	٢
٣	٢	٥	٣	٢
١-	١	٠	١-	١

$|\underline{ب}| = (٠ \times ٢ \times ١ + ١ \times ٥ \times ١ + ٣ \times ٢ \times ٠) - (١ \times ٢ \times ٠ + ٠ \times ٥ \times ١- + ١- \times ٣ \times ١)$

$= (٢ + ٥) - (٣-) = ٧ + ٣ = ١٠$.

---

* خواص المحددات :-

سوف نستعرض في هذا البند بعض خواص المحددات والتي تفيد الطالب في عملية حساب محدد ، وسم هذه الخواص :-

١) إذا وجد صف أو عمود في مصفوفة مربعة بحيث كانت جميع عناصره أصفار ، فإن محدد تلك المصفوفة = صفر .

مثال :-

$$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix} = صفر$$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢- & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ١- & ٧ & ٥ \end{vmatrix} = صفر .$$

$$\begin{vmatrix} ١- & ١ & ٠ \\ ٢ & ٢ & ٠ \\ ٧ & ٥ & ٠ \end{vmatrix} = صفر$$

٢) لا تتغير قيمة المحدد اذا استبدلنا الأعمدة بالصفوف والصفوف بالأعمدة:-

مثال:- ① $\begin{vmatrix} -١ & ٥ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} = -١٣$

④ $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٤ \\ -١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ٤ \end{vmatrix} = -٤$

٣) عند استبدال صف بصف آخر او عمود بعمود آخر فإن إشارة المحدد تتغير:-

مثال:- $\begin{vmatrix} ٤ & ٠ & ٠ \\ ٠ & -١ & ٣ \\ ٠ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = -٤$

$\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٠ \end{vmatrix} = ٣(-٨) - (-١)(\text{صفر}) = -٤$

مثال: $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = -١٠$

$٣ \times ٢ - ٤ \times ١ = ٦ - ٤$

$-(٢ \times ٤ - ٣ \times ١) = -(٨ - ٣) = -١٠$

٤) إذا ساوت العناصر المقابلة لعمودين (وصفين) في مصفوفة $\underline{أ}$، فإن $|\underline{أ}| =$ صفر.

مثال:-

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} ٥ & -٢ & -٢ \\ ٣ & ٣ & ٣ \\ ٤ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$$

العمود الثالث = عناصر العمود الثاني.

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} -١ & ٢ & ٣ \\ -١ & ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ & ٨ \end{vmatrix}$$

(لاحظوا أن عناصر الصف الثاني = عناصر الصف الأول)

٥) إذا ضربت عناصر عمود أو صف لمصفوفة $\underline{أ}$ بعدد ثابت ولتكن م، فإن قيمة المحدد الناتج بعد عملية الضرب تساوي قيمة المحدد الأصلي مضروباً في العدد م.

مثال: إذا كانت

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} \Longleftarrow |\underline{أ}| = (-١ \times ٢) - ٥ \times ٣$$
$$= -٢ + ١٥ = ١٣$$

وضربنا عناصر الصف الأول في العدد -٢

فتصبح المصفوفة الجديدة :-

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٦ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} \Longleftarrow |\underline{ب}| = (٢ \times ٢) - (٥ \times -٦)$$
$$= ٤ - (-٣٠)$$
$$= ٣٤$$

مثال :- اذا كان محدد المصفوفة $\underline{أ} = ١٠$
وضرب الصف الثاني بالعدد -٥ ، فإن
محدد المصفوفة الجديد يساوي :-

$$١٠ \times -٥ = -٥٠ .$$

٦) محدد المصفوفة المقابلة يساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي .

مثال :- اوجد محدد المصفوفة

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & صفر & صفر \\ صفر & -١ & صفر \\ صفر & صفر & ٢ \end{bmatrix}$$

$$|\underline{أ}| = ٢ \times -١ \times ١$$
$$= -٢ .$$