بداية محاضرة يوم الأحد من الأسبوع الثامن

تابع الباب السادس من المصفوفات

٣) ضرب مصفوفة في عدد حقيقي :

إذا كانت أ = [أهو] مصفوفة من الرتبة م × ن وكان ك أي عدد حقيقي فإن حاصل ضرب المصفوفة أ بالعدد ك هو المصفوفة ك أ = [ك أهو] .

مثال : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ فإن المصفوفة ٥أ هي :

$$5\,أ = 5 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 25 & 5 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : إذا كانت أ ، ب مصفوفتين من الرتبة م × ن ، وكان ك ، ل ∈ ح فإن :

١) ك (أ + ب) = ك أ + ك ب .

٢) ك (ل أ) = (ك ل) أ

٣) ك أ = صفر إذا وفقط إذا ك = صفراً أو أ = صفر

٤) ١ أ = أ ١ = أ .

٥) إذا كانت ك ≠ صفر وكانت ك أ = ك ب فإن أ = ب .

٤) ضرب مصفوفتين :-

إذا كانت $\underline{\text{أ}} = [\text{أ}_{\text{هو}}]$ مصفوفة رتبتها $3 \times$ ل ، وكانت $\underline{\text{ب}} = [\text{ب}_{\text{هو}}]$ مصفوفة رتبتها ل $\times$ ن ، فإن ضرب المصفوفة $\underline{\text{أ}}$ في المصفوفة $\underline{\text{ب}}$ هو المصفوفة $\underline{\text{جـ}} = [\text{جـ}_{\text{هو}}]$ ورتبتها $3 \times$ ن .

بشكل آخر :-

$$\underset{3 \times \text{ل}}{\underline{\text{أ}}} \times \underset{\text{ل} \times \text{ن}}{\underline{\text{ب}}} = \underset{3 \times \text{ن}}{\underline{\text{جـ}}}$$

عدد أعمدة الأولى = عدد صفوف الثانية

عدد أعمدة الثانية

عدد صفوف الأولى

(حتى تكون عملية ضرب المصفوفات معرّفة ، يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية ، ورتبة حاصل ضربهما تساوي عدد صفوف الأولى مضروب في عدد أعمدة الثانية

وتتم عملية ضرب مصفوفتين على النحو الآتي :

$$\underline{\text{أ}} = \underset{3 \times 2}{\begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} \end{bmatrix}} \quad , \quad \underline{\text{ب}} = \underset{2 \times 2}{\begin{bmatrix} \text{ب}_{11} & \text{ب}_{12} \\ \text{ب}_{21} & \text{ب}_{22} \end{bmatrix}}$$

متساوي

$\underline{\text{أب}}$ 3×2

وتتم عملية الضرب على النحو التالي :-

$$\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ب}_{11} & \text{ب}_{12} \\ \text{ب}_{21} & \text{ب}_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{أ}_{11}\text{ب}_{11} + \text{أ}_{12}\text{ب}_{21} & \text{أ}_{11}\text{ب}_{12} + \text{أ}_{12}\text{ب}_{22} \\ \text{أ}_{21}\text{ب}_{11} + \text{أ}_{22}\text{ب}_{21} & \text{أ}_{21}\text{ب}_{12} + \text{أ}_{22}\text{ب}_{22} \\ \text{أ}_{31}\text{ب}_{11} + \text{أ}_{32}\text{ب}_{21} & \text{أ}_{31}\text{ب}_{12} + \text{أ}_{32}\text{ب}_{22} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

مثال :- إذا كانت

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & \text{س} \end{bmatrix}_{2\times 2} \text{ ، } \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & \text{س} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2\times 5 + 1\times 2 & -2\times -2 + 1\times 4 \\ 2\times 5 + \text{س}\times 2 & 2\times -2 + \text{س}\times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 8 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{ب}}\,\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & \text{س} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5\times -2 + -2\times 2 & 5\times 1 + -2\times \text{س} \\ 2\times -2 + 4\times 2 & 2\times 1 + 4\times \text{س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : $\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}} \neq \underline{\text{ب}}\,\underline{\text{أ}}$ (ضرب المصفوفات عملية غير ابدالية)

مثال: إذا كانت

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 3} ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

المطلوب ايجاد:

أ) $\underline{أ} \times \underline{ب}$ ٢) $\underline{ب} \times \underline{أ}$

والحل:

$$\underline{أ}\,\underline{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times2+3\times3+-4\times-4 & 2\times0+3\times-1+-4\times7 \\ 0\times2+-1\times3+7\times-4 & 0\times0+-1\times-1+7\times7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+9+16 & 0+-3+-28 \\ 0+-3+-28 & 0+1+49 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 29 & -31 \\ -31 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\underline{ب}\,\underline{أ} = \underline{ب}_{3\times 2} \times \underline{أ}_{2\times 3}$$

معرفة

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+\text{صفر} & 6+\text{صفر} & -8+\text{صفر} \\ 6+\text{صفر} & 9+1 & -12+-7 \\ -8+\text{صفر} & -12+-7 & 16+49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -8 \\ 6 & 10 & -19 \\ -8 & -19 & 65 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

تعريف: إذا كانت أ مصفوفة $م \times ن$ ، فإن المصفوفة التي نحصل عليها من أ بعد تبديل الصفوف مع الأعمدة تسمى مبدل أو منقول المصفوفة أ ويرمز لها بالرمز $أ'$ $ن \times م$

مثال: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & -٢ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}_{٣ \times ٢}$ فإن $أ' = \begin{bmatrix} ٥ & -٢ & ٣ \\ ١ & ١ & ٤ \end{bmatrix}_{٢ \times ٣}$

تعريف: إذا كانت أ مصفوفة مربعة وكانت $أ = أ'$ فإن أ تسمى مصفوفة متماثلة.

مثال: $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ -٢ & ٤ & ٢ \\ ٠ & -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $أ' = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ -٢ & ٤ & ٢ \\ ٠ & -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

لاحظوا أن $أ = أ'$ (أ مصفوفة متماثلة)

تعريف: إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين بحيث:
أ ب = ب أ = مصفوفة الوحدة فإن ب تسمى النظير الضربي (معكوس ضربي) للمصفوفة أ .

مثال: إذا كانت

$أ = \begin{bmatrix} صفر & ٢ \\ -٢ & ١+ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} صفر & \frac{١}{٢} \\ -١ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

$$\text{أ ب} = \begin{bmatrix} 2+ & \text{صفر} \\ 1+ & 1- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \text{صفر} \\ \frac{1}{2} & 1- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times\frac{1}{2} + \text{صفر}\times\frac{1}{2} & 2\times\text{صفر} + \text{صفر}\times 1- \\ 1\times\frac{1}{2} + 1-\times\frac{1}{2} & 1\times\text{صفر} + 1-\times 1- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \text{صفر} \\ \text{صفر} & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

مصفوفة الوحدة .

∴ المصفوفة ب هي نظير ضربي للمصفوفة أ .

نهاية الباب السادس

نهاية محاضرة يوم الثلاثاء
من الأسبوع الثامن