بداية المحاضرة ليوم الثلاثاء
من الاسبوع الثامن

الباب السادس (المصفوفات)

تعريف: المصفوفة هي عبارة عن تنظيم الاعداد مرتبة على شكل صفوف أو أعمدة في جدول مستطيل الشكل بحيث يتكون هذا المستطيل من م من الصفوف و ن من الأعمدة، ويرمز للمصفوفات بحروف عربية كبيرة تحتها خط مثل أ، ب، جـ، .... وذلك لتمييز المصفوفة عن عناصرها.

تسمى الاعداد المكونة للمصفوفة بعناصر المصفوفة، ونكتب اي المصفوفة على الصورة العامة من الرتبة م × ن كالتالي:

$$\begin{bmatrix} \text{م}_{1\text{ن}} & \cdots & \text{م}_{12} & \text{م}_{11} \\ \text{م}_{2\text{ن}} & \cdots & \text{م}_{22} & \text{م}_{21} \\ & & & \vdots \\ \text{م}_{\text{م}\text{ن}} & \cdots & \text{م}_{\text{م}2} & \text{م}_{\text{م}1} \end{bmatrix} = \underline{\text{أ}}$$

لاحظ أن العنصر م_{22} هو العنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الثاني، ويسمى هذا بدليل العنصر.

مثال:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \end{bmatrix} = \underline{\text{أ}}$$

نلاحظ أن المصفوفة مكونة من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة و ٩ عناصر، والعنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الثالث = -1

يقال بأن رتبة أي مصفوفة هي عدد الصفوف × عدد الأعمدة

فالمصفوفة السابقة أ هي من الرتبة ٣×٣ .

مثال: ب = $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ ← صف واحد وثلاثة أعمدة

مصفوفة من الرتبة ١×٣ .

عمود واحد

مثال: جـ = $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ← ٣ صفوف

مصفوفة من الرتبة ٣×١

* أنواع المصفوفات:

١) المصفوفة المستطيلة: حيث عدد الصفوف ≠ عدد الأعمدة.

مثال: أ = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ من الرتبة ٢×٣

عدد عناصر = ٦

٢) المصفوفة المربعة: إذا كانت المصفوفة من الرتبة م×م (بحيث عدد الصفوف = عدد الأعمدة) فنقول بأن المصفوفة مربعة الشكل.

مثال: ب = $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \text{صفر} & 3 \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة رتبتها ٢×٢ وتحتوي ٤ عناصر.

٣) المصفوفة الصفرية: وهي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز صفر ، مثال: $\text{صفر}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} \end{bmatrix}$

٤) المصفوفة القطرية :- هي المصفوفة المربعة التي جميع عناصرها أصفاراً ما عدا العناصر الواقعة على القطر (على الأقل أحد عناصر القطر لا يساوي صفراً).

مثال :- $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & ٢ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \end{bmatrix}_{٣\times٣}$ مصفوفة قطرية .

٥) مصفوفة الوحدة :- هي المصفوفة القطرية التي يكون فيها جميع عناصر القطر تساوي العدد واحد .

مثال :- $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & ١ \end{bmatrix}$ مصفوفة الوحدة من الرتبة ٢×٢ .

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & ١ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} & ١ \end{bmatrix}$ مصفوفة الوحدة من الرتبة ٣×٣

تعريف :- يقال أن المصفوفتين أ ، ب متساويتان إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :-

(١) رتبة المصفوفة أ = رتبة المصفوفة ب .

(٢) العناصر المتناظرة في كلا المصفوفتين متساوية .

أي أن العنصر $أ_{هـ و} = ب_{هـ و}$ حيث هـ = ١، ٢، ---- م
و = ١، ٢، ---- ن

مثال :- اوجد قيمة س ، ص حيث

$$\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س & ٥ \\ ص & ٢ \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{l} س = ١ \\ ص = ٣- \end{array}$$

- العمليات الجبرية على المصفوفات :-

١) جمع مصفوفتين ، ٢) طرح مصفوفتين ، ٣) ضرب مصفوفة لعدد ثابت
٤) ضرب مصفوفتين .

١) جمع مصفوفتين :- اذا كان أ = [أهو] ، ب = [بهو]
من الرتبة م × ن فإن مجموعهما هو المصفوفة
[أهو + بهو] من الرتبة م × ن .

شرط التساوي بالرتب

أي أ + ب = [أهو] + [بهو] = [أهو + بهو] .

مثال :- اذا كانت

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ هو & ١- & ٥- \end{bmatrix}_{٢\times٣} ، \quad ب = \begin{bmatrix} ٣- & ٤ & ٥ \\ ١ & ١- & ٣ \end{bmatrix}_{٢\times٣}$$

أوجد ١) أ + ب

٢) ب + أ

٣) أ + أ

الحل :- $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{صفر} & -1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+(-3) & 2+4 & 3+5 \\ \text{صفر}+1 & -1+(-1) & -5+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$\underline{\text{ب}} + \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{صفر} & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3+1 & 4+2 & 5+3 \\ 1+\text{صفر} & -1+(-1) & 3+(-5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

نقول بأن عملية الجمع على مصفوفتين عملية ابدالية .

$$\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}} = \underline{\text{ب}} + \underline{\text{أ}} \;.$$

$$\underline{\text{أ}} + \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{صفر} & -1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{صفر} & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ \text{صفر} & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

في الواقع نلاحظ أن $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{أ}} = 2\underline{\text{أ}}$.

مثال :- اوجد $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{أ}} + \underline{\text{أ}} + \underline{\text{أ}} = 4\text{أ} = 4 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{صفر} & -1 & -5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ \text{صفر} & -4 & -20 \end{bmatrix}$$

٢) طرح مصفوفتين :-

إذا كانت $\underline{أ} = [\,أ_{هـ و}\,]$ ، $\underline{ب} = [\,ب_{هـ و}\,]$ متشابهة م × ن

فإن

$$\underline{أ} - \underline{ب} = [\,أ_{هـ و}\,] - [\,ب_{هـ و}\,] = [\,أ_{هـ و} - ب_{هـ و}\,]$$

مثال: إذا كانت

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} \text{ ، } \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

أوجد :-

١) $\underline{أ} - \underline{ب}$

٢) $\underline{ب} - \underline{أ}$

الحل :

$$\underline{أ} - \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣ - ١ & ٥ - ٢ \\ ١ - ٣ & ٢- - \text{صفر} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢- & ٢- \end{bmatrix}$$

$$\underline{ب} - \underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & \text{صفر} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢- & ٣- \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$$

نستنتج أن $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} \neq \underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}}$.

$$\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} = -\left(\underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}}\right) .$$

نلاحظ من الأمثلة السابقة أن عملية الجمع والطرح تتم من خلال العناصر المتناظرة بينها ولا يمكن جمع أو طرح مصفوفات من رتب مختلفة .

مثال :- أوجد ناتج ما يلي :-

١) $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}}$

٢) $\underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}}$

٣) $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{أ}}$

حيث $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

$\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

الحل : ١) $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

٢) $\underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 5 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

٣) $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{أ}} = \underline{\text{صفر}}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

نهاية المحاضرة يوم الأربعاء الأسبوع الثامن