بداية محاضرة الأسبوع السادس وليوم السبت ١٤٣٢/١/٢٨

الباب الخامس: المعادلات

تعريف: المعادلة هي عبارة عن تعبير رياضي يحتوي على متغير واحد أو أكثر مع إشارة التساوي، وهذا التعبير له طرفان أيمن وأيسر تفصل بينهما إشارة (=) بحيث تدعى هذه المتغيرات بالمجاهيل. وعملية حل المعادلة معناه إيجاد كل القيم (الاعداد) التي تجعل المعادلة صحيحة، وتحويه هذه الحلول تسمى حل المعادلة.

وبدأ سنتعرف على بعض من أشكال المعادلات وهي:-

١- المعادلات الخطية في مجهول (متغير) واحد س:

الصورة العامة لمعادلة خطية بمتغير واحد هي:-

أ س = جـ ، أ، جـ ∈ ح ، أ ≠ ٠ .

مثال:- أوجد قيمة س من المعادلة

٥س - ٢٥ = ٠

الحل: بداية نقول بنقل العدد الثابت (١) الطرف الأيمن، وداءاً عند نقل عدد ثابت أو متغير من طرف لآخر نقوم بتغير إشارته.

٥س = ٢٥

سنتخلص من معامل س للحصول العدد واحد، وذلك عن طريق قسمة طرفي المعادلة على ذلك المعامل.

$\frac{\text{صـ}}{\text{س}} = \frac{\text{ك}^2}{\text{د}}$

$\boxed{\text{س} = 0}$ حل المعادلة.

(ملاحظة: دائماً المعادلات من الدرجة الأولى لها حل واحد فقط)

وللتأكد من صحة الحل، نقوم بتعويض الناتج $(\text{س} = 0)$ في المعادلة الأصلية:

$\text{ك}^2 - \text{ك}^2 = \text{صـ}$

$0 \times 0 - 0^2 = \text{صـ}$ (الحل صحيح).

$\text{صـ} = \text{صـ}$

مثال: أوجد حل المعادلة التالية:

$\text{ك}^2 - \text{ك}^4 = \text{صـ}$

الحل: $\frac{-\text{ك}^4}{-\text{ك}^2} = \frac{-4}{-2} \Leftarrow \boxed{\text{ك} = 2}$

للتأكد من صحة الحل:

$(2)^2 - (2)^4 = 4 - 4 = \text{صـ}$

بعض مواضيع الإعداد لصفية لتغذية حل المعادلات :

① اذا كانت $أ = ب$ فإن :

$أ + ج = ب + ج$ ، $(أ + ج = ب + ج)$

$أ - ج = ب - ج$ ، $(أ - ج = ب - ج)$

$أ ج = ب ج$ ، $(أ ج = ب ج)$

$\frac{أ}{ج} = \frac{ب}{ج}$ ، $(\frac{أ}{ج} = \frac{ب}{ج})$

② اذا كانت $أ + ج = ب + ج \Leftarrow أ = ب$

③ اذا كانت $أ ج = ب ج \Leftarrow أ = ب$

④ " " $\frac{أ}{ج} = \frac{ب}{ج} \Leftarrow أ = ب$

⑤ " " $أ - ج = ب - ج \Leftarrow أ = ب$

مثال :- $س - ٧ = ١٠$ (معادلة خطية)

لو اردنا أن نجد حل لهذه المعادلة :-

$س = ١٠ + ٧ \Leftarrow \boxed{س = ١٧}$

بالحل ١ خ :-

$٧ + (١٠) = ٧ + (س - ٧)$

$\boxed{س = ١٧}$

مثال :- أوجد حل المعادلة التالية

$$\frac{1}{ج} ص = ٦ - ٢ = ٢$$
$$٦+ \quad ٦+$$

$$\frac{1}{ج} س = ٨ \Leftarrow ٦ + ٢ = \frac{1}{ج} س$$

وللتخلص من معامل $س$ وهو $(\frac{1}{ج})$، نقوم بضرب كل الحدين بالعدد ج :

$$ج \times \frac{1}{ج} س = ٨ \times ج \Leftarrow \boxed{س = ١٦}$$

للتأكد من صحة الحل :-

$$ج = ٦ - (١٦) \frac{1}{ج}$$
$$ج = ٦ - ٨$$
$$ج = ٢$$

٢- المعادلات الخطية في متحولين :-

تعريف : المعادلة الخطية في متحولين $س$ ، $ص$ هي عبارة عن معادلة على الصورة $أ س + ب ص = جـ$

حيث $أ$ ، $ب$ ، $جـ$ ثوابت ، $أ$ ، $ب \neq$ صفر .

نلاحظ أنه حل هذا النوع من المعادلات ليس وحيداً (بمعنى أنه سيكون لدينا عدد لانهائي من الحلول) .

حيث أنه $\boxed{س = \frac{جـ - ب ص}{أ}}$ بمعنى أن لكل قيمة للمتغير $ص$ توجد قيمة للمتغير $س$.

مثال :- أوجد حل المعادلة الآتية

$$٣ص + ٥س = ١٥$$

الحل :-

$$\frac{٥س}{٥} = \frac{١٥ - ٣ص}{٥}$$

$$\boxed{س = \frac{١٥ - ٣ص}{٥}}$$

نقول عندما $ص = ٢ \Leftarrow$

$$س = \frac{١٥ - ٣(٢)}{٥}$$

$$= \frac{١٥ - ٦}{٥} = \frac{٩}{٥} = ١٫٨$$

نتأكد من صحة الحل :

نعوض كل من قيمة $س = ١٫٨$ و $ص = ٢$ في المعادلة الأصلية :-

$$١٥ \stackrel{؟}{=} ٣(٢) + ٥(١٫٨)$$

$$١٥ = ٦ + ٩$$

$$١٥ = ١٥ \quad \checkmark$$ الحل صحيح .

وكذلك عندما $ص = ٣ \Leftarrow$

$$س = \frac{١٥ - ٣(٣)}{٥}$$

$$= \frac{١٥ - ٩}{٥} = \frac{٦}{٥} = ٣$$

وللتأكد من صحة الحل :-

$$١٥ = ٣(٣) + ٥(٣)$$

$$١٥ = ٩ + ٦$$

$$١٥ = ١٥ \quad \checkmark$$ الحل صحيح

مثال :- أوجد حل المعادلة $\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{3ص + 3^2}{5}$ عندما $ص = -1$ ؟

الحل :-

$$\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{3ص + 3^2}{5}$$

$$\sqrt{5} = \frac{3ص + 3^2}{5}$$

هذه الصورة العامة للحل .

عندما $ص = -1$:

$$\sqrt{5} = \frac{3(-1) + 3^2}{5}$$

$$= \frac{-3 + 3^2}{5}$$

$$= \frac{3^0}{5}$$

$$\boxed{س = 3}$$

للتأكد :- $3^2 = 5 \times 3 - 3(-1)$ ؟

$$3^2 = 4 + 3^0$$

$$3^2 = 3^2$$ ✓

عندما $ص = 3$:

$$\sqrt{5} = \frac{3 \times 3 + 3^2}{5}$$

$$\sqrt{5} = \frac{3^2 + 8}{5}$$

$$\boxed{س = \frac{3\sqrt{3}}{5}}$$

للتأكد بصورة أخرى :

$$3^2 = 3(3) \leftarrow 5 \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)$$ ؟

$$3^2 = 3^2 - 8$$ ✓ الحل صحيح

٣- معادلات خطية آنية في متغيرين :-

ويأخذ هذا النوع من المعادلات الصورة :

$$أ_1 س + ب_1 ص = ج_1$$
$$أ_2 س + ب_2 ص = ج_2$$

حيث $أ_1، أ_2، ب_1، ب_2، ج_1، ج_2 \in ح$.

$أ_1، ب_1$ أحدهما على الأقل $\neq صفر$.

$أ_2، ب_2$ = = = $\neq صفر$.

وحل هذا النظام الآني من المعادلات هو عبارة عن زوج من الأعداد س، ص يحقق كل المعادلتين معاً .

في هذا البند، سنوضح طريقتين لحل هذا النوع من المعادلات :-

١- طريقة الحذف :-

خطوات هذه الطريقة :-

الخطوة الأولى : إذا لم تكن معاملات إحدى المتغيرين س أو ص متساوية، فنضرب المعادلتين في عددين حقيقيين تصبح معاملات أحد المتغيرين متساوية .

الخطوة الثانية : إذا كانت الإشارتين للمعاملين متساويتين غير متشابهتين فنقوم بعملية جمع لكل المعادلتين، أما إذا كانت متشابهتين نقوم بعملية الطرح .

الخطوة الثالثة : نحذف أحد المتغيرين ثم نعوض في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة المتغير الآخر .

مثال :- أوجد حيث س، ص من المعادلتين :-

$$\begin{aligned} 5س + ص &= 1 \\ -س - ص &= 2 \end{aligned} \quad +$$

لاحظ أن معامل ص = ١ في المعادلتين متساويين واشاراتهم مختلفين، نقوم بعملية الجمع مباشرة

$$4س + 0 = 3$$

$$س = \frac{3}{4} \Leftarrow \boxed{س = \frac{1}{4}}$$

نقوم بإيجاد قيمة المتغير الآخر الوحيد ص من إحدى المعادلتين

$$س - ص = 2 \quad \text{وبدلنا} \quad س = \frac{1}{4} :-$$

$$\frac{1}{4} - ص = 2 \Leftarrow ص = \frac{1}{4} - 2$$

$$ص = -1 \times 1{,}5 \times -1$$

$$\boxed{ص = -1{,}5}$$

للتأكد من صحة الحل :-

المعادلة الأولى

$$5(\frac{1}{4}) + (-1{,}5) = 1$$

$$1{,}25 - 0{,}75 = 1$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

المعادلة الثانية

$$-(\frac{1}{4}) - (-1{,}5) = 2$$

$$-0{,}25 + 1{,}5 = 2$$

$$2 = 2 \quad \checkmark$$