

## الفصل الرابع

### حساب التكامل

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على بعض طرائق حساب التكامل وتطبيقاته العملية

(١) العلة العكسية لعملية الاشتقاق

(a) مفهوم التكامل غير المحدود : نعلم أن هناك الكثير من العمليات المتعاكسة

فالطرح عكس الجمع والضرب عكس القسمة وهكذا ...

من التفاضل نعرف كيف نجد المشتقة  $f'(x)$  للدالة  $f(x)$  والسؤال الذي

ينشأ الآن هو : إذا علمت المشتقة  $f'(x)$  فكيف يمكن إيجاد الدالة الأصلية

$f(x)$  ؟ فمثلا إذا أعطينا أن :

$$\frac{dy}{dx} = x^3$$

وطلب منا إيجاد  $y$  بدلالة  $x$  فنلاحظ أنه إذا كانت  $y = \frac{x^4}{4} + c$  حيث

$$c \text{ عدد ثابت فإن } : y' = x^3$$

تسمى عملية إيجاد  $y$  إذا علمت مشتقتها  $y'$  بعملية التكامل فنقول أن :

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c \text{ هي تكامل } x^3 \text{ بالنسبة لـ } x \text{ ونكتب : } \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

حيث  $c$  عدد ثابت

وكذلك إذا عرفنا  $\frac{dy}{dx} = g(x)$  يمكن أن نكتب :

$$y = \int g(x) dx$$

وتسمى  $\frac{dy}{dx} = g(x)$  معادلة تفاضلية

ويسمى  $\int g(x) dx$  بالتكامل الغير محدود

### (b) قوانين التكامل

فيما يلي بعض القوانين التي تساعدنا في إيجاد التكاملات :

$$1) \int dx = x + c$$

$$2) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

$$3) \int af(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$4) \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$5) \int e^x dx = e^x + c$$

$$6) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$7) \int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$$

$$8) \int \cos(x) dx = \sin(x) + c$$

$$9) \int \sec^2(x) dx = \tan x + c$$

$$10) \int \csc^2(x) dx = -\cot x + c$$

$$11) \int \sec(x) \tan(x) dx = \sec(x) + c$$

$$12) \int \csc(x) \cot(x) dx = -\csc x + c$$

الأمثلة :

مثال 1 : أوجد  $\int (7x + 3)dx$

مثال 2 :  $\int \frac{x^6 + 2x^2 + 1}{x^2}$

مثال 3 :  $\int (3\sin(x) + 2x)dx$

مثال 4 :  $\int (\sin(x) + \cos(x))dx$

مثال 5 :  $\int (x + 3\sec^2(x))dx$

مثال 6 :  $\int 5dx$

مثال 7 :  $\int (x^{\frac{1}{2}} + 4)dx$

مثال 8 :  $\int (4e^x + x^{-1})dx$

مثال 9 :  $\int (3x^{-2} + 4x^{-1} + 5)dx$

مثال 10 :  $\int (x^{-2} + 2\sin(x) + 3\sqrt{x})dx$

مثال 11 : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$5x^4 = \frac{dy}{dx}$$

مثال 12 : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = x^3 y^{-2}$$

مثال 13 : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 y^3$$

مثال 14 : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y' = x^{-1}y$$

مثال 15 : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y' = xe^{-y}$$

مثال 16 : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{-y}$$

### (c) التكامل بالتعويض

في كثير من الحالات قد نواجه مسائل يطلب إيجاد التكامل  $\int (f(x))^n g(x) dx$  حيث  $n$  عدد حقيقي

فإذا فرضنا أن  $u = f(x)$  فإن تفاضل  $u$  هي  $du = f'(x) dx$  :  $\frac{du}{dx} = f'(x) \Rightarrow du = f'(x) dx$

فإذا فرضنا أن  $f'(x) = ag(x)$  حيث  $a$  ثابت فإن  $\int (f(x))^n g(x) dx = \frac{1}{a} \int u^n du$

وهذا التكامل يمكن حسابه . يسمى هذا الأسلوب بالتكامل بالتعويض

مثال 17 : أوجد :  $\int (x+1)^5 dx$

مثال 18 : أوجد :  $\int (x^2+1)^3 x dx$

مثال 19 :  $\int x^2 (x^3+1)^{\frac{1}{2}} dx$

مثال 20 :  $\int \frac{1}{(3x+2)^2} dx$

مثال 21 :  $\int (3x-5)^4 dx$

$$\int \frac{3x^2 + 2}{\sqrt{x^3 + 2x}} dx \quad \text{مثال 22}$$

$$\int (x \sqrt{x^2 + 3}) dx \quad \text{مثال 23}$$

$$\int \sin(x) \cos(x) dx \quad \text{مثال 24}$$

$$\int \sin^2(x) \cos(x) dx \quad \text{مثال 25}$$

$$\int x e^{x^2} dx \quad \text{مثال 26}$$

$$\int e^{-3x} dx \quad \text{مثال 27}$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx \quad \text{مثال 28}$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^4} dx \quad \text{مثال 29}$$

## (d) التكامل بالتجزئي

نعلم أن :

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

أي أن :

$$f(x) \cdot g'(x) = (f(x) \cdot g(x))' - g(x) \cdot f'(x)$$

$$\Rightarrow \int f(x) \cdot g'(x) dx = \int (f(x) \cdot g(x))' - \int g(x) \cdot f'(x) dx$$

يسمى هذا الأسلوب أسلوب التكامل بالأجزاء

$$u \cdot v - \int v du$$

مثال 30 :  $\int x(x+1)^9 dx$

مثال 31 :  $\int (5x\sqrt{x+3}) dx$

مثال 32 :  $\int x \sin(x) dx$

مثال 33 :  $\int x^2 \sin(x) dx$

مثال 34 :  $\int x e^x dx$

مثال 35 :  $\int \ln(x) dx$

## ٢) التكامل المحدود :

مفهوم التكامل المحدود : إذا كانت  $F(x)$  تحقق  $F'(x) = f(x)$  فإن :

$$f(x) \text{ على الفترة } [a, b] \text{ ويسمى هذا المقدار بالتكامل المحدود للدالة } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

على الفترة  $[a, b]$

مثال 38 :  $\int_1^2 (x^2 - 1) dx$

مثال 39 :  $\int_0^2 (x + 1)^3 dx$

## خواص التكامل المحدود

$$1) \int_a^b f(x) dx = 0$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$3) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

$$4) \int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx$$

مثال (1) إذا كانت :  $\int_0^3 f(x) dx$  أوجد  $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & \text{if } 0 \leq x \leq 2 \\ 5, & \text{if } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

## تمارين

$$1) \int_1^2 \frac{dx}{x^3}$$

$$2) \int_0^2 x dx$$

$$3) \int_1^3 (x^2 + x) dx$$

$$4) \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$5) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3-2x}} dx$$

$$6) \int_{-1}^1 (x^2 + x^3) dx$$

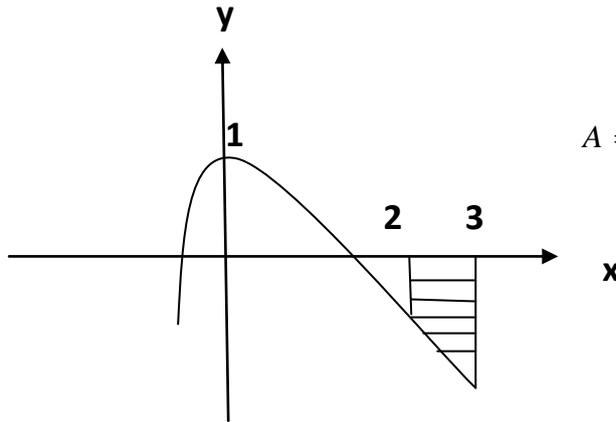
## تطبيقات

### (١) تطبيقات على المساحة

أوجد المساحة المحصورة بين  $f(x) = 1 - x^2$  ومحور  $x$  والمستقيمين  $x=2$  ،

$x=3$

الحل : نرسم الدالة



$$A = \int_2^3 (1 - x^2) dx = \frac{16}{3}$$

تمرين : أوجد المساحة المحصورة بين  $f(x) = x^2$  ومحور  $x$  والمستقيمين

$x=2$  و  $x=1$

### تطبيقات اقتصادية

(١) الدخل الحدي : إذا كان معدل الدخل بالريالات في السنة

فيكون مجمل الدخل  $T$  خلال  $t$  من الزمن معطى بالعلاقة :

$$T = \int_0^t f(t) dt$$

مثال : إذا كان معدل الدخل عن رسوم الطلاب معطى بالعلاقة

$$f(t) = (t + 1)^{-1} (90000)$$

حيث  $t$  هو الزمن بالسنوات فأحسب الدخل الكلي المتوقع من الرسوم

خلال 3 سنوات

## ٢) القيمة الرأسمالية

لقد وضعنا سابقا أن إجمالي الريالات اليوم يصبح  $e^{tr}$  ريالاً في  $t$  من السنوات بفائدة مركبة متواصلة قدرها  $r$  وإذا كان  $f(t)$  معدل الدخل فإن القيمة الحالية على فترة من الزمن من صفر إلى  $t_1$  معطاة بالعلاقة :

$$\int_0^{t_1} e^{-tr} f(t) dt$$

ويسمى هذا التكامل بالقيمة الرأسمالية

مثال : إذا اعتبرنا دخلاً ثابتاً مقداره 50 ريالاً في الشهر على فترة 3 سنوات فما هي القيمة الرأسمالية لهذا الدخل إذا كانت الفائدة هي : 6% ؟
   
 الحل :

## ٣) التحليل الحدي

لاحظنا سابقاً أن الدخل الحدي يساوي  $\frac{dT}{dx}$  عند  $x=n$  والآن :

$$T = \int \frac{dT}{dx} dx$$

مثال : إذا كان الدخل الحدي بالنسبة لمبيعات سيارات هو معطى بالعلاقة :

$$\frac{dT}{dx} = 60x^2 + 40x + 1$$

أوجد الدخل الكلي الناتج عن بيع 5 سيارات

الحل :