بداية محاضرة يوم الثلاثاء
من الأسبوع الثالث

تابع الباب السادس من المصفوفات

٣) ضرب مصفوفة في عدد حقيقي :-

إذا كانت أ = [أهـو] مصفوفة من الرتبة م × ن وكان ك أي عدد حقيقي فإن حاصل ضرب المصفوفة أ بالعدد ك هو المصفوفة ك أ = [ك أهـو] .

مثال: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ فإن المصفوفة ٥أ هي :-

$$٥أ = ٥ \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 25 & 5 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: إذا كانت أ، ب مصفوفتين من الرتبة م × ن، وكان ك، ل ∈ ح فإن :-

١) ك (أ + ب) = ك أ + ك ب .

٢) ك (ل أ) = (ك ل) أ

٣) ك أ = صفر إذا فقط إذا ك = صفراً أو أ = صفر

٤) ١ أ = أ ١ = أ .

٥) إذا كانت ك ≠ صفر وكانت ك أ = ك ب فإن أ = ب .

٤) ضرب مصفوفتين :-

إذا كانت أ = [$\text{أ}_{هو}$] مصفوفة رتبتها م × ل ، وكانت
ب = [$\text{ب}_{هو}$] مصفوفة رتبتها ل × ن ، فإن ضرب
المصفوفة أ في المصفوفة ب هو المصفوفة جـ = [$\text{جـ}_{هو}$]
ورتبتها م × ن .

بشكل آخر :-

$$\underset{\text{م} \times \text{ل}}{\text{أ}} \times \underset{\text{ل} \times \text{ن}}{\text{ب}} = \underset{\text{م} \times \text{ن}}{\text{جـ}}$$

عدد أعمدة الأولى = عدد صفوف الثانية

عدد أعمدة الثانية

عدد صفوف الأولى

(حتى تكون عملية ضرب المصفوفات معرّفة ، يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية ، ورتبة حاصل ضربهما تساوي عدد صفوف الأولى مضروب في عدد أعمدة الثانية

وتتم عملية ضرب مصفوفتين على النحو الآتي

$$\text{أ} = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} \end{bmatrix}} \quad ، \quad \text{ب} = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} \text{ب}_{11} & \text{ب}_{12} \\ \text{ب}_{21} & \text{ب}_{22} \end{bmatrix}}$$

مشابه

أب 3×2

وتتم عملية الضرب على النحو التالي :-

$$\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ب}_{11} & \text{ب}_{12} \\ \text{ب}_{21} & \text{ب}_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{أ}_{11}\,\text{ب}_{11} + \text{أ}_{12}\,\text{ب}_{21} & \text{أ}_{11}\,\text{ب}_{12} + \text{أ}_{12}\,\text{ب}_{22} \\ \text{أ}_{21}\,\text{ب}_{11} + \text{أ}_{22}\,\text{ب}_{21} & \text{أ}_{21}\,\text{ب}_{12} + \text{أ}_{22}\,\text{ب}_{22} \\ \text{أ}_{31}\,\text{ب}_{11} + \text{أ}_{32}\,\text{ب}_{21} & \text{أ}_{31}\,\text{ب}_{12} + \text{أ}_{32}\,\text{ب}_{22} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

مثال :- إذا كانت

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & \text{صفر} \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad ، \quad \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & \text{صفر} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2\times 5 + 1\times 2 & -2\times -2 + 1\times 4 \\ 2\times 5 + \text{صفر}\times 2 & 2\times -2 + \text{صفر}\times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 8 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{ب}}\,\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5\times -2 + -2\times 2 & 5\times 1 + -2\times \text{صفر} \\ 2\times -2 + 4\times 2 & 2\times 1 + 4\times \text{صفر} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : $\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}} \neq \underline{\text{ب}}\,\underline{\text{أ}}$ (ضرب المصفوفات عملية غير ابدالية)

مثال :- إذا كانت

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

المطلوب ايجاد :-

١) $\underline{أ} \times \underline{ب}$ ٢) $\underline{ب} \times \underline{أ}$

الحل :

$$\underline{أ}\,\underline{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times2 + 3\times3 + -4\times-4 & 2\times0 + 3\times-1 + -4\times7 \\ 0\times2 + -1\times3 + 7\times-4 & 0\times0 + -1\times-1 + 7\times7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+9+16 & 0+-3+-28 \\ 0+-3+-28 & 0+1+49 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 29 & -31 \\ -31 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\underline{ب}\,\underline{أ} = \underline{ب}_{3\times2} \times \underline{أ}_{2\times3}$$

معرفة

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+\text{صفر} & 6+\text{صفر} & -8+\text{صفر} \\ 6+\text{صفر} & 9+1 & -12+-7 \\ -8+\text{صفر} & -12+-7 & 16+49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -8 \\ 6 & 10 & -19 \\ -8 & -19 & 65 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

تعريف : إذا كانت $\underset{ن \times م}{أ}$ مصفوفة ، فإن المصفوفة التي نحصل عليها من أ بعد تبديل الصفوف مع الأعمدة تسمى مبدل أو منقول المصفوفة أ ويرمز له بالرمز $أ^{ع}$ م × ن .

مثال :- إذا كانت $\underset{3 \times 2}{أ = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}}$ فإن $\underset{2 \times 3}{أ^{ع} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$

تعريف :- إذا كانت أ مصفوفة مربعة وكانت $أ = أ^{ع}$ فإن أ تسمى مصفوفة متماثلة .

مثال :- $أ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ، $أ^{ع} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

لاحظوا أن $أ = أ^{ع}$ (أ مصفوفة متماثلة)

تعريف : إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين بحيث :-

$أ \cdot ب = ب \cdot أ$ = مصفوفة الوحدة فإن ب تسمى النظير الضربي (معكوس ضربي) للمصفوفة أ .

مثال : اذا كانت

$أ = \begin{bmatrix} 2 & صفر \\ +1 & -1 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & صفر \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

$$\text{أ ب} = \begin{bmatrix} \text{٢+} & \text{صفر} \\ \text{١+} & \text{١-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\text{١}}{\text{٢}} & \text{صفر} \\ \frac{\text{١}}{\text{٢}} & \text{١-} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{٢} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} + \text{صفر} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} & \text{٢} \times \text{صفر} + \text{صفر} \times \text{١-} \\ \text{١} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} + \text{١-} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} & \text{١} \times \text{صفر} + \text{١-} \times \text{١-} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{١} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{١} \end{bmatrix}_{\text{٢×٢}}$$

مصفوفة الوحدة.

∴ المصفوفة ب هي نظير ضربي للمصفوفة أ.

نهاية الباب السادس

نهاية محاضرة يوم الثلاثاء
من الأسبوع الثامن