بسم الله الرحمن الرحيم

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته

هذا شرح مفصل لمبادئ الرياضيات 2

ارجوا الدعاء لي ولوالدي ولمن قام بهذا العمل

زوجتي الغاليه

أخوكم مروان

* المجموعه: تجمع من العناصر المحددة تماماً
يرمز للمجموعه بحروف كبيره مثل: $A, B, C \dots$
* تتكون المجموعه من عناصر يرمز لها بحروف صغيره: $a, b, c \dots$

* الرمز $\in$: ينتمي مثال: $a \in A$
او: $a \notin A$

* طريقة العد (سرد العناصر): $A = \{a, b, c\}$
(يجب عدم تكرار العناصر)
* طريقة القاعدة (الصفة المميزة):
وصف المجموعه بذكر صفة يتم تحديد العناصر بها بسطتها
مثل:
$A = \{X :$ طالب يدرس المقرر الحالي $X\}$
$B = \{X : 3 < X \leq 1$ عدد حقيقي $X\}$

* المجموعه الخالية $\emptyset$ او $\{\ \}$ وهي مجموعة جزئيه من أي مجموعه أخرى
مثال: $A = \{X : X^2 + 1 = 0$ ، عدد حقيقي $X\}$

* المجموعة المنتهية: تكون عناصرها محدودة:
مثل: $A = \{2, 4, 6, 8\}$
$B = \{1, 2, 3 \dots 100\}$
* المجموعه الغير المنتهية: عناصرها غير محدودة:
مثل: $A = \{X :$ عدد فردي طبيعي $X\}$
$B = \{10, 20, 30, \dots\}$
* المجموعه الكلية: (U): هي المجموعه التي جميع المجموعات جزئيه منها.

* المجموعه الجزئيه: $A = \{2, 4, 6\}$
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $\Leftarrow A \subset B$

* المجموعتان المتساويتان اذا: $A \subseteq B$ و $B \subseteq A \Rightarrow A = B$
(يعني لازم العناصر نفس بعض تماماً في المجموعتين).

* المجموعتان المتكافئتان: اذا تساوت في عدد العناصر.
$A \equiv B$

* مثال :-

① $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 1, 5, 7\}$

$A = B$

② $A = \{a, b, c\}$ $B = \{0, 1, 2\}$

$A \equiv B$

* الاتحاد :- هو مجموعه تحتوي على عناصر المجموعتين معاً ويرمز له $(\cup)$

$$A \cup B = \{x : x \in A \cup x \in B\}$$

* التقاطع :- مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعتين (المشتركه) فقط. $(\cap)$

$$A \cap B = \{x : x \in A \cap x \in B\}$$

* المكملة :- تحتوي على عناصر المجموعه الكلية باستثناء عناصر المجموعه A $(\overline{A})$

$$\overline{A} = \{x : x \in U \cap x \notin A\}$$

* الفرق :- $A - B$:- يعني العناصر الموجودة في A ولا توجد في B .

$$A - B = \{x : x \in A \cap x \notin B\}$$

مثال :- $A = \{1, 2, 3, x, y\}$

$B = \{3, 5, 4, x, \omega\}$

المجموعه الكلية $U = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, \omega, z\}$

① $A \cup B : \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, \omega\}$

② $A \cap B : \{3, x\}$

③ $A - B = \{1, 2, y\}$

④ $\overline{A} = \{4, 5, \omega, z\}$

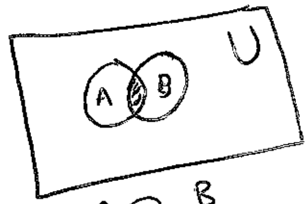
⑤ $\overline{B} = \{1, 2, y, z\}$

* اشكال فن: تمثيل المجموعة الكلية U بمستطيل.
و المجموعات الجزئية بدوائر.

① الاتحاد

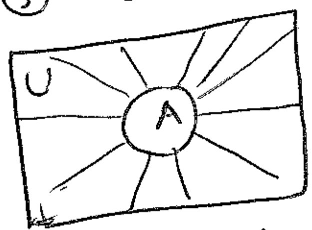
$A \cup B$

② التقاطع



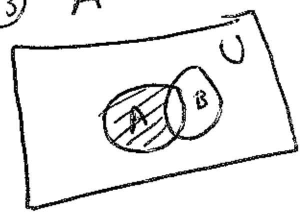
$A \cap B$

③ المكملة



$\overline{A} = U - A$

③ $A - B$



* الضرب الديكارتي :-

$A \times B =$ مجموعة الازواج المرتبة التي مسقطها الاول $x \ni A$
ومسقطها الثاني $y \ni B$

$A \times B = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$

ملاحظة: $A \times B \neq B \times A$

مثال:-

$A = \{-2, 1\}$

$B = \{-3, 1, 4\}$

$A \times B = \{(-2,-3), (-2,1), (-2,4), (1,-3), (1,1), (1,4)\}$

$B \times A = \{(-3,-2), (-3,1), (1,-2), (1,1), (4,-2), (4,1)\}$

* مجموع الأزواج = عدد عناصر A × عدد عناصر B

$3 \times 2 = 6$

* $(x_1 , y_1) = (x_2 , y_2) \Leftarrow$ اذا وإذا فقط $\Leftarrow x_1 = x_2$
$y_1 = y_2$

مثال :- اوجد قيم x ، y التي تحقق المعادلة

$$\left(x+1 , y - \frac{1}{2} \right) = \left(4 , \frac{3}{2} \right)$$

$\Leftarrow y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\qquad x + 1 = 4$

$\Leftarrow y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$ $\qquad x = 4 - 1$

$\qquad x = 3$

$\Leftarrow y = \frac{4}{2}$

$\Leftarrow y = 2$ $\qquad$ $\therefore (x , y) = (3 , 2)$

* مجموعة المجموعات :- (P) بي

لأي مجموعة A = المجموعة المكونة من كل المجموعات " "
الجزئية للمجموعة A + المجموعة نفسها + $\emptyset$

مثال :- $U = \{a , b , c\}$ ، اشتق مجموعة المجموعات.

$P = \{ \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} , \emptyset , \{a,b,c\} \}$

* عدد المجموعات الجزئية = 2^n بحيث انه n = عدد عناصر المجموعة

* الاعداد الطبيعية (N) :- $N = \{1 , 2 , 3 ----\}$
جميع الاعداد من $1 \longrightarrow \infty$ ولا تحتوي على الصفر او الاعداد السالبة

* الاعداد الصحيحة (Z) :- تحتوي على الصفر والاعداد السالبة والاعداد الموجبة ولا تحتوي على الكسور.
$Z = \{ 0 , \pm 1 , \pm 2 ---\}$

* الاعداد النسبية :- (Q) = الكسور $\frac{a}{b}$ بحيث انه $a , b \in Z$ لكنه $b \neq 0$
$Q = \{ \frac{a}{b} : a , b \in Z , b \neq 0 \}$

* الاعداد الغير نسبية :- الجذور $\sqrt{\ }$ ، النسبة التقريبية π ، العدد النابيري e

* الاعداد الحقيقية :- (R) تحتوي على كافة الانواع السابقة وتمثل خط الاعداد.
$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$

* العلاقة (R) من A إلى B هي مجموعة جزئية من $A \times B$

بحيث : عناصر جميع المكونات الاولى في العلاقة = مجال العلاقة

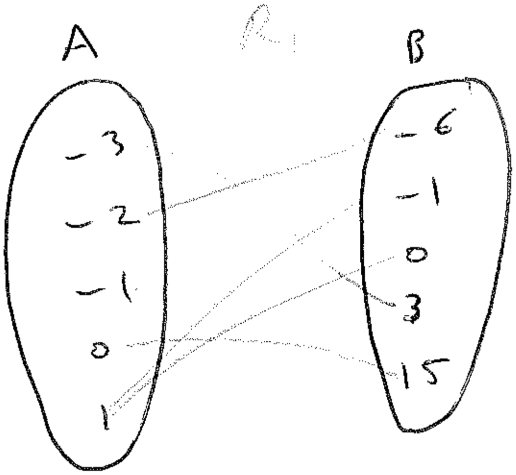
" " الثانية " = مدى العلاقة

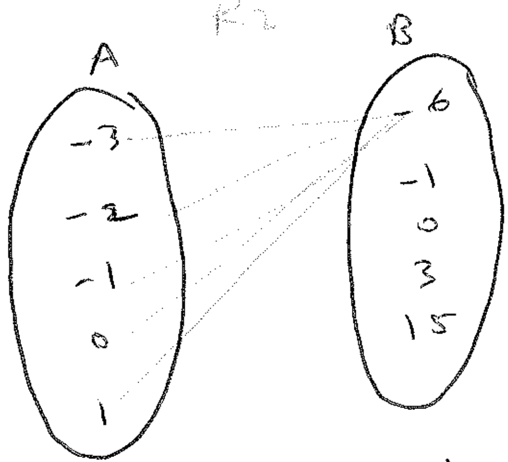
يعني : A مجال الدالة ، B المجال المقابل ، الصور في B ⇓ المدى

مثال :

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$
$$B = \{-6, -1, 0, 3, 15\}$$
$$R_1 = \{(-3,3), (-2,-6), (1,0), (0,15), (1,-1)\}$$
$$R_2 = \{(-3,-6), (-2,-6), (-1,-6), (0,-6), (1,-6)\}$$

مثل R_1 ، R_2 بالمخطط السهمي ثم أوجد المدى





المدى = $\{-6, -1, 0, 3, 15\}$

المدى = $\{-6\}$

* الدالة : f هي مجموعة جزئية من $A \times B$ بحيث تحتوي على عناصر (x, y)

$x \in A$, $y \in B$ — لكل عنصر x يوجد عنصر وحيد y

x (متغير مستقل) ، y (متغير تابع)

$y = F(x)$

(y قيمة الدالة f عند)

مثال :

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{4, 8, 12\}$$

$f_1 = \{(1,4), (2,4), (3,12)\}$ ⇐ دالة لانه كل عنصر في A له صورة في B

$f_2 = \{(1,4), (2,4)\}$ ⇐ ليست دالة لانه $3 \in A$ ليس لا صورة

$f_3 = \{(1,4), (1,8), (3,12)\}$ ⇐ ليست دالة لانه $1 \in A$ له صورتان $4, 8$

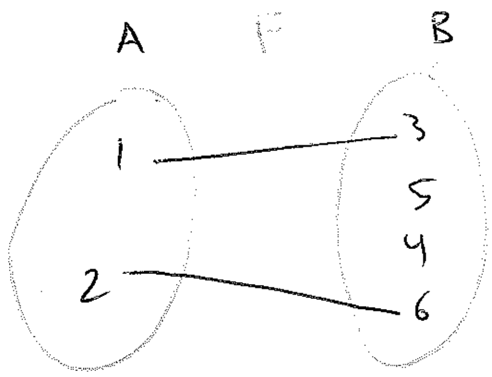
* مثال :

$A = \{1, 2\}$

$B = \{3, 4, 5, 6\}$

$f = \{(1,3), (2,6)\}$

مثل F بالمخطط السهمي واوجد المدى؟



المدى : $\{3, 6\}$

* مثال :

$f(x) = x^2 + 4x - 3$

اوجد :

$f(2) = (2)^2 + 4(2) - 3$

$= 4 + 8 - 3 = 9$

$f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) - 3$

$= 1 - 4 - 3 = -6$

$f(a) = a^2 + 4a - 3$

$f(x+1) =$

$(x+1)^2 + 4(x+1) - 3$

$= x^2 + 2x + 1 + 4x + 4 - 3$

$= x^2 + 6x + 2$

* قانون :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

* مثال :

$f(x) = 3x^2 - 7x + 2$

$f(a) = 3a^2 - 7a + 2$

$f(-3) = 3(-3)^2 - 7(-3) + 2$

$= 3 \times 9 + 21 + 2 = 27 + 21 + 2 = 50$

$f(\frac{1}{2}) = 3(\frac{1}{2})^2 - 7(\frac{1}{2}) + 2$

$= (3 \times \frac{1}{4}) - \frac{7}{2} + 2 = \frac{3}{4} - \frac{7}{2} + 2$

توحيد المقامات

$\frac{3 - 14 + 8}{4} = \frac{-3}{4}$

$f(-\frac{2}{3}) =$

$3(-\frac{2}{3})^2 - 7(\frac{-2}{3}) + 2$

$= 3 \times \frac{4}{9} + \frac{14}{3} + 2$

توحيد المقامات

$= \frac{12}{9} + \frac{14}{3} + 2$

$= \frac{12 + 42 + 18}{9} = \frac{72}{9}$

$= 8$

* الدالة الحقيقية :- الدالة المعرفة من مجموعة الاعداد الحقيقية الى مجموعة الاعداد الحقيقية .

$f : R \to R$

* دالة كثيرة الحدود :-

عدد طبيعي .

$$f(x) = \underbrace{a_n}\, x^{n} + \underbrace{a_{n-1}}\, x^{n-1} \cdots\cdots + \underbrace{a_1}\, x + a$$

معاملات كثيرات الحدود

- درجة كثيرة الحدود هو قيمة أعلى أس لـ (X)

مثال : ما درجة كثيرة الحدود :-

الدالة الصفرية او الدالة الثابتة : الدرجة $= 0$

$f(x) = 3$

الدرجة الاولى = الدالة الخطية = 1

$f(x) = 3x - 4$

الدرجة الثانية = الدرجة التربيعية

$f(x) = x^2 - x + 1$

الدرجة الثالثة = الدرجة التكعيبية

$f(x) = 2 - 3x + x^3$

الدرجة الخامسة

$f(x) = x^3 + x^5 + 5x - 6$

* العمليات على الدوال :-

f, g دوال

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$(f \times g)(x) = f(x) \times f(g)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow g(x) \neq 0$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

* معكوس الدالة :- f^{-1}

$y = f(x)$ دالة يعني ايجاد (x) كدالة في y

$x = f^{-1}(y)$ $\Longleftarrow$ يعني مثال

مثال :- $f(x) = 3x + 5$

$g(x) = x^2 + 1$

اوجد

$f^{-1}(y) =$

$y = 3x + 5$

$\frac{y-5}{3} = \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} \Rightarrow x = \frac{y-5}{3}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= 3x + 5 + x^2 + 1$$
$$= x^2 + 3x + 6$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$= 3x + 5 - x^2 - 1$$
$$= -x^2 + 3x + 4$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$
$$(3x + 5)(x^2 + 1)$$
$$= 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5$$
$$= 3x^3 + 5x^2 + 3x + 5$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x + 5}{x^2 + 1}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1)$$
$$= 3(x^2 + 1) + 5$$
$$= 3x^2 + 3 + 5$$
$$= 3x^2 + 8$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-5}{3}$$

* مثال :

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

احسب

$$(f \circ g)(9) = f(g(9))$$
$$= f(\sqrt{9}) = f(3)$$
$$= \frac{1}{3-2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$(f \circ g)(x) =$$
$$f(g(x)) = f(\sqrt{x})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

$$(g \circ f)(6) =$$
$$g(f(6)) = g\left(\frac{1}{6-2}\right) = g\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$(g \circ f)(x) =$$
$$g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-2}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{1}{x-2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{x-2}}$$

4

① ميل الخط المستقيم الواصل بين نقطتين :-

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

مثال :- اوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين P & Q حيث

① $P(1,-3)$, $Q(3,7)$

$$m = \frac{7-(-3)}{3-1} = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

② $P(3,2)$, $Q(5,2)$

$$m = \frac{2-2}{5-3} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

* المستقيم يوازي محور السينات

③ $P(2,3)$ $Q(2,6)$

$$m = \frac{6-3}{2-2} = \frac{3}{0} = \boxed{\infty}$$ (غير معرف)

* المستقيم يوازي محور الصادات

② ميل الخط المستقيم الذي معادلته في الصورة العامة

$ax + by + c = 0$

$$\boxed{m = \frac{-a}{b}}$$

مثال :- اوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته $2x + 4y - 7 = 0$

$a = 2$ $b = 4$

$$m = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{L_1 \parallel L_2}$$

③ المستقيم L_1 يوازي المستقيم L_2 اذا :-

$$\boxed{m_1 = m_2}$$

مثال :- هل المستقيمان متوازيان

$$4x - y - 2 = 0$$
$$y = 4x + 1$$

$y = 4x + 1$

$0 = 4x - y + 1$

$m_2 = -\left(\frac{4}{-1}\right) = 4$

$m_1 = -\left(\frac{4}{-1}\right) = 4$

$m_1 = 4$

$m_1 = m_2 = 4 \Rightarrow$ متوازيان

④ المستقيم L_1 يتعامد مع L_2 اذا

$$\boxed{L_1 \perp L_2} \quad \boxed{m_1 \times m_2 = -1}$$

مثال :- هل المستقيمان متعامدان

$$y - 3x - 2 = 0$$
$$3y + x - 15 = 0$$

$m_2 = -\frac{1}{3}$

$m_1 = \frac{3}{1} = 3$

$m_1 \times m_2 = 3 \times -\frac{1}{3} = -1 \Rightarrow$ متعامدان

* تحديد معادلة الخط المستقيم :

① بمعلومية نقطة وميل :

الميل m والنقطة (x_1, y_1)

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

E

مثال : اوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله = -2 ويمر بالنقطة $(5,-3)$

$m = -2 \qquad x_1 = 5 \qquad y_1 = -3$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-3) = -2(x - 5)$$

$$y + 3 = -2(x - 5)$$

$$y + 3 = -2x + 10$$

$$y = -2x + 10 - 3$$

$$y = -2x + 7$$

مثال : اوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله 2 ويمر بالنقطة $(1،1)$:

$x_1 = 1 \qquad y_1 = 1 \qquad m = 2$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y - 1 = 2x - 2$$

$$y = 2x - 2 + 1$$

$$y = 2x - 1$$

2 معادلة الخط المستقيم بمعلومية نقطتين

$$\boxed{\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

عزي

مثال : اوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (1,-2) (5,6)

$y_1 = -2 \qquad x_1 = 1$

$y_2 = 6 \qquad x_2 = 5$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-(-2)}{x-(1)} = \frac{6-(-2)}{5-1}$$

$$\frac{y+2}{x-1} = \frac{6+2}{5-1}$$

$$\frac{y+2}{x-1} = \frac{8}{4}$$

$$\frac{y+2}{x-1} = 2$$

$$y+2 = 2(x-1)$$

$$y+2 = 2x-2$$

$$y = 2x-2-2$$

$$y = 2x-4$$

(3) * معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله والمقطع الصادي

$$\boxed{y = mx + b}$$

b : الجزء المقطوع من محور الصادات

مثال :- اوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $m=3$ ومقطوعه الصادي $b=-2$

$$y = mx + b$$

$$y = 3x - 2$$

مثال :- اوجد الميل والمقطع الصادي للمستقيم $2x + 3y = 6$

(نرتب المعادلة)

$$3y = -2x + 6$$

$$y = \frac{-2}{3}x + \frac{6}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$b = 2 \quad ، \quad m = \frac{-2}{3}$$

(4) بمعلومية الجزء المقطوع من محور السينات (a) والجزء المقطوع من محور الصادات (b)

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

مثال :- اوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محور السينات جزءاً طوله 3 وحدات ويقطع من محور الصادات جزءاً طوله 2 وحدة ؟

$$a = 3 \qquad b = 2$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

$$\frac{2X}{6} + \frac{3Y}{6} = 1 \qquad \cancel{Y = -\frac{2X}{3} + 2}$$

$$6 \times \frac{2X + 3Y}{6} = 1 \times 6$$

$$2X + 3Y = 6$$

مثال :- اوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم $2X - 3Y = 5$

المحور السيني للخط $= a \Leftarrow$ يمر بالنقطة $(a, 0)$

$$2a = 5$$

$$a = \frac{5}{2}$$

المحور الصادي للخط $= b \Leftarrow$ يمر بالنقطة $(0, b)$

$$-3b = 5$$

$$b = \frac{-5}{3}$$

---

* المتباينات :- $\leq$ ، $<$ ، $\geq$ ، $>$

تستخدم لتعريف المجموعات الجزئية من الاعداد الحقيقية تسمى الفترة

* انواع الفترات :-

① مفتوحة $(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$

② مغلقة $(a,b) = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$

③ نصف مفتوحة $(a,b) = \{x \in R : a < x \leq b\}$

④ نصف مغلقة $(a,b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$

* خواص المتباينات :-

① $a^2 \geq 0$ لكل $a \in R$

② اذا كانت $a < b$ ، $b < c$ فإن $a < c$

③ اذا كانت $a < b$ ، $a + c < b + c$ وكذلك $a - c < b - c$

④ اذا كانت $a < b$ ، وكانت $c > 0$ فإن $ac < bc$

⑤ " " $a < b$ ، وكانت $c < 0$ فإن $ac > bc$

⑥ " " $a > 0$ فإن $\frac{1}{a} > 0$

⑦ اذا كانت $a > 0$ ، $b > 0$ $\Leftarrow$ $a < b$ فإن $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

* حل المتباينة :-

مثال :-

$$4x + 7 \geq 2x - 3$$

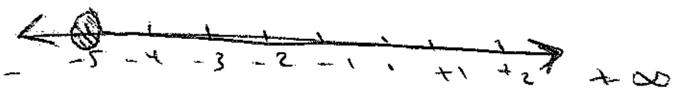
$$4x - 2x \geq -7 - 3$$

$$\frac{2x}{2} \geq \frac{-10}{2}$$

$$x \geq \frac{-10}{2}$$

$$x \geq -5$$

لا تتغير اشارة المتباينة إلا اذا ضربنا جميع الاطراف بـ (−)



مجموعة الحل = $[-5, \infty[$

اذا كانت متباينتين
لازم نخلي X في الوسط بمفردها
الجمع والطرح
الضرب

$$\boxed{\begin{array}{l}] \leftarrow -1 < \\ [\leftarrow -1 \leq \end{array}}$$

مثال :-

$$-5 < 3X - 2 < 1$$

$$+2 - 5 < 3X \cancel{-2} \cancel{+2} < 1 + 2$$

$$\frac{-\cancel{3}}{\cancel{3}} < \frac{\cancel{3}X}{\cancel{3}} < \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}$$

$$-1 < X < 1$$

مجموعه الحل $]-1 ، 1[$

اذا كانت المتباينه تحتوي على متغير من الدرجه الثانيه [illegible]
ونريد ايجاد الحل نقوم ~~[illegible]~~
بايجاد عددين حاصل ضربهم = الحد الثالث
وجمعهم = معامل X في الحد الاوسط [illegible]
على ان تكون [illegible]
[illegible] X

مثال :-

$$X^2 + X - 12 > 0$$

$$(X + 4)(X - 3) > 0$$

اما ①

$$X - 3 > 0 \quad \text{و} \quad X + 4 > 0$$

$$X > +3 \qquad X > -4$$

~~مجموعه الحل~~ ~~$]-4 ، +3[$~~

او ②

$$X - 3 < 0 \quad \text{و} \quad X + 4 < 0$$

$$X < 3 \qquad X < -4$$

مجموعه الحل $]3 ، \infty[\cup]-\infty ، -4[$

مثال

$$X^2 \leq 4X + 12$$

$$X^2 - 4X - 12 \leq 0$$

$$(X + 2)(X - 6) \leq 0$$

$$(X + 2)(X - 6) \leq 0$$

$$X + 2 \leq 0 \Rightarrow X \leq -2$$

$$X - 6 \leq 0 \Rightarrow X \leq +6$$

~~الحالة الاولى~~

~~$X - 6 \leq 0$ و $X + 2 \leq 0$~~

~~$X \leq +6$~~ ~~$X \leq -2$~~

~~الحالة الثانية~~

~~$X - 6 \geq 0$~~ ~~$X + 2 \geq 0$~~

~~$X \geq 6$~~ ~~$X \geq -2$~~

$[-2 ، 6]$

مجموعه الحل :- ~~[illegible]~~

* مثال: $(x+2) \times \frac{4x+5}{\cancel{x+2}} \geq 3 \times (x+2)$

$$4x + 5 \geq 3(x+2)$$

$$4x + 5 \geq 3x + 6$$

$$4x - 3x \geq -5 + 6$$

$$x \geq +1$$

مجموعه الحل $= [+1 , +\infty[$

* القيمة المطلقة: $|\ |$

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

* الخواص:

مثال: حل المتباينه $|2x+4| \leq 3$

$$-3 \leq \underbrace{2x + 4} \leq 3$$

$-4 - 3 \leq 2x + 4 - 4 \leq 3 - 4$

$$-4 - 3 \leq 2x \leq 3 - 4$$

$$\frac{-7}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{-1}{2}$$

$$-\frac{7}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$$

مجموعه الحل $= [-\frac{7}{2} , -\frac{1}{2}]$

مثال: $|2x-5|>3$

$2x-5 \ngtr -3$ او $2x-5 \nless 3$

$2x \nless -3+5$ $\qquad$ $2x \ngtr 3+5$

$2x \nless +2$ $\qquad$ $2x \ngtr 8$

$x \nless \frac{2}{2}$ $\qquad$ $x \ngtr \frac{8}{2}$

$x \ngtr 1$ $\qquad$ $x \ngtr 4$

$\cancel{]4, 1[}$

مجموعة الحل $]-\infty, 1[\; \cup \;]4, +\infty[$

مثال: $\left|\frac{3x+1}{2}\right| < 1$

$\frac{3x+1}{2} < 1$ $\qquad$ $\frac{3x+1}{2} > -1$

$2\times \; -1 < \frac{3x+1}{2}{}_{\times 2} < 1 \; \times 2$

$-2 < 3x+1 < 2$

$-1-2 < 3x+1-1 < 2-1$

$\frac{-3}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{1}{3}$

$-1 < x < \frac{1}{3}$

مجموعة الحل $]-1, \frac{1}{3}[$

$$y = a^{x}$$

الأس ← x *

الأســـاس ← a

a: عدد حقيقي موجب

⊛ الداله الاسية مجال الاعداد الحقيقيه ومجال المقابل الاعداد الحقيقيه الموجبه.

$$f = R \rightarrow R^{+}$$

* معكوس الداله الاسية هو الدالة اللوغاريتمية :-

$$x = \log_a y \qquad\qquad y = a^{x}$$

تقرأ لوغاريتم y للأســـاس a.

⊛ مجال الاعداد الحقيقيه الموجبة ومجال المقابل الاعداد الحقيقيه.

* اللوغاريتم الطبيعي يرمز له بالرمز $2.71828 = e = \ln x$

اللوغاريتم الاعتيادي يرمز له بالرمز $\log x$ بدل $\log_{10} x$

قوانين اللوغاريتم :-

$$\boxed{\log_b xy = \log_b x + \log_b y}$$

$$\boxed{\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y}$$

$$\boxed{\log_b x^{n} = n \log_b x}$$

$$\boxed{\log_b 1 = 0}$$

$$\boxed{\log_b b = 1}$$

* دوال أساسية :

$$\boxed{y = \sin x}$$

$$\boxed{y = \cos x}$$

$$\boxed{y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

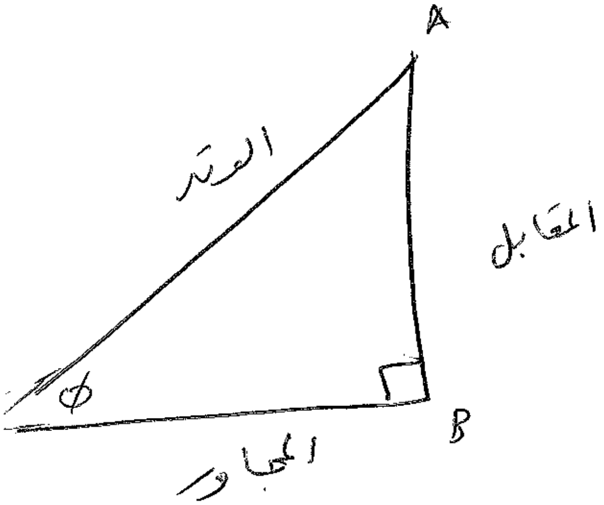
$$\boxed{y = \sec x = \frac{1}{\cos x}}$$

$$\boxed{y = \csc x = \frac{1}{\sin x}}$$

$$\boxed{y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$$\boxed{\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}}$$



$$\boxed{\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}}$$

$$\boxed{\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}}$$

$$\boxed{\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}}$$

مثال :- اذا كان $\cot\theta = \frac{3}{4}$

اوجد النسب الاساسية

$\sin\theta$ / $\cos\theta$ / $\tan\theta$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$3\tan\theta = 4$$

tan مقلوب cot

$$\boxed{\tan\theta = \frac{4}{3}}$$

$$\Longrightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{4}{3}\cos\theta = \frac{3}{3}\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{4}{3}\cos\theta$$

$$\Longrightarrow \sin^2\theta + \cos\theta^2 = 1$$

$$\left(\frac{4}{3}\cos\theta\right)^2 + \cos\theta^2 = 1$$

$$\frac{16}{9}\cos\theta^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\left(\frac{16}{9} + \frac{1}{1}\right)\cos^2\theta = 1$$

$$\left(\frac{16+9}{9}\right)\cos\theta^2 = 1$$

$$\cancel{\frac{9}{25}} \times \cancel{\frac{25}{9}} \cos^2\theta = 1 \times \frac{9}{25}$$

$$\cos^2\theta = \frac{9}{25} \Rightarrow \sqrt{\cos^2\theta} = \sqrt{\frac{9}{25}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{3}{5}}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin\theta^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin\theta^2 + \frac{9}{25} = 1$$

$$\sin\theta^2 = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\sin\theta^2 = \frac{25-9}{25}$$

$$\sqrt{\sin^2\theta} = \sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{4}{5}}$$

* الدوال النسبية :- داله كثيرة حدود (كسور) بشرط ان المقام $\neq$ صفر

مثل :- $f(x) = \dfrac{x+7}{x+5}$

* الداله الصريحه :

هي الداله التي يمكن كتابتها في الصورة $y = f(x)$

اي المتغير التابع y في طرف والمتغير المستقل x في طرف

مثل : $y = 2x + 3$

* الداله الضمنيه = هي التي تكون في صورة $f(x, y) = k$ حيث k قيمة ثابته

مثل :

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 49$$

* الداله الزوجية : تعتبر داله زوجية اذا واذا فقط

$$f(x) = f(-x)$$

مثال : هل $f(x) = x^2$ داله زوجية .

$$f(-x) = (-x)^2$$
$$= (-x)(-x)$$
$$= x^2$$

$$f(x) = x^2$$

$\boxed{f(x) = f(-x)} \Leftarrow$

: داله زوجية

مثال : هل الداله $f(x) = x^2 + x$ زوجية

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x)$$
$$= x^2 + (-x)$$
$$= x^2 - x$$

$$f(x) \neq f(-x)$$

ليست داله زوجية

* الداله الفردية :- اذا كانت $\boxed{-f(x) = f(-x)}$

مثال :- هل الداله $f(x) = x^3$ داله فردية ؟

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 \qquad -f(x) = -(x)^3 = -x^3$$

:. الداله فردية

مثال :- هل $f(x) = x^3 + x$ داله فردية

$$-f(x) = -(x^3) - x = -x^3 - x$$

$$f(-x) = (-x)^3 - x = -x^3 - x$$

$$-f(x) = f(-x)$$

:. الدالة فردية

---

* تطبيقات اقتصادية :-

① دوال الطلب الخطية :-

هناك علاقة عكسية بين كمية الطلب وسعر السلعة

سعر السلعة ↑ ⟸ ↓ الطلب

P $\qquad$ Q_D

مثال :- اذا دالة الطلب على سلعة معينه $Q_D = 25 - 5P$

② الكمية المطلوبة من هذه السلعه عندما $P = 3$

$$Q_D = 25 - 5(3) = 25 - 15 = 10$$

③ سعر الوحدة اذا كانت الكمية المطلوبة = $Q_D = 18$

$$18 = 25 - 5P \Rightarrow 18 - 25 = -5P \Rightarrow \frac{-7}{-5} = \frac{-5P}{-5}$$

$$P = \frac{7}{5} = 1.4$$

④ الكمية المطلوبه اذا كانت السلعة بدون مقابل $P = 0$

$$Q_D = 25$$

⑤ اعلى سعر يمكن دفعه لهذه السلعه ؟

أعلى سعر اذا كانت كمية الطلب = 0

$$Q_D = 0$$

$$0 = 25 - 5P$$

$$\frac{-25}{-5} = \frac{-5P}{-5}$$

$$P = 5$$

* دالة العرض (الانتاج) الخطية :

هناك علاقة طردية بين كمية الانتاج وسعر السلعة

سعر السلعة ↑ = ↑ كمية الانتاج

P Q_S

مثال :

$$Q_S = 3P - 2$$

① اوجد Q_S اذا كانت $P = 5$

$$Q_S = (3 \times 5) - 2$$
$$= 15 - 2$$
$$= 13$$

② P اذا كانت $Q_S = 10$

$$10 = 3P - 2$$
$$2 + 10 = 3P$$
$$\frac{12}{3} = \frac{3P}{3}$$
$$P = 4$$

⑤ اقل سعر يمكن ان تباع به السلعة لتغطي حاجة الانتاج

اي عندما يكون $Q_s = 0$

$$Q_s = 3P - 2$$

$$0 = 3P - 2$$

$$\frac{+2}{3} = \frac{\cancel{3}P}{\cancel{3}}$$

$$P = \frac{2}{3} = 0.6$$

* التوازن في السوق في دالتي العرض والطلب الخطيتين.

يحدث التوازن اذا كانت الكمية المعروضة من السلعة مساوية للكمية المطلوبة.

مثال :- اذا

$$QD = 2 - P$$

$$Qs = P - 1$$

اوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن

$$QD = Qs$$

$$2 - P = P - 1$$

$$2 + 1 = P + P$$

$$\frac{3}{2} = \frac{2P}{2}$$

$$P = \frac{3}{2} = 1.5$$

نعوض السعر في احدى الدالتين مثلاً

$$Q_D = 2 - P$$

$$= 2 - \frac{3}{2} \quad 1.5$$

$$= \frac{4-3}{2}$$

$$Q_D = \frac{1}{2}$$

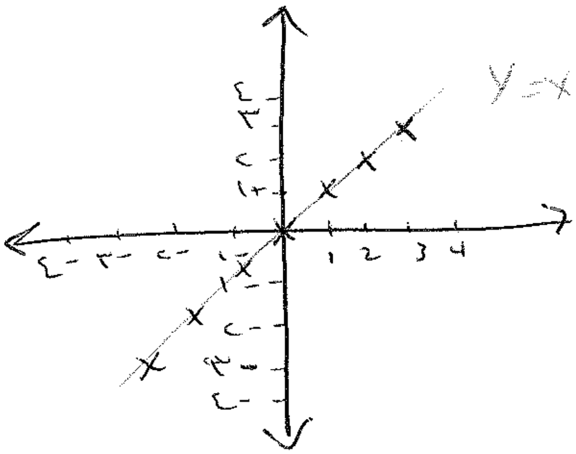
* رسم الدوال

① دالة خط مستقيم

$$y = f(x) = x$$

الحل

X	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3
y	3	2	1	0	-1	-2	-3

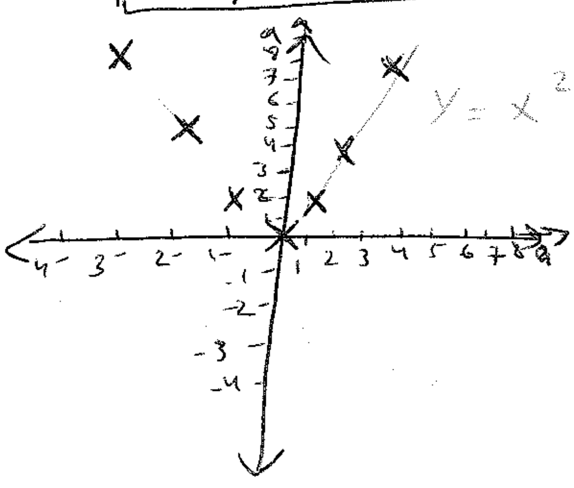


② الدالة التربيعية :

$$y = f(x) = x^2$$

الحل

X	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
Y	9	4	1	0	1	4	9

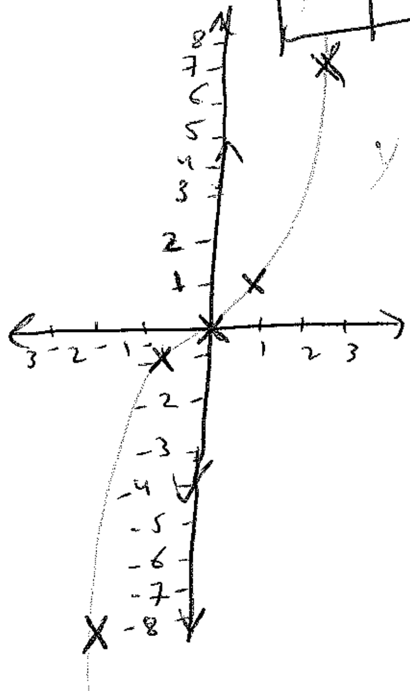


③ الداله التكعيبيه

$$y = f(x) = x^3$$

الحل

x	-2	-1	0	+1	+2
y	-8	-1	0	1	8

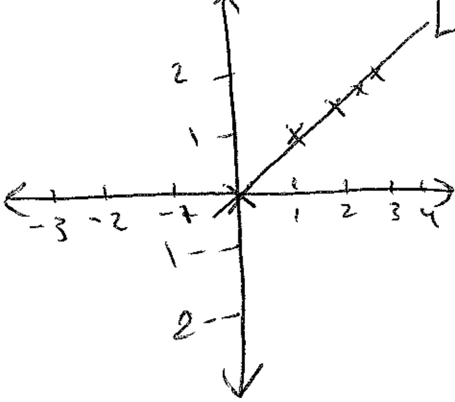


④ الدالة الجذر التربيعي :-

$$y = f(x) = \sqrt{x}$$

الحل

x	0	1	2	3	4
y	0	1	1.4	1.7	2

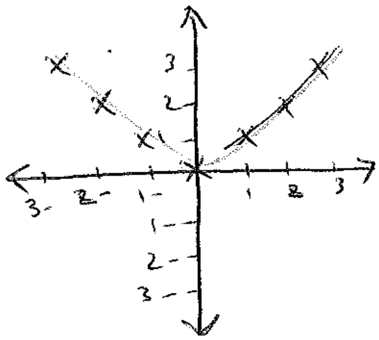


(5) دالة القيمة المطلقة:

$y = f(x) = |x|$

الحل

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	1	2	3



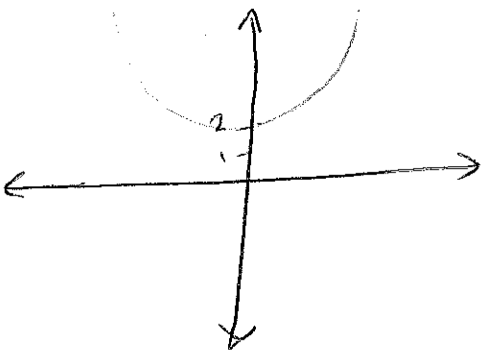
* الازاحة إلى الأعلى:

اذا كانت الدالة $y = f(x) + c$

يمكن ازاحة المنحنى $y = f(x)$ بمقدار c وحدة إلى أعلى محور الصادات.

- مثال: ارسم منحنى الدالة $y = x^2 + 2$

نحصل على هذا المنحنى بإزاحة المنحنى $y = x^2$ الى اعلى محور الصادات $+2$

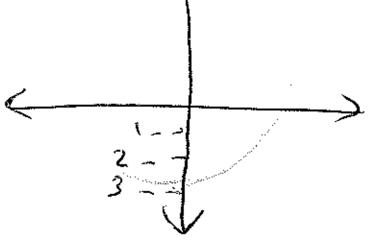


* الازاحة الى الاسفل:

$y = f(x) - c$

يمكن ازاحة المنحنى $y = f(x)$ الى اسفل بمقدار c على محور الصادات

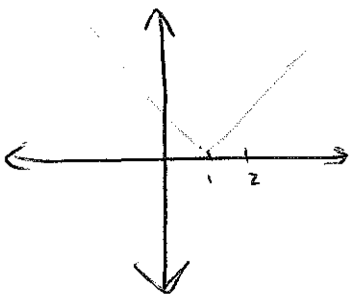
مثال: ارسم الدالة $y = x^2 - 3$



* الازاحه إلى اليمين $y = f(x-c)$

بإزاحة المنحنى $y=f(x)$ إلى اليمين بمقدار c على محور السينات

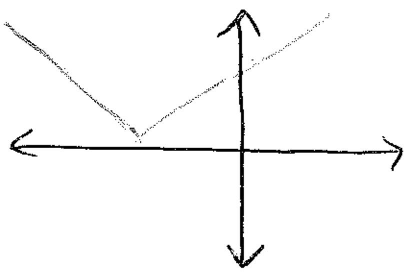
مثال: ارسم الدالة $y=|x-1|$



* الازاحه إلى اليسار :- $y = f(x+c)$

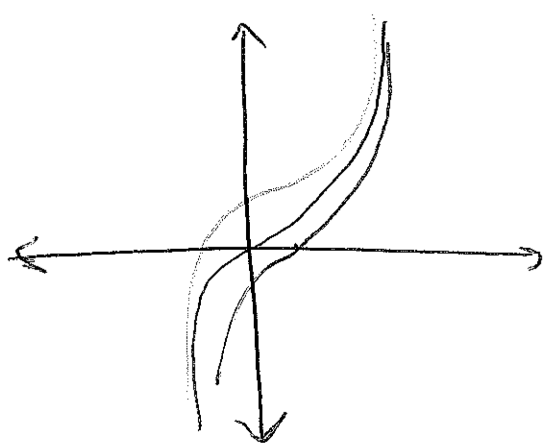
بإزاحة المنحنى $y=f(x)$ الى اليسار بمقدار c على محور السينات

مثال: ارسم الدالة : $y=|x+3|$



* مثال:- ارسم الدالة $y=(x-1)^3+2$

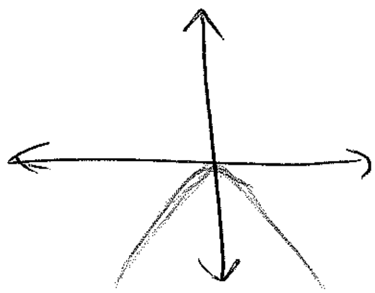
بإزاحة المنحنى $y=(x)^3$ إلى اليمين بمقدار 1 وحدة ثم الى الاعلى بمقدار 2



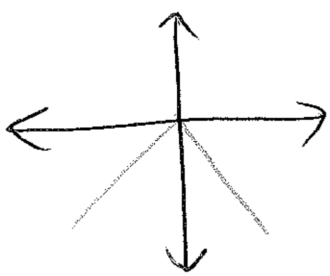
* الانعكاس على محور X :-

يمكن الحصول على منحنى $y=-f(x)$ بانعكاس منحنى $y=f(x)$ على محور X

مثال: ارسم الدالة $y=-x^2$

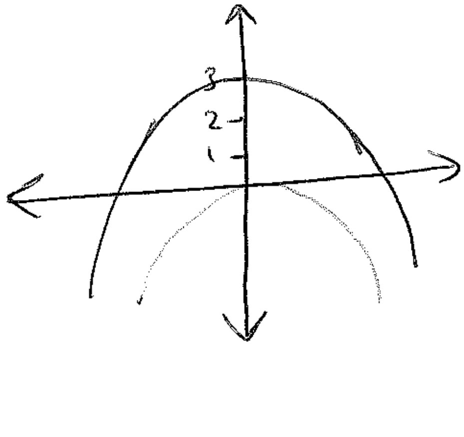


* مثال: ارسم الدالة $y=-|x|$



* مثال: ارسم الدالة $y=-x^2+3$

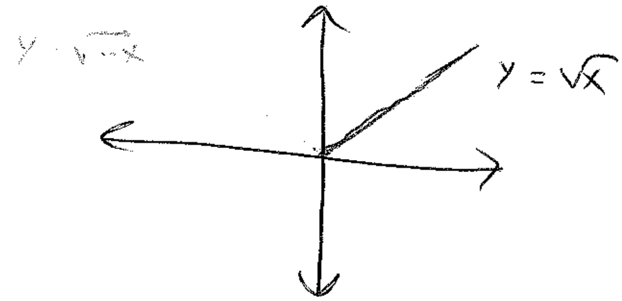
⇐ ارسم معكوس منحنى $y=x^2$ ثم ~~ارفع~~ ازيح المنحنى إلى أعلى بمقدار 3 وحدات



* الانعكاس على محور الصادات (Y)

يمكن الحصول على منحنى $y=f(-x)$ بانعكاس منحنى $y=f(x)$ على محور الصادات.

مثال:- ارسم الدالة $y=\sqrt{-x}$



* النهايات :

نرمز $\lim_{x \to a} f(x)$

تقرأ : نهاية الداله $f(x)$ عندما تقترب x من القيمة a

- مثال : اذا كانت $f(x) = 2x + 1$

فإنه $\lim_{x \to 2} f(x)$

$= 2(2) + 1$

$= 4 + 1 = 5$

* جبر النهايات :

① اذا كانت $f(x) = c$ فإنه $\lim_{x \to a} f(x) = c$

c ثابت لكل a (عدد حقيقي)

⇐ يعني الجواب ما يتغير .

② اذا كانت $f(x) = mx + c$ ⇐ $\lim_{x \to a} f(x) = ma + c$

* مثال :

① $\lim_{x \to 5} 27 = 27$

② $\lim_{x \to -2} (1 - 2x) = 1 - 2(-2) = 1 + 4 = 5$

③ $\lim_{x \to 2} (3x + 4) = 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10$

④ $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (8x - 5) = 8 \times \frac{1}{2} - 5 = 4 - 5 = -1$

(قوانين)

* اذا كانت $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = k$

، وكانت c عدد حقيقي.

فإن

1) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

$= L \pm K$

2) $\lim\limits_{x \to a} c\, f(x) = c \times \lim\limits_{x \to a} f(x) = c \times L$

3) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \times \lim\limits_{x \to a} g(x)$

$= L \times k$

4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{k}$ حيث $k \neq 0$

* مثال:

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$

$\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -8$

$\lim\limits_{x \to 2} h(x) = 10.5$

تابع ←

$\lim_{x \to 2} g(x) = -8$ $\qquad \lim_{x \to 2} f(x) = 5$ $\qquad \lim_{x \to 2} h(x) = 10.5$

فأوجد:

① $\lim_{x \to 2} [h(x) - f(x)] = \lim_{x \to 2} h(x) - \lim_{x \to 2} f(x)$

$= 10.5 - 5 = 5.5$

② $\lim_{x \to 2} [g(x) \times h(x)] = \lim_{x \to 2} g(x) \times \lim_{x \to 2} h(x)$

$-8 \times 10.5 = -84$

③ $\lim_{x \to 2} 8 f(x) = 8 \times \lim_{x \to 2} f(x) = 8 \times 5 = 40$

④ $\lim_{x \to 2} [f(x) + h(x) + g(x)] = \lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x) + \lim_{x \to 2} h(x)$

$= 5 + (-8) + 10.5$

$= +7.5$

⑤ $\lim_{x \to 2} [f(x) - g(x) \times h(x)] = \lim_{x \to 2} f(x) - \lim_{x \to 2} g(x) \times \lim_{x \to 2} h(x)$

$= 5 - (-8 \times 10.5)$

$= 5 - -84$

$= 5 + 84 = 89$

⑥ $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to 2} f(x)}{\lim_{x \to 2} g(x)} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$

⑦ $\lim_{x \to 2} \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \to 2} h(x)}{\lim_{x \to 2} f(x)} = \frac{10.5}{5} = 2.$[illegible]

* نظرية :-

$$\boxed{\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n}$$

* مثال :-

$$\lim_{x \to 1} [3x-1]^6 = \left[\lim_{x \to 1} (3x-1)\right]^6 = [(3\times 1)-1]^6$$

$$= [+3-1]^6 = [2]^6$$

$$= 64$$

* اوجد النهايات :-

① $$\lim_{x \to 2} (3x^3 + 5x^2 - 7) = 3(2)^3 + 5(2)^2 - 7$$

$$= (3\times 8) + (5\times 4) - 7$$

$$= 24 + 20 - 7$$

$$= 44 - 7 = 37$$

② $$\lim_{x \to 3} \frac{3x^2+7}{x-5} = \frac{3(3)^2+7}{3-5} = \frac{(3\times 9)+7}{-2} = \frac{27+7}{-2}$$

$$= -17$$

③ $$\lim_{x \to 2} \frac{2x-1}{5x+3} = \frac{2(2)-1}{5(2)+3} = \frac{4-1}{10+3} = \frac{3}{13}$$

④ $$\lim_{x \to 2} e^x = e^2$$

⑤ $$\lim_{x \to 1} e^{x^2+2x+1} = e^{(1)^2+2(1)+1} = e^{1+2+1} = e^4$$

⑥ $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(-1)^2-1}{(-1)+1} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{0}$$ (كمية غير معينة)

(7) $\lim_{x \to 2} \left(\log(3x^2+5) \right) = \log 3(2)^2+5$

$= \log (3 \times 4) + 5$

$= \log 12+5$

$= \log 17$

(8) $\lim_{x \to 3} \left(\ln(2x-5) \right) = \ln(2 \times 3 - 5)$

$= \ln(6-5)$

$= \ln(1) = 0$

(9) $\lim_{x \to 1} (3x^3+4x-2)^3 = \left(3(1)^3+4(1)-2\right)^3$

$= (3+4-2)^3$

$(5)^3 = 125$

(10) $\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{x^2+5} = \sqrt[3]{(2)^2+5} = \sqrt[3]{4+5} = \sqrt[3]{9}$

* اذا كانت الداله معرفة وفق اكثر من قاعدة :-

$\lim_{x \to a} f(x)$ تنشأ ثلاث حالات :-

1. تقع a ضمن القاعدة الاولى.
2. تقع a ضمن القاعدة الثانية.
3. تقع a ~~ضمن~~ على الحد الفاصل بين الحالتين.

مثال :

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5, & x<1\\ 7x-2, & x>1\end{cases}$$

اوجد :

① $\lim_{x\to 3} f(x) =$ $3>1$ تقع ضمن قاعدة الثانية

$\Rightarrow 7(3)-2 = 21-2 = 19$

② $\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) =$ $\frac{1}{2}<1 \Rightarrow$ تقع ضمن القاعدة الاولى

$\left(\frac{1}{4}\times 3=\frac{3}{4}\right)$ $3\left(\frac{1}{2}\right)^2+5 = \frac{3}{4}+\frac{5}{1} = \frac{3+20}{4}$

$= \frac{23}{4}$

③ $\lim_{x\to 1} f(x) =$ تقع على الحد الفاصل بين المعادلتين

نحسب النهاية عند اليمين الى اليسار

$\lim_{x\to 1} (7x-2) = 7(1)-2 = 7-2 = 5$

$\lim_{x\to -1} (3x^2+5) = 3(-1)^2+5 = (3\times 1)+5 = 3+5 = 8$

$\lim_{x\to -1} f(x) \neq \lim_{x\to 1} f(x)$ $\therefore \lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

* نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة :-

- الكمية الغير معينة هي الكمية التي ليس لها جواب محدد
- اهم حالات عدم التعيين التي تظهر عند حساب النهايات هي :

$$\frac{0}{0} \quad \text{و} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

- يمكنه ازالة عدم التعيين باحدى الطرق التالية :-

(1) عندما تكون نتيجة التعويض المباشر $= \frac{0}{0}$ نعالج الحالة كما يلي :-

أ- اذا كانت البسط والمقام كثيرتا حدود :-

* التحليل والاختصار ثم التعويض :-

مثال :- اوجد نهاية كل مما يلي :-

① $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} =$

تذكر

$x^2-1 = (x-1)(x+1)$

بالتعويض المباشر

$\frac{(-1)^2-1}{(-1)+1} = \frac{1-1}{-1+1} = \frac{0}{0}$ كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة :-

$$\lim_{x \to (-1)} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = x-1 = (-1)-1 = -2$$

② $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(3)^2-9}{3-3}$ بالتعويض المباشر

$= \frac{9-9}{3-3} = \frac{0}{0}$

لازالة هذه الحالة :-

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}$$

$= x+3 = 3+3 = 6$

③ $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \dfrac{(1)^2 - (3 \times 1) + 2}{1 - 1}$

بالتعويض المباشر :

$= \dfrac{1 - 3 + 2}{1 - 1} = \dfrac{0}{0}$

لإزالة هذه الحالة :

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \dfrac{(x + 2)\cancel{(x - 1)}}{\cancel{x - 1}}$

$= x + 2 = 1 + 2 = -1$

④ $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{2x} = \dfrac{0^2 + 0}{2 \times 0} = \dfrac{0}{0}$

بالتعويض المباشر

لإزالة هذه الحالة :

$\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{2x} = \dfrac{\cancel{x}(x + 1)}{2\cancel{x}} = \dfrac{x + 1}{2}$

أخذنا العامل المشترك (X)

$= \dfrac{0 + 1}{2} = \dfrac{1}{2}$

ب) إذا احتوت الدالة على جذر :

- نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر ونقوم بالتحليل والاختصار ثم التعويض :

- مثال :

① $\lim_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

بالتعويض المباشر :

$= \dfrac{\sqrt{9} - 3}{9 - 9} = \dfrac{3 - 3}{9 - 9} = \dfrac{0}{0}$

لإزالة هذه الحالة :

$\Rightarrow \lim_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \times \dfrac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$= \dfrac{(\sqrt{x})^2 - (3)^2}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \dfrac{\cancel{x - 9}}{\cancel{(x - 9)}(\sqrt{x} + 3)}$

$(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)$

الترشيح عند الجذور

$= \dfrac{1}{\sqrt{x} + 3} = \dfrac{1}{\sqrt{9} + 3} = \dfrac{1}{3 + 3} = \dfrac{1}{6}$

مثال : ②

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{\sqrt{2+2}-2}{2-2}$$

بالتعويض المباشر :

$$= \frac{\sqrt{4}-2}{0} = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}$$

لإزالة هذه الحالة :

القانون :
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \times \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$= \frac{\overset{(a\ -\ b)}{(\sqrt{x+2}-2)}\overset{(a\ +\ b)}{(\sqrt{x+2}+2)}}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \frac{\overset{a^2\ -\ b^2}{(\sqrt{x+2})^2-(2)^2}}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{(x+2)-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2+2}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

② عندما تكون نتيجة التعويض المباشر $= \frac{\infty}{\infty}$

1 إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

2 إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{معامل } x \text{ بأكبر أس في البسط}}{\text{معامل } x \text{ بأكبر أس في المقام}}}$$

3 إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty}$$

* ملاحظة:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = \left[\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}\right]^n = 0}$$

مثال:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \left[\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}\right]^3 = 0$$

* مثال :

① $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+1}{3x^3+x^2+5} = \frac{1}{3}$$

(درجة البسط = درجة المقام)

② $$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^2+2x+1} = 0$$

(درجة البسط اقل من درجة المقام)

③ $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^2+5} = \infty$$

(درجة البسط أكبر من درجة المقام)

④ $$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-2}{2x^3+7} = \frac{5}{2}$$

(درجة البسط ≠ درجة المقام)

* الاتصال : يقال ان الدالة $f(x)$ متصلة في (a) اذا تحققت الشروط التالية :

① الدالة معرفة في a أي أن $f(a)$ معرفة

② $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة

③ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

* مثال :- هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} x-9 & x \neq -3 \\ -6 & x = -3 \end{cases}$$

متصلة في $(x=-3)$

الحل :- $f(-3) = -6$

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} (x-9) = -3-9 = -12$$

بما أن $f(-3) \neq \lim_{x \to -3} f(x)$

$\Leftarrow$ الدالة غير متصلة في $x=-3$

* يعني نعوض عند قيمة X في الدالة الاولى والثانية والمفروض انهم متساويين حتى تكون الدالة متصلة في X

* مثال :- هل الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 6x & , 0 < x < 5 \\ 25+2x & , x \geq 5 \end{cases}$$

متصلة في $x=5$ ؟

$f(25+2X) =$
$25 + 2\times5 =$
$25+10$
$= 35$

$$\lim_{x \to 5} (6x) = 6\times5 = 30$$

$$\lim_{x \to 5} (25+2x) = 25 + (2\times5) = 25+10 = 35$$

$30 \neq 35$

$\therefore$ الدالة غير متصلة .

مثال :- هل الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2-3 , & x \neq 0 \\ 0 , & x = 0 \end{cases}$$

متصلة في $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} (5x^2-3) = 5(0)^2 - 3 = 0-3 = -3$$

$$\lim_{x \to 0} (0) = 0 \qquad -3 \neq 0$$

∴ الدالة غير متصلة عند $x = 0$

مثال :- اثبت ان الدالة $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ غير متصلة في $(x=-2)$ ؟

$$f(-2) = \frac{(-2)^2-4}{-2+2} = \frac{4-4}{-2+2} = \frac{0}{0}$$

∴ الدالة غير معرفة ⟸ الدالة غير متصلة عند $x = -2$

* مثال :- هل الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 2x , & x \geq -1 \\ x-1 , & x < -1 \end{cases}$$

متصلة في $x = -1$ ؟

- $f(-1) = 2 \times -1 = -2$
- $\cancel{\lim_{x \to -1} (2x) = 2 \times -1 = -2}$
- $\lim_{x \to -1} (x-1) = -1-1 = -2$

⟸ الدالة متصلة في $x = -1$

* مثال : هل الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , x<2 \\ 1 & , x=2 \\ 5-x & , x>2 \end{cases}$$

متصلة في $(x=2)$ ؟

$$f(2) = 1$$

$$\lim_{x \to 2} (x+1) = 2+1 = 3$$

$$\lim_{x \to 2} (5-x) = 5-2 = 3$$

∴ الدالة غير متصلة.

* الاشتقاقه :-

* متوسط التغير :- اذا كانت $y=f(x)$ فإنه أي زيادة في المتغير المستقل x قدرها Δx تحدث تغير في المتغير التابع y قدره Δy.

- النسبه بين التغير في y الى التغير في x تسمى :- متوسط التغير للدالة =

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$$

لأي x_1, x_2 في مجال الداله حيث $\boxed{x_2 = x_1 + \Delta x}$

* مثال :- اوجد متوسط التغير للداله $f(x) = x^2+2$ عندما تتغير x من 1 الى 1.5 ؟

$x_1 = 1$ $\quad$ $x_2 = 1.5$

$$\cancel{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(x_2^2+2)-(x_1^2+2)}{x_2-x_1}}$$

* $f(x_1) = f(1) = (1)^2+2 = 1+2 = 3$

$f(x_2) = f(1.5) = (1.5)^2+2 = 2.25+2 = 4.25$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{4.25-3}{1.5-1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$

مثال : اوجد متوسط التغير للداله $f(X) = 3X + 2$
عندما تتغير X من 1 إلى 2 ؟

$X_1 = 1 \qquad X_2 = 2$

$f(X_1) = f(1) = 3 \times 1 + 2 = 3 + 2 = 5$

$f(X_2) = f(2) = 3 \times 2 + 2 = 6 + 2 = 8$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{f(X_2) - f(X_1)}{X_2 - X_1} = \frac{8 - 5}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

مثال : اوجد متوسط التغير للداله $f(X) = X^2 + 2$
عندما تتغير X من 2 إلى 4 ؟

$X_1 = 2 \qquad X_2 = 4$

$f(X_1) = f(2) = (2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6$

$f(X_2) = f(4) = 4^2 + 2 = 16 + 2 = 18$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{f(X_2) - f(X_1)}{X_2 - X_1} = \frac{18 - 6}{4 - 2} = \frac{12}{2} = 6$$

* تعريف المشتقه الاولى :

المشتقه الاولى للداله هي نهاية متوسط التغير للداله عندما $\Delta X \to 0$

$y = f(X)$

يرمز لها بأحد الرموز التالية :

$$\frac{d}{dx} f(x) \;/\; y' \;/\; f'(x) \;/\; \frac{dy}{dx}$$

* التعريف العام للتفاضل : المبادئ الاولية للتفاضل :

$$\boxed{f'(X) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(X + \Delta X) - f(X)}{\Delta X}}$$

* مثال - اذا كانت $f(x)=x^2$ ، أوجد $f'(x)$ من المبادئ الأولية.

الحل :-

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x + 0 = \boxed{2x}$$

* ملاحظة :- عندما تكون الدالة $f(x)$ مشتقة في العدد a تكون قيمتها $f'(a)$ ويقال الدالة قابلة للاشتقاق في a.

☒ جبر الاشتقاق :-

① $\boxed{y = x^{n}}$ حيث ان n عدد حقيقي

فإن

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}}$$

مثال :- أوجد المشتقه الاولى لكل من الدوال التالية :-

① $y = x^{5} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5x^{5-1} = 5x^{4}$

② $y = x^{-3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$

③ $y = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{1-2}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$

② اذا كانت $\boxed{y = c}$ حيث c كمية ثابته فإنه

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 0}$$

مثال :- أوجد المشتقه الاولى للدوال التالية

① $y = 5 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$

② $y = -10 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$

③ $y = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$

③ اذا كانت $\boxed{y = cx^{n}}$ فإنه

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = n c x^{n-1}}$$

مثال :- أوجد المشتقة الاولى لكل من الدوال التالية :

① $y = 3x^{4} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (4 \times 3) x^{4-1}$

$= 12x^{3}$

② $y = -2x^{7} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (7 \times -2) x^{7-1}$

$= -14x^{6}$

③ $y = 16x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\frac{1}{2} \times 16) x^{\frac{1}{2}-1}$

$= 8x^{\frac{1-2}{2}} = 8x^{-\frac{1}{2}}$

④ اذا كانت $\boxed{y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}}$ فإنه

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + \dots + (n-1) a x^{n-2} + n a_n x^{n-1}}$$

مثال :- اوجد المشتقة الاولى للدالة :

① $y = 3x^{4} + 5x^{3} - 2x^{2} + 7x + 20$

$\frac{dy}{dx} = (3 \times 4) x^{4-1} + (5 \times 3) x^{3-1} - (2 \times 2) x^{2-1} + (7 \times 1) x^{1-1}$

$\boxed{x^{0} = 1}$

$= 12x^{3} + 15x^{2} - 4x^{1} + 7x^{0}$

$= 12x^{3} + 15x^{2} - 4x + 7$

5 اذا كانت $\boxed{y=[f(x)]^n}$

فإن $\boxed{\frac{dy}{dx}=n\,[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)}$

مثال :- اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=(\overbrace{2x^2+5}^{f(x)})^8$

$\cdot\; f'(x)=f'(2x^2+5)=(2\times 2)x^{2-1}=4x^1=4x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=8\,(2x^2+5)^{8-1}\times 4x$$

$$=8(2x^2+5)^7\times 4x$$

$$=8\times 4x\,(2x^2+5)^7$$

$$=32x\,(2x^2+5)^7$$

5 اذا كانت $\boxed{y=\left(f(x)\cdot g(x)\right)}$ فإن

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)}$$

مثال :- اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y=\underset{(f)}{(x^2+1)}\cdot\underset{(g)}{(2x^3-2)}$

$f'(x)=2x$

$g'(x)=(3\times 2)x^2=6x^2$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$$

$$=(2x)(2x^3-2)+(6x^2)(x^2+1)$$

$$=(4x^4-4x)+6x^4+6x^2$$

$$=10x^4+6x^2-4x$$

7 اذا كانت $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ فإن

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y=\frac{2x+5}{3x-4}$ $= f(x)$, $= g(x)$

$f(x)=2x+5$

$f'(x)=2$

$g(x)=3x-4$

$g'(x)=3$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$=\frac{(3x-4)(2)-(2x+5)(3)}{(3x-4)^2}$$

$$\cancel{=\frac{6x-8-6x-15}{(3x)^2-(2\cdot 3x\cdot 4)+(4)^2}}$$

$$\cancel{=\frac{-23}{9x^2-20x+16}}$$

$$=\frac{6x-8-(6x+15)}{(3x-4)^2}=\frac{6x-8-6x-15}{(3x-4)^2}$$

$$=\frac{-23}{(3x-4)^2}$$

④ اذا كانت $\boxed{y = \frac{c}{f(x)}}$ حيث c عدد ثابت فإنه

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-c \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}}$$

مثال: اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y = \frac{3}{x^2 - 2}$

$c = 3$

$f(x) = x^2 - 2$

$f'(x) = 2x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$= \frac{-3\,(2x)}{(x^2 - 2)^2} = \frac{-6x}{(x^2 - 2)^2}$$

9 اذا كانت $\boxed{y = f(u) \quad \text{و} \quad u = g(x)}$ فإنه

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

مثال :- اذا كانت $y = u^2 + 5u$ ، $u = x + 3$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{du} = 2u + 5$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u + 5)(1)$$

$$= 2u + 5$$

$$= 2(x + 3) + 5$$

$$= 2x + 6 + 5$$

$$= 2x + 11$$

* المشتقات العليا :-

- عندما نشتق للداله للمرة الثانيه فإننا نحصل على المشتقه الثانية ويرمز لها بأحد الرموز التالية :-

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ ، } f''(x) \text{ ، } y''$$

- عندما نشتق للمرة الثالثه فإننا نحصل على المشتقه الثالثه ويرمز لها بالرموز التالية :-

$$\frac{d^3y}{dx^3} \text{ ، } f'''(x) \text{ ، } y'''$$

- مثال :- اوجد المشتقات الثلاث الاولى للداله

$$y = x^4 + 5x^3 - 4x + 1$$

$$y' = 4x^{4-1} + (5\times3)x^{3-1} - 4x^{1-1}$$

$$= 4x^3 + 15x^2 - 4$$

$$y'' = (4\times3)x^{3-1} + (15\times2)x^{2-1}$$

$$= 12x^2 + 30x$$

$$y''' = (12\times2)x^{2-1} + 30x^{1-1}$$

$$= 24x + 30$$

* مثال اوجد المشتقات الاربع الاولى للداله

$$y = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + x - 2$$

$$\cancel{y' = (4\times5)x^{5-1} + (3\times4)x^{4-1} - (8\times3)x^{3-1} + 2x^2}$$

$$y' = (4\times5)x^{5-1} + (3\times4)x^{4-1} - (8\times3)x^{3-1} + (2\times2)x^{2-1} + x^{1-1}$$

$\boxed{x^0 = 1}$

$$= 20x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 4x^1 + 1$$

$$y'' = (20\times4)x^{4-1} + (12\times3)x^{3-1} - (24\times2)x^{2-1} + (4\times1)x^{1-1}$$

$$= 80x^3 + 36x^2 - 48x + 4$$

$$y''' = (80\times3)x^{3-1} + (36\times2)x^{2-1} - (48\times1)x^{1-1}$$

$$= 240x^2 + 72x^1 - 48$$

$$y'''' = (240\times2)x^{2-1} + (72\times1)x^{1-1}$$

$$= 480x + 72$$

- تمارين :-

* اوجد المشتقه الاولى لـ :

$y = \sqrt[5]{3x^2+4}$

$y = (3x^2+4)^{\frac{1}{5}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}(3x^2+4)^{\frac{1}{5}-1} \cdot (2\times3)x^{2-1}$$

$$= \frac{1}{5}(3x^2+4)^{\frac{1-5}{5}} \cdot 6x^1$$

$$= \frac{1}{5}(3x^2+4)^{\frac{-4}{5}} \cdot 6x$$

$$= \frac{6x}{5}(3x^2+4)^{-\frac{4}{5}}$$

$y = (4x^2+5x-2)^8$

$f(x) = 4x^2+5x-2$

$f'(x) = 8x+5$

$$\frac{dy}{dx} = 8(4x^2+5x-2)^7 \cdot 8x+5$$

$$= 8(8x+5)(4x^2+5x-2)^7$$

$$= (64x+40)(4x^2+5x-2)^7$$

* اوجد المشتقة اذا

$$u = 3x + 7$$

$$y = \frac{u^2 + 1}{u - 2} \quad \begin{matrix} f(x) \\ g(x) \end{matrix}$$

* نستخدم قانون :-

$$\frac{dy}{du} =$$

نوجد مشتقة y بالنسبة الى u

$$\frac{dy}{du} = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$f(x) = u^2 + 1$

$f'(x) = 2u$

$g(x) = u - 2$

$g'(x) = 1$

$$= \frac{(u-2) \cdot (2u) - (u^2+1) \cdot (1)}{(u-2)^2}$$

$$= \frac{2u^2 - 4u - u^2 - 1}{(u-2)^2}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{u^2 - 4u - 1}{(u-2)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = 3$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 4u - 1}{(u-2)^2} \times 3$$

$$= \frac{3u^2 - 12u - 3}{(u-2)^2}$$

$$= \frac{3(3x+7)^2 - 12(3x+7) - 3}{(3x+7-2)^2}$$

$$= \frac{3(9x^2+42x+49) - 36x - 84 - 3}{(3x+5)^2}$$

$$= \frac{27x^2+126x+147-36x-87}{(3x+5)^2}$$

$$= \frac{27x^2+90x+60}{(3x+5)^2}$$

* اوجد الثلاث المشتقات الاولى للداله

$$y = \frac{1}{3x+1} \quad \begin{matrix} f(x) \\ g(x) \end{matrix}$$

$f(x) = 1$

$f'(x) = 0$

$g(x) = 3x+1$

$g'(x) = 3$

باستخدام القانون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$= \frac{(3x+1) \cdot (0) - (1)(3)}{(3x+1)^2}$$

$$y' = \frac{0-3}{(3x+1)^2} = \frac{-3}{(3x+1)^2}$$

$$y''\left(\frac{-3 \rightarrow f(x)}{(3x+1)^2 \rightarrow g(x)}\right)$$

$f(x) = -3$
$f'(x) = 0$
$g(x) = (3x+1)^2$
$g'(x) = 2(3x+1)^{2-1} \cdot 3$
$= 2(3x+1) \cdot 3$

$$y'' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$= \frac{(3x+1)^2 \cdot (0) - (-3) \cdot [2(3x+1) \times 3]}{((3x+1)^2)^2}$$

$$= \frac{+6(3x+1) \times 3}{(3x+1)^4}$$

$$= \frac{18\cancel{(3x+1)}}{(3x+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{18}{(3x+1)^3}$$

$$y'''\left(\frac{18 \rightarrow f(x)}{(3x+1)^3 \rightarrow g(x)}\right)$$

$f(x) = 18$
$f'(x) = 0$
$g(x) = (3x+1)^3$
$g'(x) = 3(3x+1)^2 \cdot 3$

$$y''' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$= \frac{(3x+1)^3(0) - 18[3(3x+1)^2 \cdot 3]}{((3x+1)^3)^2}$$

$$= \frac{-162(3X+1)^2}{(3X+1)^6}$$

$$= \frac{-162}{(3X+1)^4}$$

* مشتقة الدوال الاساسية :

اذا كانت $y = e^{u}$ حيث $u = f(x)$

فإن $\frac{dy}{dx} = e^{u} \cdot u'$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = e^{u} \cdot \frac{du}{dx}}$$

مثال : اذا كانت $y = e^{x^2+2x+1}$

فأوجد $\frac{dy}{dx}$ ؟

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2+2x+1} \cdot (2x+2) = (2x+2)\, e^{x^2+2x+1}$$

* نتيجة : اذا كانت $y = a^{x}$

حيث a : عدد ثابت

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a^{u} \cdot \ln a \cdot \frac{du}{dx}}$$

مثال : اوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية :

① $y = 3^{x}$ $\quad \frac{dy}{dx} = 3^{x} \cdot \ln 3 \cdot (x)'$

$= 3^{x} \ln 3 \,(1)$

$= 3^{x} \ln 3$

② $y = 9^{2x}$

$$\frac{dy}{dx} = 9^{2x^2} \cdot \ln 9 \cdot (2x^2)'$$

$$= 9^{2x^2} \cdot \ln 9 \cdot (4x)$$

$$= 9^{2x^2} (4x) \ln 9.$$

* مشتقه الدوال اللوغارتميه :-

اذا كانت $\boxed{y = \ln x \Leftarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}}$

وبشكل عام :- اذا كانت

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \ln u \\ u = f(x) \end{array}}$$

فإنه

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}}$$

مثال :- اذا كانت $y = \ln(1 + x^2)$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \cdot (2x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

* نتيجة :- اذا كانت $y=\log_a x \Leftarrow \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\ln a}}$

بشكل عام :-

$y=\log_a u$ حيث $u=f(x)$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{\ln a}}$$

مثال :- اوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية :-

$$y=\log_2 x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\cdot(1)\cdot\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{x\ln 2}$$

$$y=\log_2(1+x^2)\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}\cdot(0+2x)\cdot\frac{1}{\ln 2}=\frac{2x}{(1+x^2)\ln 2}$$

* مشتقة الدوال المثلثية :-

① $$\frac{dy}{dx} = \cos x \Leftarrow y = \sin x$$

بشكل عام

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot \frac{du}{dx} \Leftarrow y = \sin u} \leftarrow ①$$

مثال :- اذا كانت $y = \sin 4x$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$ ؟

$$\frac{dy}{dx} = \cos 4x \cdot 4 = 4 \cos 4x$$

② اذا كانت

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \Leftarrow y = \cos x$$

بشكل عام

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\sin u \cdot \frac{du}{dx} \Leftarrow y = \cos u} \leftarrow ②$$

مثال :- اذا كانت $y = \cos 5x$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$ ؟

$$\frac{dy}{dx} = -\sin 5x \cdot (5) = -5 \sin 5x$$

مثال :- اوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية :-

① $y = \cos^2 x$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \cdot (2 \cos x) = -2 \cos x \cdot \sin x$$

② $y = \sin x \cdot \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x) \times (-\sin x) + (\cos x) \times (\cos x)$$

$$= -\sin^2 x + \cos^2 x$$

* جدول مشتقات بقية الدوال المثلثية :

(3) $$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}}$$

(4) $$\boxed{\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \cdot \tan u \cdot \frac{du}{dx}}$$

(5) $$\boxed{\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cdot \cot u \cdot \frac{du}{dx}}$$

(6) $$\boxed{\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \cdot \frac{du}{dx}}$$

* مثال :- أوجد $\frac{dy}{dx}$ الدوال التالية :

(1) $y = \tan^2 x$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x \cdot 2\tan x$$

(2) $y = \cot^3(2x+1)$

$$\frac{dy}{dx} = -\csc^2(2x+1) \cdot 3\cot^2(2x+1) \cdot (2)$$

$$= -6\cot^2(2x+1) \cdot \csc^2(2x+1)$$

③ $y = \sec(x+1)$

$$\frac{dy}{dx} = \sec(x+1) \cdot \tan(x+1) \cdot (1)$$

$$= \sec(x+1) \cdot \tan(x+1)$$

④ $y = \csc 2x$

$$\frac{dy}{dx} = -\csc 2x \cdot \cot 2x \cdot (2)$$

$$= -2 \csc 2x \cdot \cot 2x$$

* الاشتقاق الضمني :

مثال - اوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية

نشتق كل طرف

① $y^2 + x^2 = 9$

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} + 2x = 0 \Longrightarrow 2y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

(3) $y^2 + x^2 + 3x^3 + 4y^3 = 9$

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} + 2x + 9x^2 + 12y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} + 12y^2 \frac{dy}{dx} = -2x - 9x^2$$

$$\frac{dy}{dx}\left(2y + 12y^2\right) = -2x - 9x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 9x^2}{2y + 12y^2}$$

(3) $4x^2 + 3xy - xy^2 = 0$

$$8x + 3x\frac{dy}{dx} + 3y - 2xy\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$$

$$3x\frac{dy}{dx} - 2xy\frac{dy}{dx} = -8x - 3y + y^2$$

$$(3x - 2xy)\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y - 8x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3y - 8x}{3x - 2xy}$$

* الاشتقاق الجزئي :-

اذا كانت الداله $z = f(x,y)$

داله متغيرين ، اذا ابقينا y ثابتاً فإنه z

داله في x فقط وعليه نستطيع ايجاد تفاضل z

بالنسبه لـ x وتسمى المشتقه الجزئيه للداله بالنسبه

لـ x ويرمزلها بـ $\frac{\partial z}{\partial x}$

وبنفس الطريقه بالنسبه لـ $y \Leftarrow \frac{\partial z}{\partial y}$

مثال :- أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ لكل من الدوال الآتيه :-

① $z = xy + x^2 y + y^2 x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + 2xy + y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x^2 + 2yx$$

② $z = 2x^2 + 3xy - 6y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 3y - \cancel{6y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cancel{2x^2} + 3x - 12y$$

12

* التكامل:

عكس عملية الاشتقاق ($\acute{y}$) ويرمز لا بالرمز $\int$

* الرمز: للتكامل الغير محدد → $\boxed{\int f(x)\,.\,dx}$

* قواعد التكامل:

① $\boxed{\int dx = x + c}$ → حيث c ثابت التكامل

② $\boxed{\int a\,dx = ax + c}$ → حيث a ثابت

③ $\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c}$ → $n \neq -1$

④ $\boxed{\int a f(x)dx = a\int f(x)\,dx}$ → حيث a ثابت

⑤ $\boxed{\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)\,dx}$

⑥ $\boxed{\int e^x\,dx = e^x + c}$

⑦ $\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c}$ → $x \neq 0$

8) $$\boxed{\int \sin x \, dx = -\cos x + c}$$

9) $$\boxed{\int \cos x \, dx = \sin x + c}$$

10) $$\boxed{\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c}$$

11) $$\boxed{\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c}$$

12) $$\boxed{\int \sec x \cdot \tan x \, dx = \sec x + c}$$

13) $$\boxed{\int \csc x \cdot \cot x \, dx = -\csc x + c}$$

* أمثلة :- اوجد :

2) $$\int 5 \, dx = 5x + c$$

3) $$\int (7x + 3) \, dx = \frac{7x^{1+1}}{1+1} + 3x + c$$

$$= \frac{7^{2}}{2} + 3x + c$$

3) $$\int 3x^2 \, dx = \frac{3x^3}{3} + c = x^3 + c$$

8 $\int (3\sin x + 2x)\,dx = -3\cos x + \frac{2x^2}{2} + c$

$= -3\cos x + x^2 + c$

10 $\int (x + \sec^2 x)\,dx =$

$\frac{x^2}{2} + \tan x + c$

3 $\int (x^{\frac{1}{2}} + 4)\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 4x + c$

$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4x + c$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x + c$

6 $\int 4e^x + x^{-1}\,dx = \int 4e^x \boxed{\frac{1}{x}}\,dx$

$= 4e^x + \ln|x| + c$

* ملاحظات

$$\boxed{\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c}$$

$n \neq -1$

مثال :

- $$\int \underbrace{3(x^3+4)^4 \cdot x^2}_{(x^3+4)' = 3x^2}\,dx = \frac{(x^3+4)^5}{5} + c$$

اذا السؤال ناقص في المشتقة [illegible]

- $$\int (x^2+1)^3\, x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\,(x^2+1)^3\, x\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^4}{4} + c$$

$$= \frac{(x^2+1)^4}{8} + c$$

- $$\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$$

- $$\int \sin^2 x \cdot \cos x\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + c$$

* ملاحظة :-

$n = -1$

$$\boxed{\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx = \ln|f(x)| + c}$$

مثال :-

$$\int x^3 (1+x^4)^{-1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4} \times \int 4x^3 (1+x^4)^{-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{4} |1+x^4| + c$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int 2x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int 2x (1+x^2)^{-1}\,dx$$

$$= |1+x^2| + c$$

* ملاحظة :-

$$\boxed{\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)}}$$

مثال :-

. $\int e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx = e^{\sin x} + c$

. $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

. $\int x^2 e^{3x^3} dx = \frac{1}{9} \int 9x^2 \cdot e^{3x^3} dx$

$$= \frac{1}{9} e^{3x^3} + c$$

$y = x + c$ الشكل لها ؟

* حل المعادلات التفاضلية :-

مثال : حل المعادلة التفاضلية :-

$$\frac{dy}{dx} = x y^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$$

$$y^2 \, dy = x \, dx$$

$$\int y^2 \, dy = \int x \, dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + c$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{y^{-3}} \Longrightarrow y^{-3} \, dy = 4x^3 \, dx$$

$$\int y^{-3} \, dy = \int 4x^3 \, dx$$

$$\frac{y^{-3+1}}{-3+1} = \frac{4x^{3+1}}{3+1} + c$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = \frac{4x^4}{4} + c \Longrightarrow \frac{y^{-2}}{-2} = x^4 + c$$

* التكامل المحدد :-

اذا كانت $g'(x) = f(x)$ فإنه

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left[g(x)\right]_a^b = g(b) - g(a)}$$

يسمى هذا المقدار بالتكامل المحدد للداله $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ و يسمى

a : الحد الادنى
b : الحد الاعلى

يسميان معاً حدي التكامل

* مثال :- اوجد $\int_1^3 x^3\,dx$

$$\int_1^3 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{80}{4} = 20$$

* بعض خواص التكامل المحدد :-

(1) $$\boxed{\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx}$$

مثال :- اوجد

$$\int_1^2 4x^3\,dx = 4\int_1^2 x^3\,dx = 4\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \left[x^4\right]_1^2$$

$$= (2)^4 - (1)^4 = 16 - 1 = 15$$

② $$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

مثال:

$$\int_5^5 3x^2\,dx = 0$$

③ $$\boxed{\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx}$$

مثال:

$$\int_0^2 (3x^2 + e^x)\,dx = \int_0^2 3x^2\,dx + \int_0^2 e^x\,dx$$

④ $$\boxed{\int_c^d f(x)\,dx = -\int_d^c f(x)\,dx}$$

مثال:

$$\int_4^2 f(x)\,dx = 8 \implies \int_2^4 f(x)\,dx = -8$$

⑤ $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

مثال

$$\int_2^4 x^2\,dx + \int_4^2 x^2\,dx = \int_2^2 x^2\,dx = 0$$

* أمثلة :- اوجد التكاملات التالية

(1)
$$\int_0^3 2\,dx = \int_0^3 2x\,dx = [2x]_0^3 = (2\times3) - (2\times0)$$
$$6 - 0 = 6$$

(2)
$$\int_0^2 (x+6)\,dx = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + 6x\right)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^2$$
$$= \left[\frac{2^2}{2} + (6\times2)\right] - \left[\frac{0^2}{2} + (6\times0)\right] = \left(\frac{4}{2} + 12\right) - 0$$
$$= 2 + 12 = 14$$

(3)
$$\int_1^3 (3x^2 - 4x - 5)\,dx = \int_1^3 (x^3 - 2x^2 - 5x)\,dx$$
$$= \left[x^3 - 2x^2 - 5x\right]_1^3 = \left(3^3 - (2(3)^2) - (5\times3)\right) - \left(1^3 - 2(1)^2 - (5\times1)\right)$$
$$= (27 - (2\times9) - 15] - (1 - 2 - 5)$$
$$= -6 - (-6)$$
$$= -6 + 6 = 0$$

(4) $\int_{-2}^{2} (5x+4)\,dx = \int_{-2}^{2} \left(\frac{5x^2}{2} + 4x\right) dx$

$= \left[\frac{5x^2}{2} + 4x\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{5(2)^2}{2} + 4(2)\right) - \left(\frac{5(-2)^2}{2} + (4\times -2)\right)$

$= \left(\frac{5\times 4}{2} + 8\right) - \left(\frac{5\times 4}{2} + (-8)\right)$

$= \left(\frac{20}{2} + 8\right) - \left(\frac{20}{2} - 8\right) = (10 + 8) - (10 - 8)$

$= (18) - (2) = 16$

(5) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x}\,dx = \int_{1}^{2} (x)^{-1}\,dx = [\ln x]_{1}^{2}$

$= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0$

$= \ln 2$

(6) $\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_{0}^{\pi}$

$\cos \pi = -1$

$\cos 0 = 1$

$= -\cos \pi - (-\cos 0)$

$= -(-1) - (-1) = +1 + 1 = 2$

⑧ $\int_1^2 f(x)\,dx = 5$ ∗اذا كان

$\int_1^3 f(x)\,dx = 10$

فأوجد :-

$\because \int_1^2 f(x)\,dx = 5 \Longrightarrow \int_2^1 f(x)\,\cancel{dx} = -5$

$\int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx = -5 + 10 = +5$

$\int_1^1 f(x)\,dx = 0$

$\int_3^1 f(x)\,dx = -10$

$\int_1^2 6f(x)\,dx = 6\int_1^2 f(x)\,dx = 6 \times 5 = 30$