الأساليب الكمية في الإدارة

المحاضرة : الثانية مدة المحاضرة : دقيقة

مصطلحات هامة في بحوث العمليات :

١) النظام System :

عبارة عن مجموعة من العناصر المتداخل المرتبطة معاً في علاقات معينة ومعزولة إلى حد ما عن أي نظام آخر ، مثال : الطائرة ، شركة تجارية .

أ) الأنظمة الحتمية (Deterministic System) :

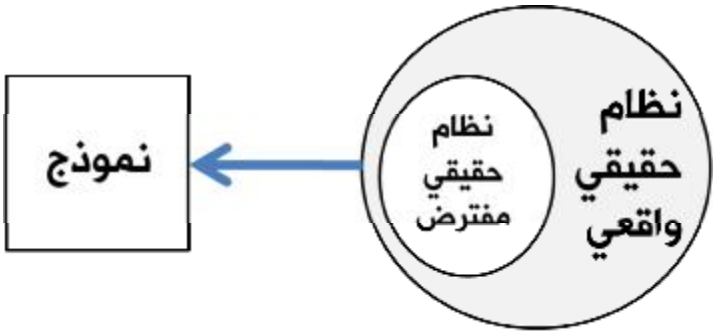
يتم التنبؤ عن سلوك عناصر النظام بطريقة محددة تماماً (جميع متغيرات النظام معروفة) .

ب) الأنظمة الاحتمالية (Probabilistic System) :

تخضع بعض العناصر إلى مفهوم التوزيعات الإحصائية بسبب اعتمادها على الأحداث العشوائية التي تتغير باستمرار .

٢) النموذج (The Model) النمذجة (Modeling) :

صورة مبسطة للتعبير عن نظام عملي من واقع الحياة أو فكرة مطروحة لنظام قابل للتنفيذ .



مراحل دراسة بحوث العمليات :

١) الملاحظة (Observation) : إدراك وجود المشكلة وتحديدها (حقائق ، آراء ، أعراض) .

٢) تعريف المشكلة (Problem Definition) : تعريف المشكلة بعبارات محددة وواضحة (الهدف ، المتغيرات ، الثوابت والقيود المفروضة) .

٣) بناء النموذج (Model Construction) : تطوير النموذج الرياضي الذي يتفق مع أهداف المسألة .

٤) حل النموذج (Model Solution) : التوصل إلى الحل الذي يحقق أفضل قرار .

٥) التحقق من صحة النموذج (Model Validity) : عن طريق مقارنة النتائج مع قيم سبق اختبارها أو عن طريق استخدام الاختبارات الإحصائية .

٦) تنفيذ النتائج (Implementation) : ترجمة النتائج إلى تعليمات تشغيلية تفصيلية .

البرمجة الرياضية (Mathematical Programming) :

- العلم الذي يبحث في تحديد القيمة (أو القيم) العظمى أو الصغرى لدالة محددة تسمى دالة الهدف (Objective Function) وتختصر (O.F) .
- تعتمد دالة الهدف على عدد نهائي من المتغيرات (Variables)
- المتغيرات في دالة الهدف قد تكون مستقلة عن بعضها أو قد تكون مرتبطة مع بعضها بما يسمى [القيود (Constraints) .

البرمجة الخطية (Linear Programming)

- حالة خاصة من البرمجة الرياضية .
- دالة الهدف و دالة القيم ← خطية .
  - البرمجة (Programming) .
  - الخطية (Linearity) .

مكونات نموذج البرمجة الخطية :

أ) وجود عدد من المتغيرات (متغيرات القرار Decision Variables) التي يجب تحديد قيمها للوصول إلى الهدف المنشود .

- سنرمز لهذه المتغيرات بـ $x1, x2, \dots, xn$

مثال : كمية الإنتاج لسلعة معينة (طاولات ، أقلام ، سيارات ، حقائب) .

ب) وجود هدف يُراد الوصول إليه ، ويعبر عنه رياضياً بدالة خطية تسمى دالة الهدف وتأخذ الشكل العام التالي :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} Cj\ xj$$

حيث Cj أعداد حقيقة تسمى بمعاملات المتغيرات

$(j = 1,2, \dots \dots, n)$

وتصنف الأهداف إلى مجموعتين :

الأولى) تعظيم دالة الهدف (Maximization) السعي إلى تحقيق الربح لأقصى حد ممكن

$$\max \quad Z = \sum_{j=1}^{n} Cj\ xj$$

الثانية) تصغير دالة الهدف (Minimization) السعي إلى تخفيض التكاليف لأدنى حد ممكن

$$\min \quad Z = \sum_{j=1}^{n} Cj\ xj$$

ج) وجود علاقة بين المتغيرات يعبر عنها رياضياً بمتباينات تسمى القيود الخطية (قيود المسألة) (Constraints) وتأخذ أحد الشكلين :

ج/١) غالباً إذا كانت الدالة من نوع التعظيم أي Max

$$\sum_{i=1}^{m} a\,ij\;xj \;\leq bi$$

ج/٢) غالباً إذا كانت الدالة من نوع التصغير أي Min

$$\sum_{i=1}^{m} a\,ij\;xj \;\geq bi$$

حيث

n تعبر عن عدد المتغيرات

m تعبر عن عدد قيود المسألة

aij أعداد حقيقية تسمى معاملات المتغيرات في القيود

bi أعداد حقيقية تعبر عن الموارد المتاحة أو المتطلبات اللازمة لكل قيد من القيود

المتغيرات = الأعمدة

القيود = الصفوف

د) وجود شروط أخرى بصرف النظر عن الهدف :

د/١) كأن لا تقل قيمة أحد المتغيرات عن كمية معينة بسبب التزامات معينة .

د/٢) كأن لا تزيد قيمة أحد المتغيرات عن كمية معينة بسبب وجود منافسة على سبيل المثال .

د/٣) الاشتراط على المتغيرات أن تكون غير سالبة (شروط مفروض على جميع النماذج)

مثال : قيد عدم السالبية $xj \;\geq 0$

❖ الشكل العام في حالة التعظيم :

دالة الهدف :

$$\max \quad \mathcal{Z} = \sum_{j=1}^{n} Cj\;xj$$

s.t

القيود السالبية :

$$\sum_{i=1}^{m} a\,ij\;xj \;\leq bi$$

$$xj \;\geq 0$$

صياغة نموذج برمجة خطية :

١) تحديد المتغيرات x j حيث j=1.2..... ..,n وتعريفها مع تعريف وحدات القياس المستعملة لكل متغير .

٢) تحديد معاملات المتغيرات في دالة الهدف c j مع تعريف الوحدات المستخدمة لقياس هذه المعامل .

٣) تحديد دالة الهدف مع التأكيد من استخدام وحدات القياس نفسها .

٤) تحديد معاملات المتغيرات في القيود a ij مع وحدات القياس المناسبة لكل معامل .

٥) تحديد معاملات الطرف الأيمن (الموارد أو الالتزامات) bi مع وحدات القياس المناسبة لكل معامل .

٦) قيد عدم السالبية .

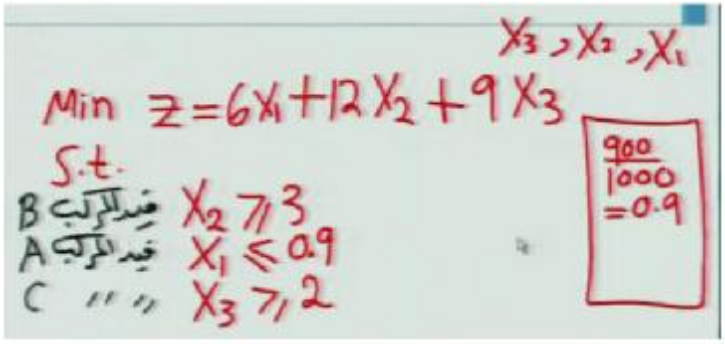
مثال ١ :

تقوم الشركة العربية للمنظفات بإنتاج أنواع مختلفة من مساحيق غسيل الملابس. إذا تسلمت الشركة طلبات من احد التجار للحصول على ١٢ كيلو جرام من مسحوق معين من منتجات الشركة. إذا كان المسحوق المطلوب يتم تصنيعه من خلال مزج ثلاثة أنواع من المركبات الكيمائية هي C,B,A

- إذا علمت أن المواصفات المطلوبة لهذا المسحوق كما ورد في الطلب كانت ما يلي:
  - + يجب أن يحتوي المسحوق على ٣ كيلو جرام على الأقل من المركب B
  - + يجب أن لا يحتوي المسحوق على أكثر من ٩٠٠ جرام من المركب A
  - + يجب أن يحتوي المسحوق على ٢ كيلو جرام بحد أدنى من المركب C
  - + يجب أن يحتوي المزيج على ٤ كيلو جرام على الأكثر من A,C .

إذا علمت أن تكلفة تصنيع الكيلو جرام الواحد من المركب A تساوي ٦ ريال، وان تكلفة تصنيع الكيلو جرام من المركب B تساوي ١٢ ريال في حين تبلغ تكلفة تصنيع الكيلو جرام من المركب C تساوي ٩ ريال.

- المطلوب : صياغة برنامج خطي :



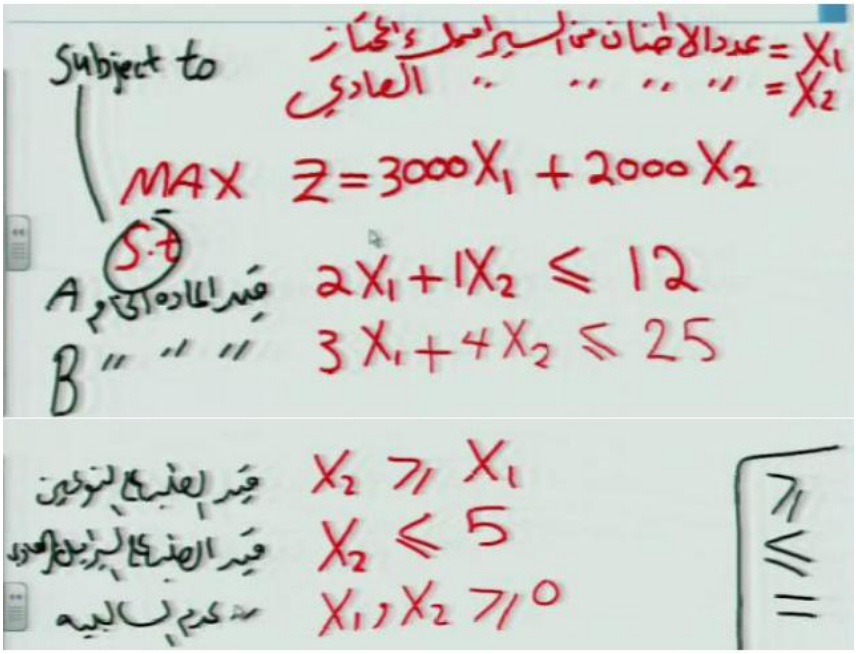
مثال ٢ :

تمتلك شركة مصنعاً صغيراً لإنتاج السيراميك من النوع الممتاز والعادي وتوزيع الإنتاج على تجار حيث تبلغ الكميات المتاحة B, A الجملة. يحتاج إنتاج السيراميك إلى نوعين أساسين من المواد الخام من كل منهما يومياً ١٢ طن ، ٢٥ طن على التوالي . الجدول التالي يظهر احتياجات إنتاج الطن من السيراميك الممتاز B, A وإنتاج الطن من السيراميك العادي من المادتين الخام

	احتياجات السيراميك من المواد الخام		المتاح بالطن
	الممتاز	العادي	
A مادة خام	1	2	١٢
B مادة خام	٣	٤	٢٥

وقد أظهرت دراسات السوق أن الطلب على السيراميك العادي يزيد عن الطلب على السيراميك الممتاز، كما أظهرت دراسات السوق أيضا أن الحد الأقصى للطلب اليومي على السيراميك العادي هو ٥ طن. يبلغ هامش ربح الطن من السيراميك الممتاز ٣٠٠٠ ريال في حين يبلغ هامش الربح من النوع العادي ٢٠٠٠ ريال.

- المطلوب : صياغة برنامج خطي مناسب للمشكلة.



حل مسائل البرمجة الخطية

- ✓ Graphical Method طريقة الرسم البياني
- ✓ Simplex Method طريقة السمبلكس
  - ➢ يعتمد على عدد المتغيرات في المسألة

خصائص معالجة مشاكل البرمجة الخطية

- تقع جميع الحلول الممكنة في منطقة محدبة، وتكون مجموعة نقاطها مجموعة محدبة.
- المنطقة المحدبة : هي المنطقة التي تكون فيها كل النقاط الواقعة على الخط المستقيم الموصل بين أي نقطتين تقع كذلك في المنطقة المحدبة نفسها.

- مجموعة الحلول الممكنة محدودة بعدد نهائي من الجوانب .
- أي حل أمثل لا بد وأن يقع على احد أركان منطقة الحلول الممكنة (النقاط الركنية) .

طريقة الرسم البياني

❶ الخطوة الأولى :

- تحديد منطقة الحلول المقبولة أو الممكنة (Feasible solutions) التي تتحقق عندها المتباينات أو القيود
- (منطقة تقاطع مناطق الحل للقيود = التي تتحقق عندها جميع قيود المسألة)

❷ الخطوة الثانية :

الحصول على قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من نقاط رؤوس المضلع المحدب (النقاط الركنية) في منطقة الحلول المقبولة ، تكون عندها دالة الهدف أكبر (أصغر) ما يمكن .

حالات خاصة في البرمجة الخطية :

- ✓ قد يوجد تكرار (تحلل) Degenerate (في الطريقة المبسطة)
- ✓ قد يوجد حلول مثلى متعددة Optimal solutions (بمجرد النظر إلى المسألة)
- ✓ قد لا يوجد لها حل Infeasible (من الرسم البياني)
- ✓ قد يوجد لها حل غير محدود Unbounded (من الرسم البياني)

خطوات طريقة الرسم البياني :

1. تحويل متباينات القيود إلى معادلات ، و عملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة معادلة خطية يمكن تمثيلها بخط مستقيم .
2. تحديد نقاط تقاطع كل قيد مع المحورين والتوصيل بين هاتين النقطتين بخط مستقيم لكل قيد .
3. رسم القيود على الشكل البياني بعد أن يتم تحديد نقاط التقاطع وتحديد منطقة الحل الممكن .
4. تحديد الحل الأمثل (الحلول المثلى) والذي يقع على أحد نقاط زوايا المضلع (نقطة ركنية) من خلال :

أ) إيجاد قيم المتغيرات عند هذه النقاط .

ب) اختيار أكبر (أصغر) قيمة بعد التعويض بدالة الهدف .

مثال معرض الهفوف للرفوف :

	الطاولات (للطاولة)	الكراسي (للكرسي)	الوقت المتاح يومياً
ربح القطعة بالريال	7	5	
النجارة	3 ساعة	4 ساعة	2400
الطلاء	2 ساعة	1 ساعة	1000

قيود أخرى :

- عدد الكراسي المُصنعة لا يزيد عن ٤٥٠ كرسي .
- يجب تصنيع ١٠٠ طاولة على الأقل يومياً .

صياغة البرنامج الخطي :

المتغيرات :

x1 = عدد الطاولات المصنعة

x2 = عدد الكراسي المصنعة

دالة الهدف من نوع تعظيم Maximize :

$$\text{Max } z = 7x_1 + 5x_2$$

- قيد النجارة $3x_1 + 4x_2 \leq 2400$
- قيد الطلاء $2x_1 + 1x_2 \leq 1000$

قيود إضافية :

- لا يمكن إنتاج أكثر من [٤٥٠] من الكراسي ... $x_2 \leq 450$
- يجب إنتاج ١٠٠ طاولة بحد أدنى ... $x_1 \geq 100$

❁ **قيد عدم السالبية :** $x1,x2 \geq 0$

❁ **الشكل العام للمسـألة**

$$\text{Max } z = 7x1 + 5x2$$

s.t.

$$3x1 + 4x2 \leq 2400$$

$$2x1 + 1x2 \leq 1000$$

$$x2 \leq 450$$

$$x1 \geq 100$$

$$x1, x2 \geq 0$$

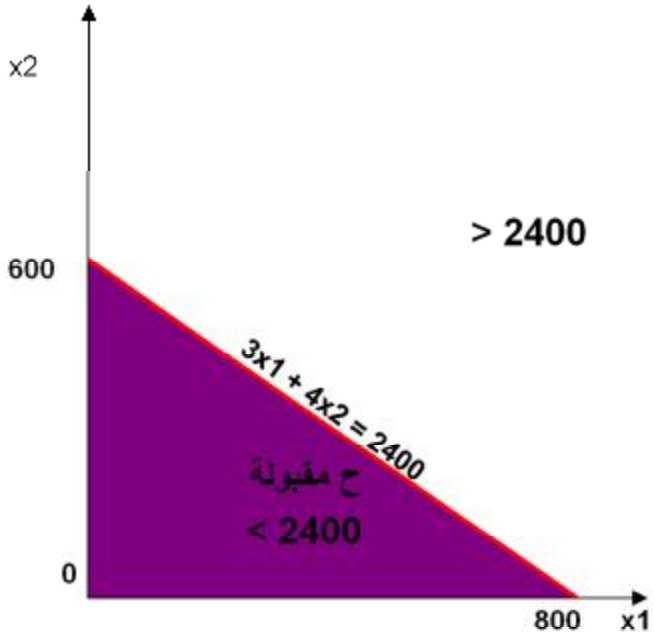
قيد النجارة

$3x1 + 4x2 = 2400$

التقاطع

$(x1 = 0, x2 = 600)$

$(x1 = 800, x2 = 0)$



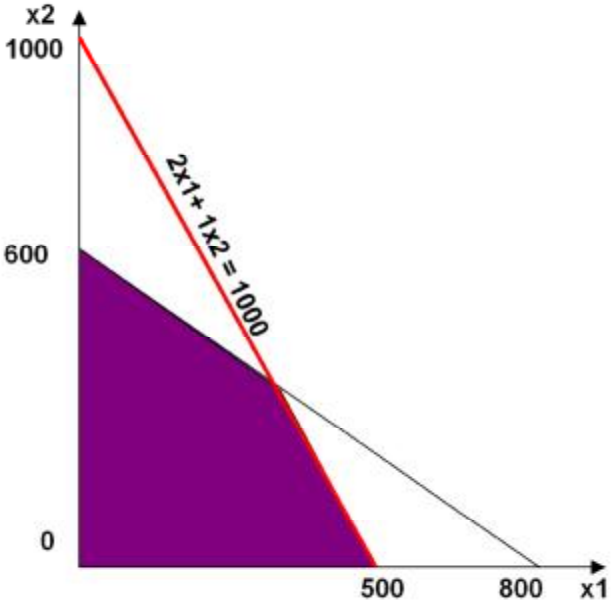
قيد الطلاء

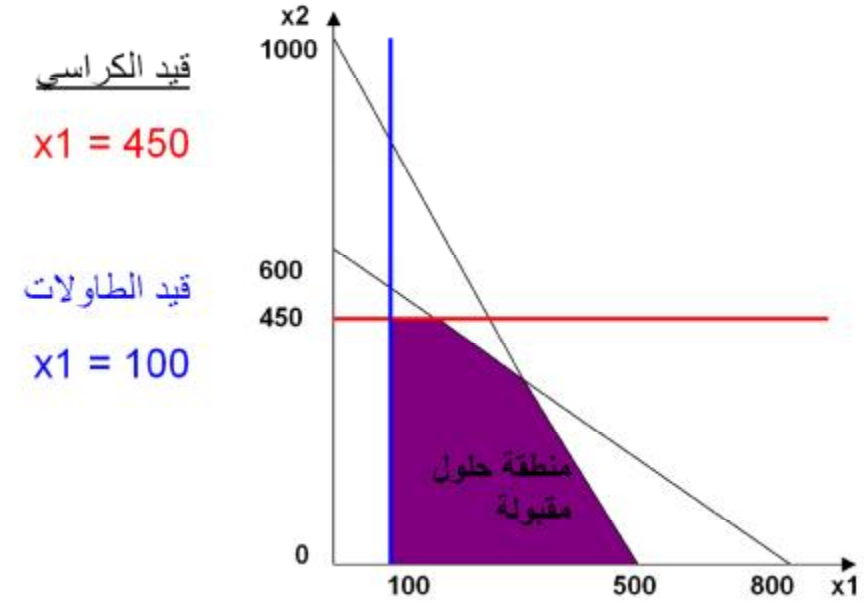
$2x1 + 1x2 = 1000$

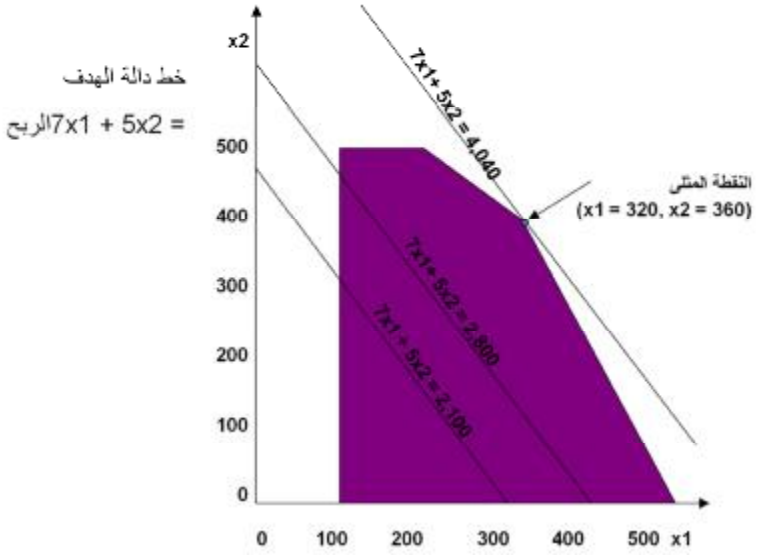
التقاطع

$(x1 = 0, x2 = 1000)$

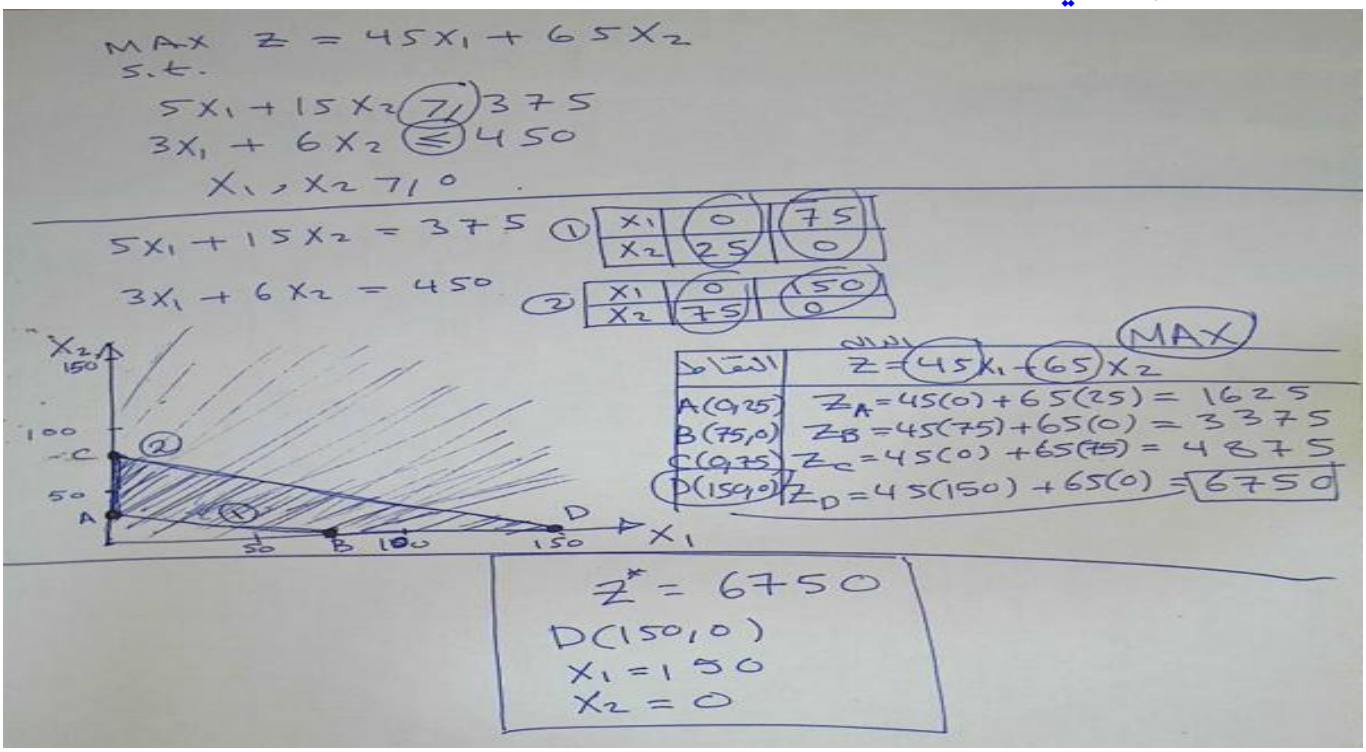
$(x1 = 500, x2 = 0)$



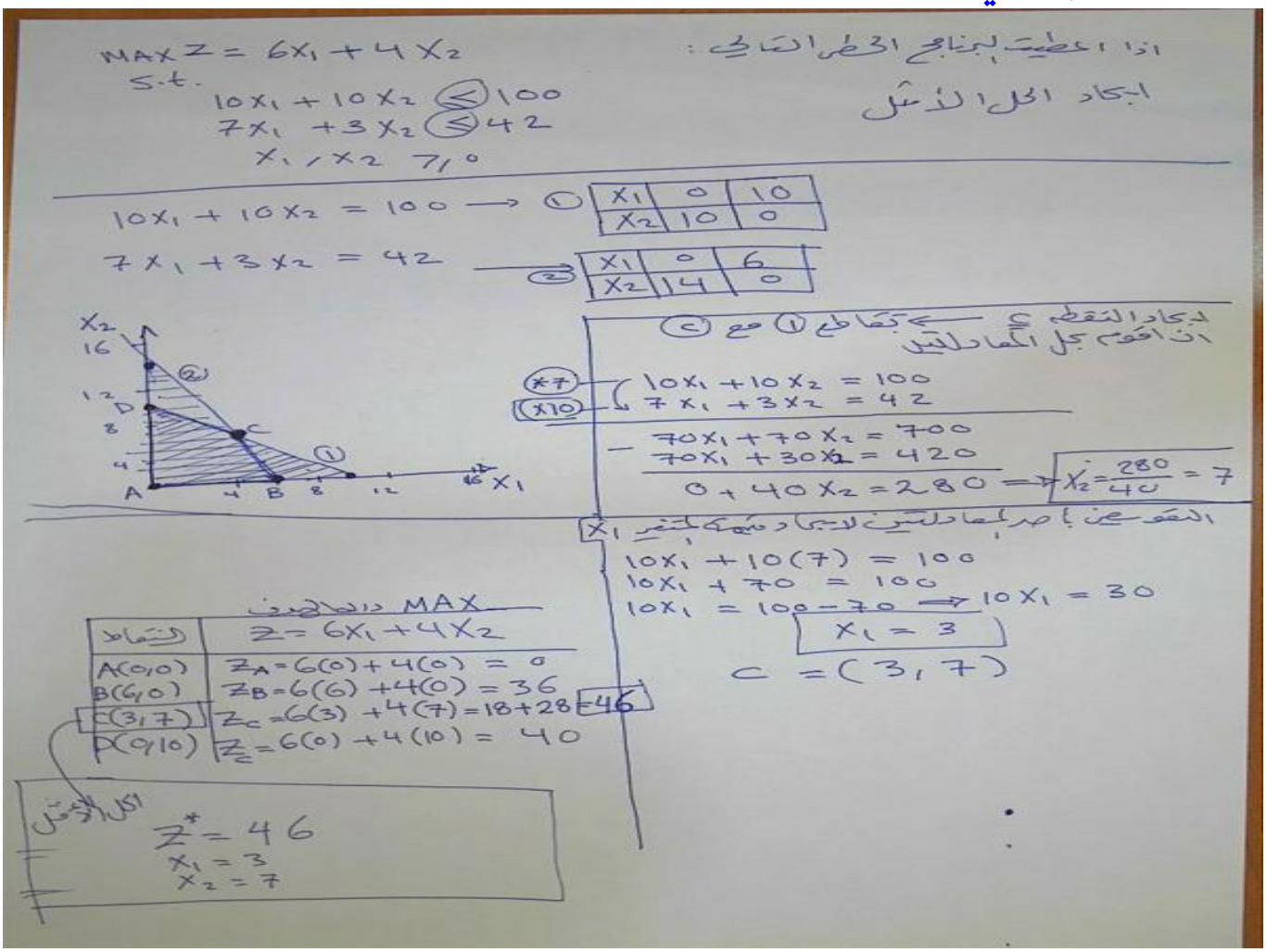

قيد الكراسي
x1 = 450
قيد الطاولات
x1 = 100
x2
1000
600
450
0
منطقة حلول مقبولة
100
500
800
x1


خط دالة الهدف
الربح = 7x1 + 5x2
x2
500
400
300
200
100
0
7x1+ 5x2 = 4,040
النقطة المثلى
(x1 = 320, x2 = 360)
7x1+ 5x2 = 2,800
7x1 + 5x2 = 2,100
0
100
200
300
400
500
x1

مثال على الرسم البياني [١] :



مثال على الرسم البياني [٢] :



الطريقة المبسطة Simplex Method

- المؤسس : Dr. Dantzing عام 1947
- وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية في استخراج الحل الأمثل لمسائل البرمجة الخطية، بغض النظر عن عدد متغيرات المسألة.
- ساعد في انتشارها إمكانية برمجة المشكلات ذات العلاقة والتوصل إلى نتائج باستخدام الحاسب الآلي .

أساسيات طريقة السمبلكس :

- تقوم فكرة السمبلكس على وجود الحل الأمثل دائما عند احد أركان منطقة الحلول الممكنة .
- لكن بدلاً من ميزة رؤية هذه الأركان كما يظهرها الرسم البياني .
- تستخدم طريقة السمبلكس عملية التحسن التدريجي :

١) يجب أن يكون الركن التالي مجاور للركن الحالي .

٢) لا يمكن أن يعود الحل في اتجاه عكسي إلى ركن تم تركه .

الشكل القياسي (الصورة القياسية) Standard Form

يعتبر الشكل القياسي من الأشكال المهمة حيث لا يمكن تطبيق الطريقة المبسطة إلا بعد تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى الشكل القياسي :

١) تتخذ دالة الهدف صفة التعظيم أو التصغير .

٢) جميع القيود الموجودة على شكل متباينات تتحول إلى مساواة في الشكل القياسي على الشكل التالي :

٢/١) إذا كانت إشارة القيد على شكل أقل من أو يساوي [ ] فإننا نضيف [+] متغير راكد إلى الطرف الأيسر في القيد .

٢/٢) إذا كانت إشارة القيد على شكل أكبر من أو يساوي [ ] فإننا نطرح [–] متغير راكد من الطرف الأيسر في القيد .

٢/٣) جميع المتغيرات [بما فيها المتغيرات الراكدة] غير سالبة .

٢/٤) نقوم بنقل الطرف الأيمن من دالة الهدف إلى الطرف الأيسر [عند Z] مع إضافة المتغيرات الراكدة بمعاملات صفرية مساوية لعدد القيود .

حول النموذج التالي إلى الشكل القياسي :

Max Z = 5*X1 + 3*X2
s.t.
4*X1 + 3*X2 <= 2
2*X1 + X2 >= 3
X1, X2 >= 0

- ننقل الطرف الأيمن من دالة الهدف إلى الطرف الأيسر ليصبح :

Max Z - 5*X1 - 3*X2 = 0

- نضيف متغير راكد موجب مثل S1 في الطرف الأيسر للقيد الأول ليصبح :

4*X1 + 3*X2 + S1 = 2

- نطرح متغير راكد موجب مثل S2 في الطرف الأيسر للقيد الثاني ليصبح :

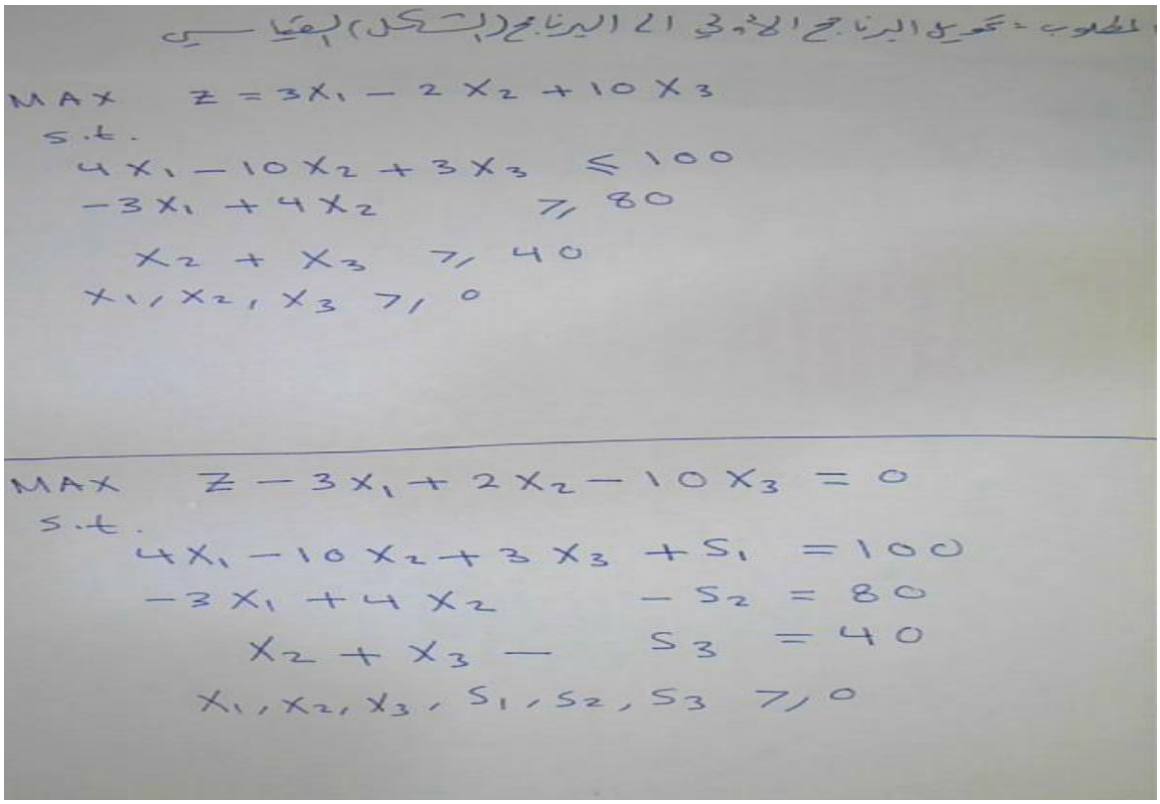
2*X1 + X2 – S2 = 3

- نسمي S1, S2 متغيرات راكدة Slack Variables

الشكل القياسي للمثال السابق :

Max Z - 5*X1 - 3*X2 = 0
s.t.
4*X1 + 3*X2 + S1 = 2
2*X1 + X2 – S2 = 3
X1, X2 ,S1, S2 >= 0

مثـــال

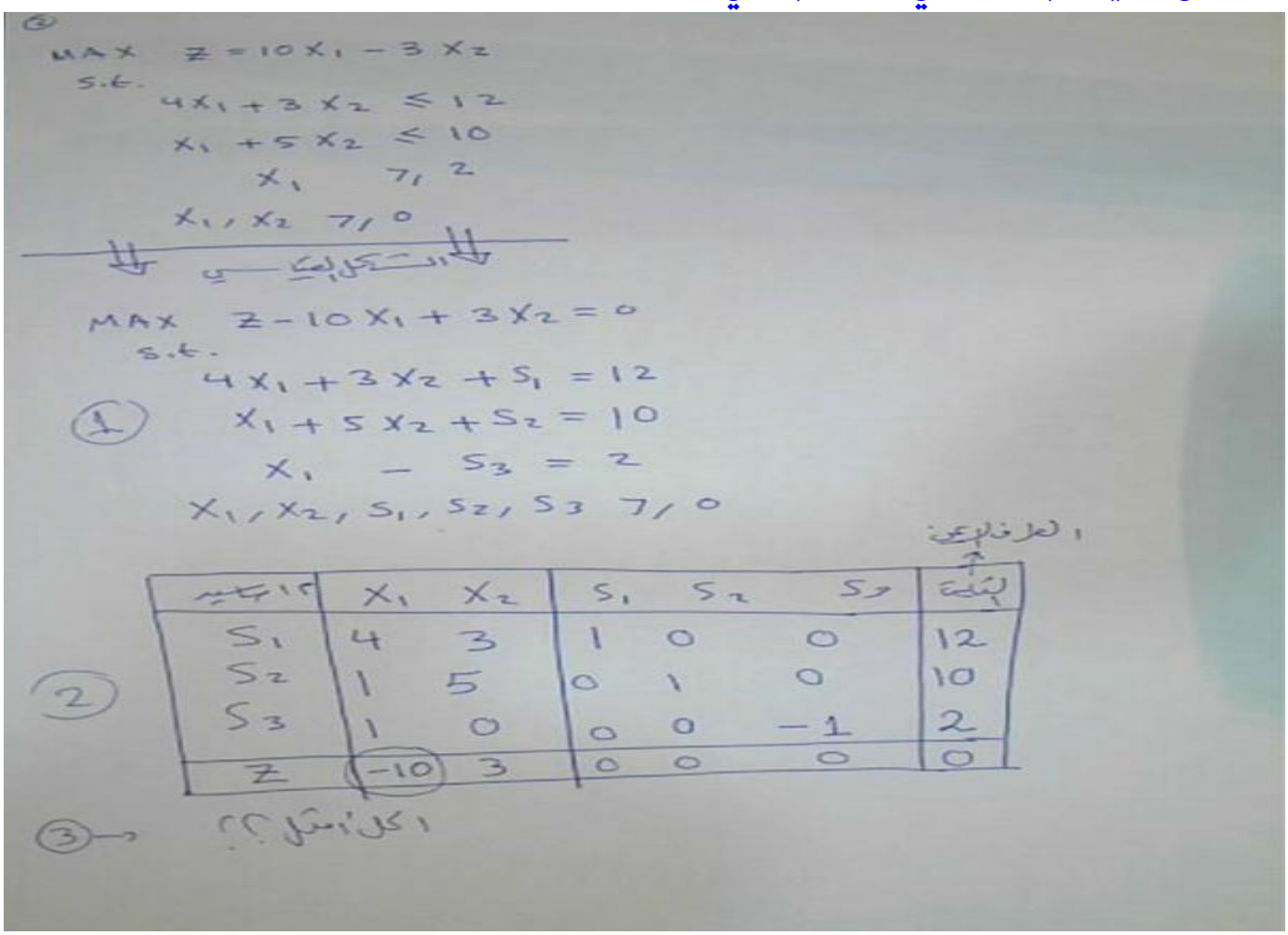


خطوات الحل باستخدام طريقة السمبلكس

- أولاً : تحويل نموذج البر مجة الخطية إلى الشكل القياسي Standard Form .
- ثانياً: تفريغ المعاملات الواردة في النموذج القياسي في جدول يطلق عليه جدول الحل الابتدائي (الأولي) .
- ثالثاً: التحقق من الأمثلية
- رابعاً : تحسين الحل: [تحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج] .
- خامساً: تكوين الجدول الجديد

المتغيرات الاساسية Basic Var.	المتغيرات غير الاساسية X_1 $X_2 \dots X_m$	S_1 $S_2 \dots S_n$	الثابت Solutions
S_1	a_{11} $a_{12} \dots a_{1m}$	1 0 ... 0	b_1
S_2	a_{21} $a_{22} \dots a_{2m}$	0 1 ... 0	b_2
:	: : :	: : :	:
S_n	a_{n1} a_{n2} a_{nm}	0 0 1	b_n
Z	c_1 $c_2 \dots c_m$	0 0 ...0	0

مثال على تكوين الجدول الأولي(الحل الابتدائي) :



ثالثاً: التحقق من الأمثلية

- **يتم الحكم من خلال النظر إلى صف Z**
- **فإذا كانت جميع قيم المعاملات في هذا الصف صفرية أو موجبة فهذا يعني أننا قد توصلنا للحل الأمثل .**
- **أما إذا كان هناك على الأقل معامل واحد سالب فهذا يعني أن هناك مجال لتحسين الحل .**

رابعاً: تحسين الحل : تحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج .

المتغير الداخل : [في مسائل التعظيم]

- **المتغير الداخل هو المتغير الذي له أكبر معامل سالب في دالة الهدف في جدول الحل .**
- **ويطلق عليه العمود المحوري Pivot Column .**

المتغير الخارج : [في مسائل التعظيم]

- **يتحدد عن طريق قسمة عمود الثوابت على القيم المناظرة لها في العمود المحوري مع إهمال المتغيرات ذات القيم السالبة أو الصفرية.**
- **ويكون المتغير الخارج هو ذلك المتغير في الصف الذي يتضمن أقل خارج قسمة.**
- **يطلق عليه صف الارتكاز Pivot equation .**

- نطلق على صف المتغير الخارج اسم [معادلة الارتكاز] .
- نطلق أسم [العنصر المحوري] Pivot Element على نقطة تقاطع العمود الداخل مع الصف الخارج .
- نبتدئ بتكوين الحل الأساسي الجديد بتطبيق طريقة [جاوس جوردان] Gauss Jordan والتي تقوم على نوعين من العمليات الحسابية : الشرح الإضافي [http://www.yzeeed.com/vb/showthread.php?t=13009]

  ۞ النوع ١ (معادلة الارتكاز) :

  معادلة الارتكاز الجديدة = معادلة الارتكاز القديمة / عنصر الارتكاز

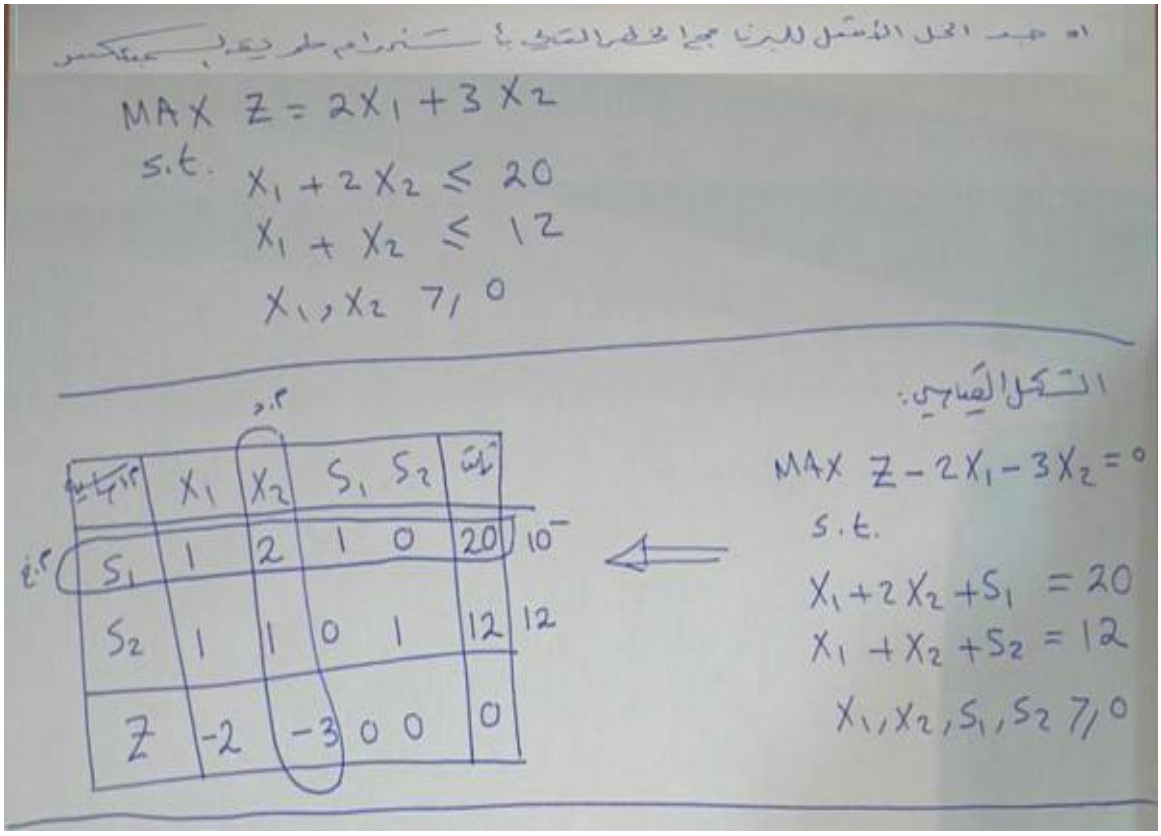
  ۞ النوع ٢ (كل المعادلات الاخرى بما فيها Z).

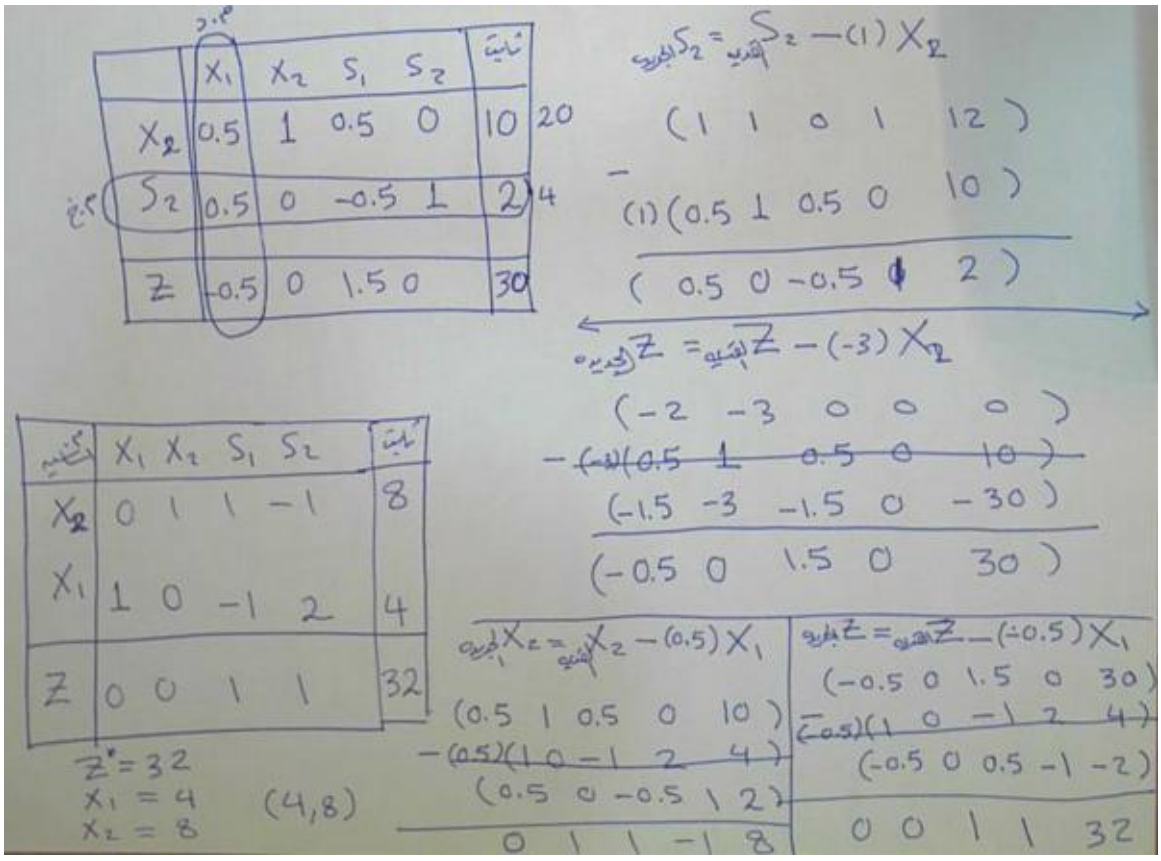
  المعادلة العادلة الجديدة = المعادلة القديمة – معاملها في العمود الداخل × معادلة الارتكاز الجديدة

- خامساً: تكوين الجدول الجديد

ملاحظات :

- عمليات النوع الأول : ستجعل من عنصر الارتكاز يساوي ١ في معادلة الارتكاز الجديدة .
- عمليات النوع الثاني : ستجعل كل المعاملات الأخرى في العمود الداخل مساوية للصفر .
- تمثل نتائج كلا النوعين من العمليات الحسابية الحل الأساسي الجديد من خلال إحلال المتغير الداخل في كل المعادلات الأخرى ما عدا معادلة الارتكاز .


MAX Z = 2X1 + 3X2
s.t.
X1 + 2X2 ≤ 20
X1 + X2 ≤ 12
X1, X2 ≥ 0
الشكل القياسي:
MAX Z - 2X1 - 3X2 = 0
s.t.
X1 + 2X2 + S1 = 20
X1 + X2 + S2 = 12
X1, X2, S1, S2 ≥ 0


(4,8)
Z = 32
X1 = 4
X2 = 8

لدينا البرنامج الخطي التالي

$$\text{Max} \quad Z = 6x_1 + 8x_2$$

s.t

$$30x_1 + 20x_2 \le 300$$
$$5x_1 + 10x_2 \le 110$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

أ) اكتب الصيغة القياسية لهذا البرنامج الخطي

$$MAX \quad Z - 6X_1 - 8X_2 = 0$$

s.t.

$$30X_1 + 20X_2 + S_1 = 300$$
$$5X_1 + 10X_2 + S_2 = 110$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

ب) استخدم الجدول التالي لإيجاد جدول الحل الابتدائي

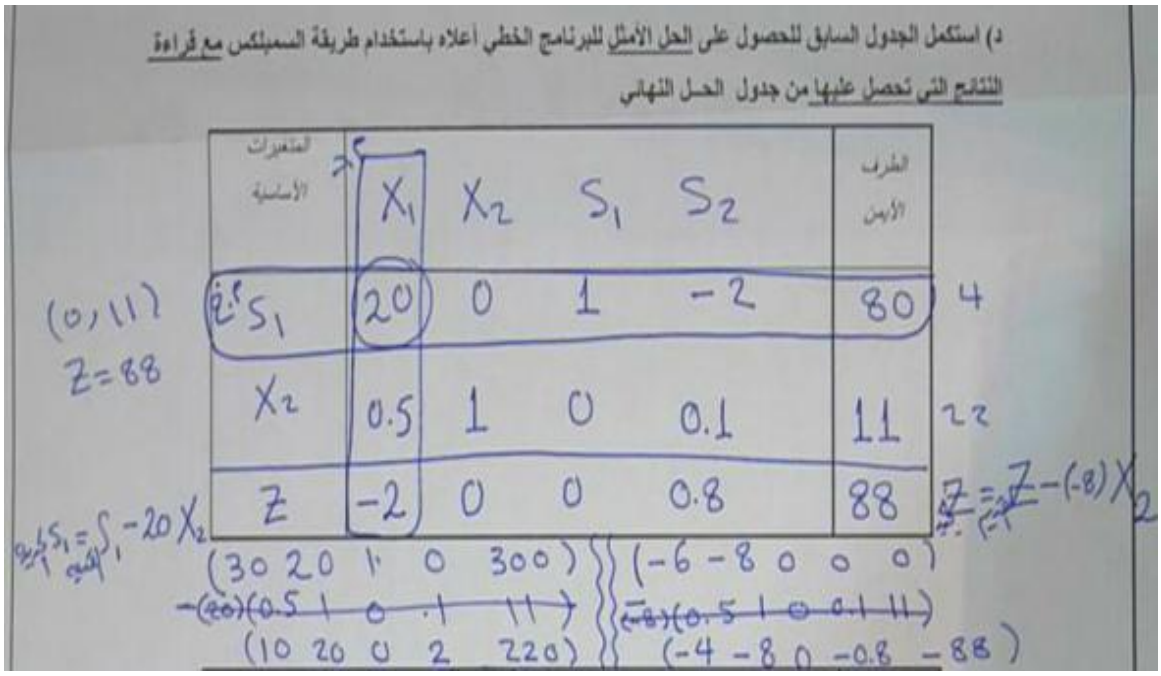
المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	S_1	S_2	الطرف الأيمن (الثابت)	
S_1	30	20	1	0	300	15
S_2	5	10	0	1	110	11
Z	-6	-8	0	0	0	—

(0,0)

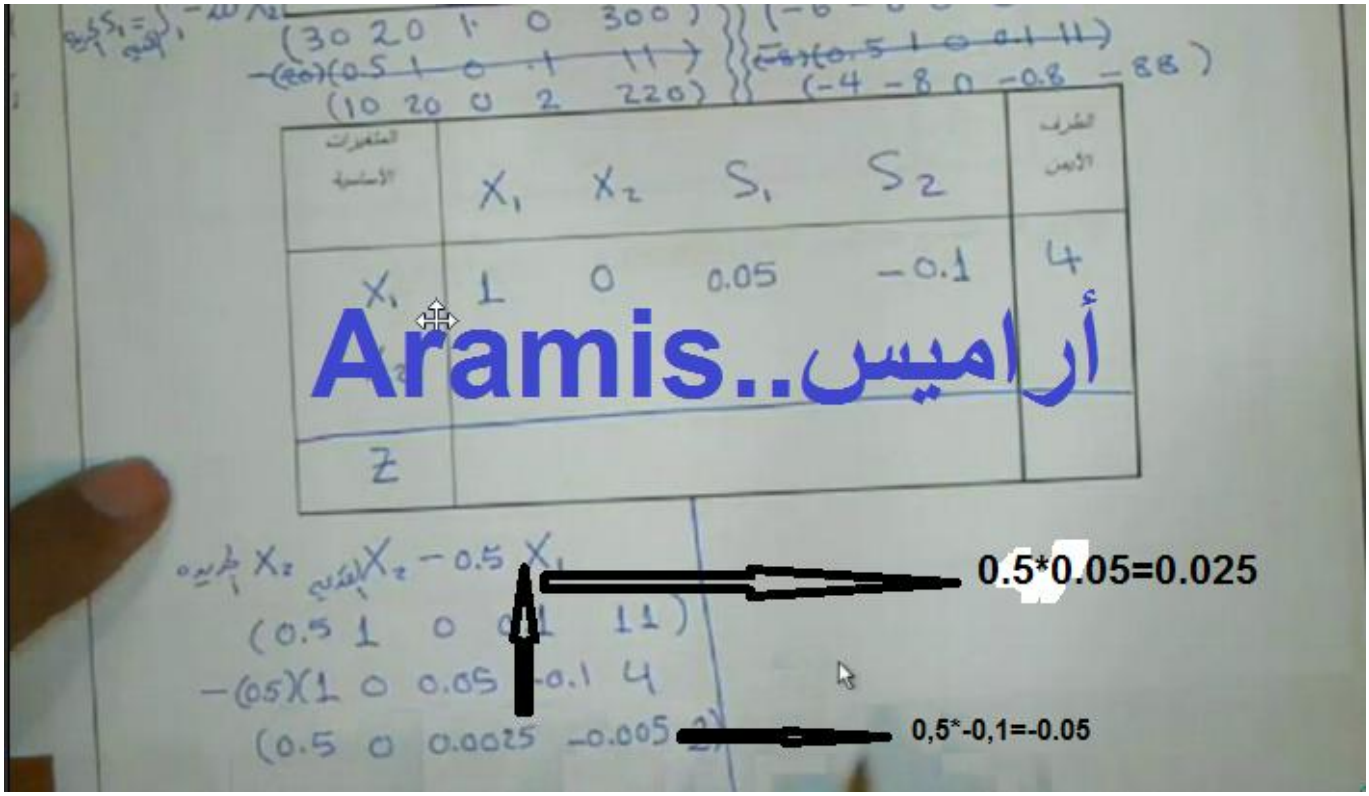
Z=0

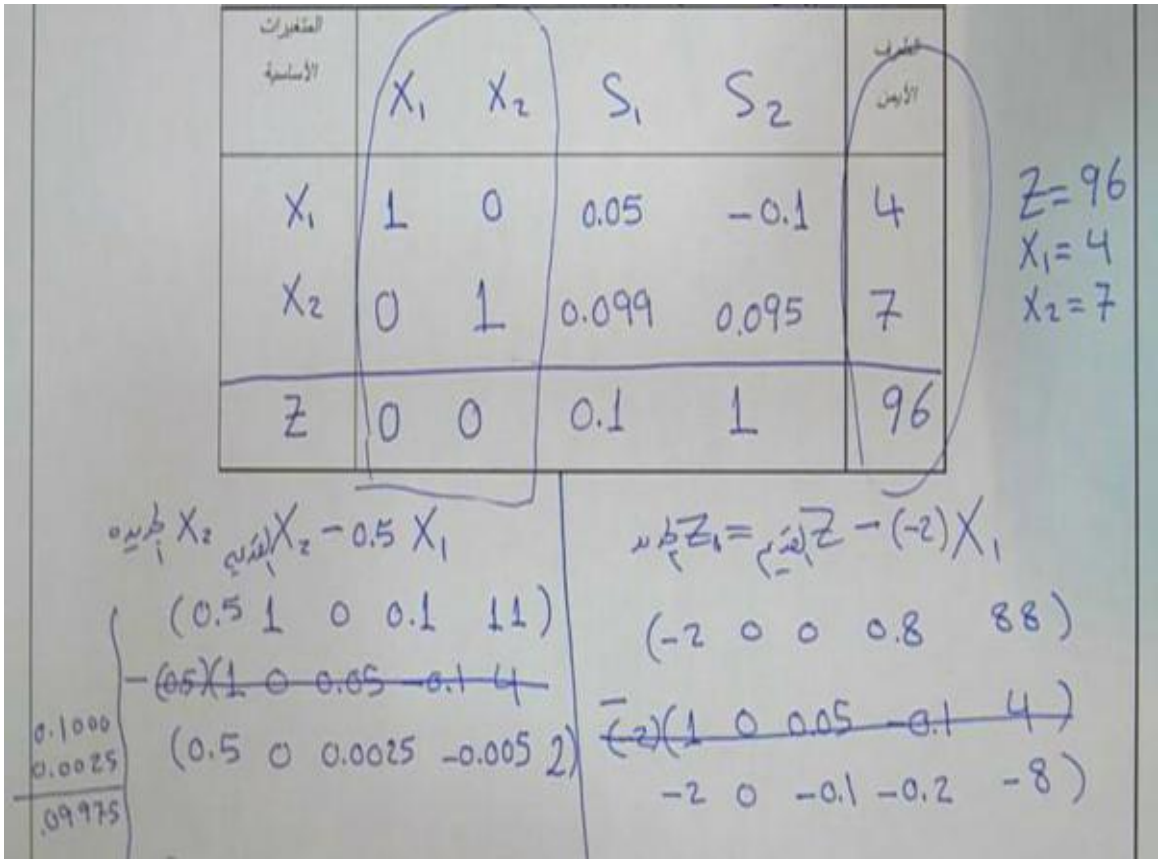
ج) على نفس الجدول، حدد المتغير الداخل والمتغير الخارج، و العنصر المحوري.

خطوات الحل باستخدام طريقة السمبلكس

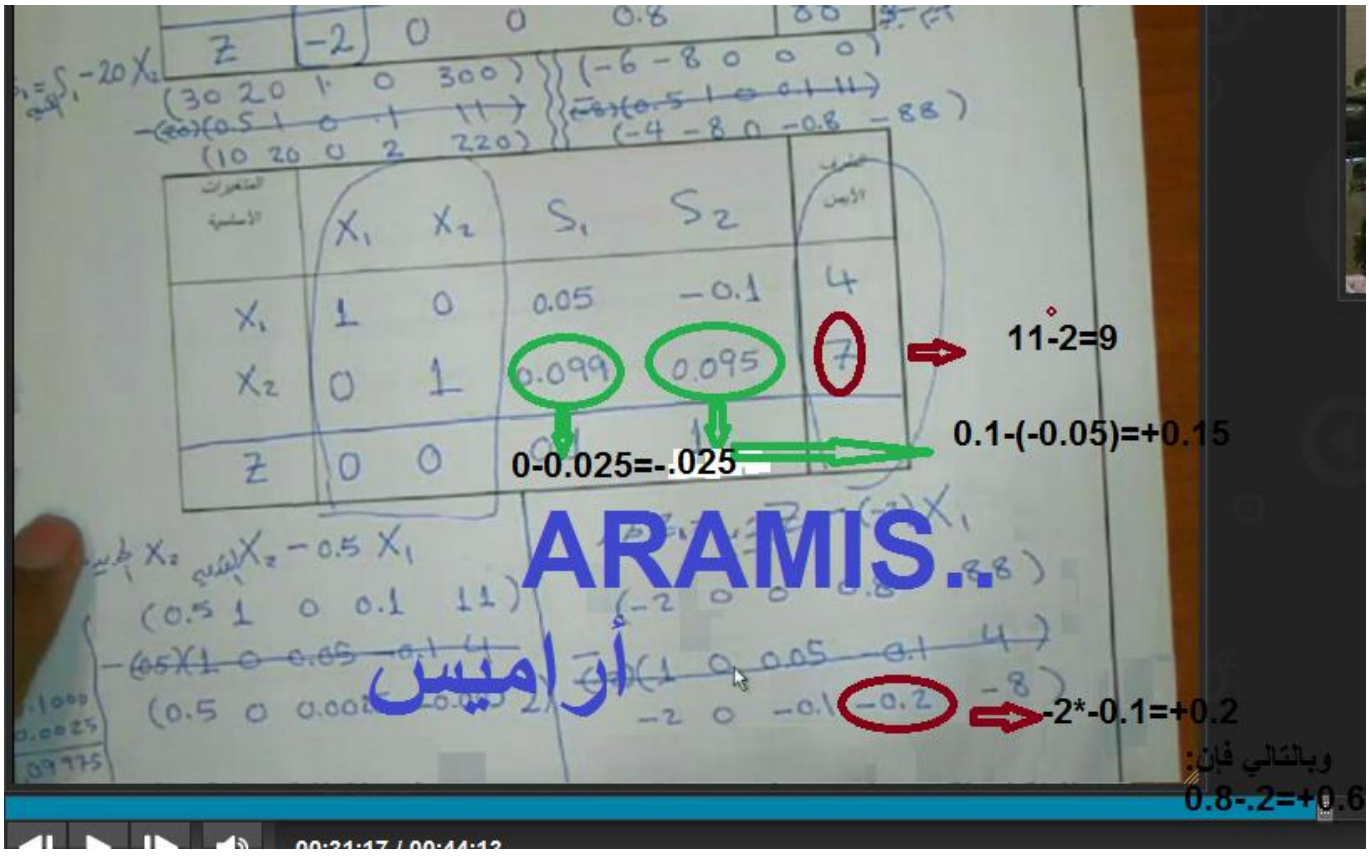


ملاحظات (تصحيح الشرح)





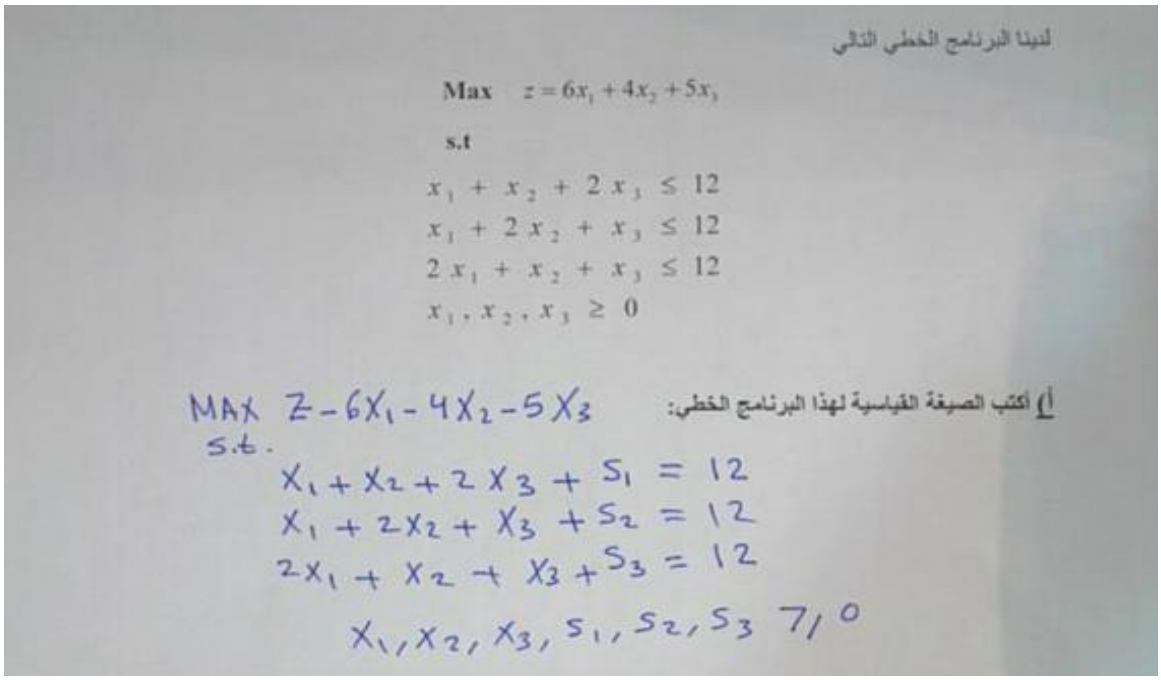
ملاحظات (تصحيح الشرح)



-2 * -0.1 = +0.2

وبالتالي فإن 0.8-0.2=+0.6

خطوات الحل باستخدام طريقة السمبلكس



لدينا البرنامج الخطي التالي

$$\text{Max} \quad z = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

s.t

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \le 12$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 12$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

أ) اكتب الصيغة القياسية لهذا البرنامج الخطي:

MAX $Z - 6X_1 - 4X_2 - 5X_3$

s.t.

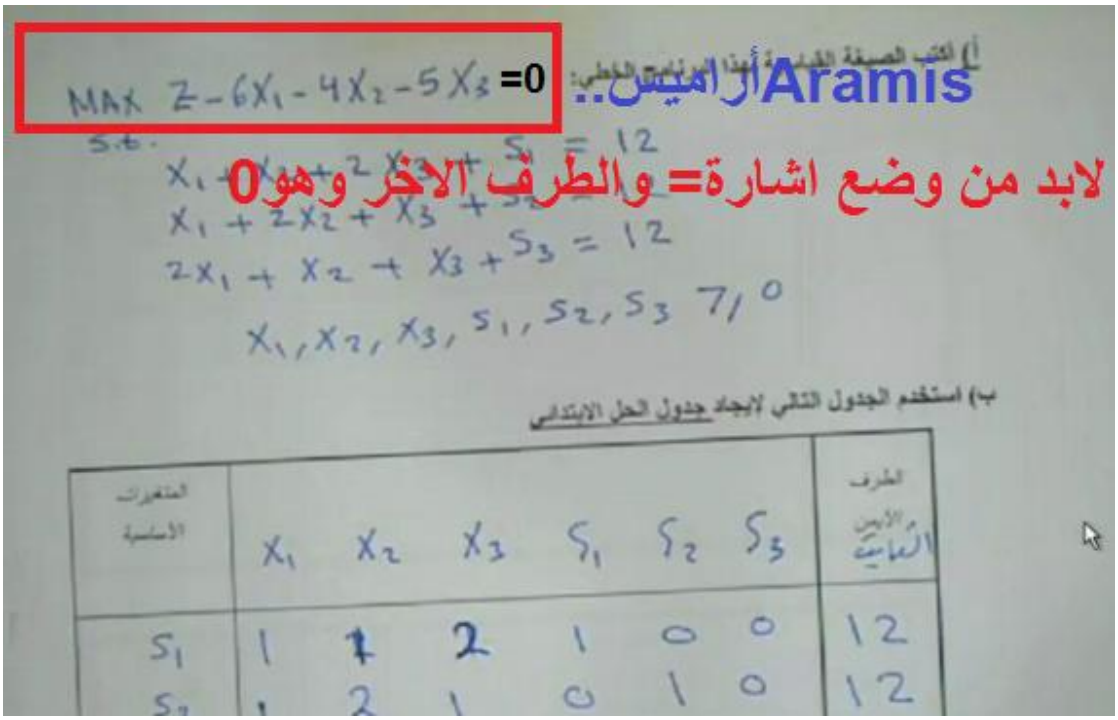
$X_1 + X_2 + 2X_3 + S_1 = 12$

$X_1 + 2X_2 + X_3 + S_2 = 12$

$2X_1 + X_2 + X_3 + S_3 = 12$

$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

ملاحظات (تصحيح الشرح)



MAX $Z - 6X_1 - 4X_2 - 5X_3 = 0$

Aramis أراميس..

لابد من وضع اشارة= والطرف الاخر وهو0

$X_1 + 2X_2 + X_3 + S_3 = 12$

$2X_1 + X_2 + X_3 + S_3 = 12$

$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

ب) استخدم الجدول التالي لايجاد جدول الحل الابتدائي

المتغيرات الاساسية	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الطرف الايمن القيمة
S_1	1	1	2	1	0	0	12
S_2	1	2	1	0	1	0	12

ب) استخدم الجدول التالي لإيجاد جدول الحل الابتدائي

المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الطرف الأيمن النهائي	
S_1	1	1	2	1	0	0	12	12
S_2	1	2	1	0	1	0	12	12
S_3	2	1	1	0	0	1	12	6
Z	-6	-5	-3	0	0	0	0	

ج) على نفس الجدول، حدد المتغير الداخل والمتغير الخارج ، و العنصر المحوري.

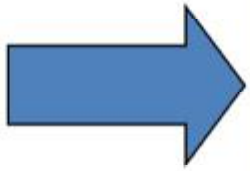
النموذج المقابل(الثنائي) The duality problem :

- الصيغة الأولى لمشكلة البر مجة الخطية ← النموذج الأولي primal model
- يقترن بهذا النموذج الأولي نموذج يطلق عليه النموذج المقابل (المرافق) dual model
- لكل نموذج مقابل هنالك حل أمثل مماثل للحل في النموذج الأولي: النموذج المقابل هو الوجه الآخر للمشكلة الأصلية.
- مفهوم الثنائية هو الفكرة الأساسية التي قام عليها تحليل الحساسية.

خطوات تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل :

- نضع معاملات المتغيرات للقيود ودالة الهدف على شكل مصفوفة: مثال:

$$Min \quad Z = 7x_1 + 5x_2$$
$$s.t.$$
$$x_1 \geq 4$$
$$x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 20$$
$$2x_1 + x_2 \geq 18$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



1	0	4
0	1	6
1	2	20
2	1	18
7	5	0

$z \Uparrow$

- نغير مواقع الأعمدة والصفوف بحيث نجعل معاملات دالة الهدف في النموذج الأولي قيم الطرف الأيمن في النموذج المقابل، ومعاملات الطرف الأيمن في النموذج الأولي معاملات دالة الهدف في النموذج المقابل.

1	0	4
0	1	6
1	2	20
2	1	18
7	5	0

$z \Uparrow$

1	0	1	2	7
0	1	2	1	5
4	6	20	18	0

$w \Uparrow$

- إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تعظيم (Max) تصبح في النموذج المقابل تصغير (Min) والعكس صحيح .
- إذا كان اتجاه المتباينات (=>) أصغر من أو يساوي تصبح في النموذج المقابل (=<) أكبر من أو يساوي والعكس صحيح .
- التحقق من أن عدد القيود في النموذج الأولي يساوي عدد المتغيرات في دالة الهدف في النموذج المقابل و أن عدد متغيرات دالة الهدف في النموذج الأولي يساوي عدد القيود في النموذج المقابل .

النموذج المقابل للمثال السابق هو :

$$Min\ Z = 7x_1 + 5x_2$$
$$s.t.$$
$$x_1 \geq 4$$
$$x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 20$$
$$2x_1 + x_2 \geq 18$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$Max\ \ w = 4y_1 + 6y_2 + 20y_3 + 18y_4$$
$$s.t.$$
$$y_1 + y_3 + 2y_4 \leq 7$$
$$y_2 + 2y_3 + y_4 \leq 5$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

ملاحظة :

- إذا كان الهدف في المشكلة هو التعظيم، فيجب أن يرتبط التعظيم مع متباينات جميعها بنفس الأتجاه بصيغة (=<) أصغر من أو يساوي.
- إذا كان الهدف في المشكلة هو التصغير، فيجب أن يرتبط التصغير مع متباينات جميعها بنفس الأتجاه بصيغة (=<) أكبر من أو يساوي.

- مـاذا لو لم يتحقق هذا الأمـر ؟!

يجب إعادة الترتيب بما يتوافق مع هذه الشروط وفق التالي:

١. الهدف تعظيم إلا أن احد القيود (=>) أكبر أو يساوي : ففي هذه الحالة نضرب طرفي القيد ب (- ١) ونقلب الإشارة الى (=<) أصغر أو يساوي.
٢. الهدف تصغير إلا أن احد القيود (=<) أصغر أو يساوي : ففي هذه الحالة نضرب طرفي القيد ب (- ١) ونقلب الإشارة الى (=>) أكبر أو يساوي.
٣. أحد القيود عبارة عن مساواة: يتم تحويل القيد الى متباينتين مختلفتين بالاتجاه، ثم نضرب القيد المعاكس لدالة الهدف ب (- ١).

MAX $Z = 3X_1 + 10X_2$

s.t.

$$4X_1 + 3X_2 \leq 100$$

$$5X_1 - 2X_2 \leq 10$$

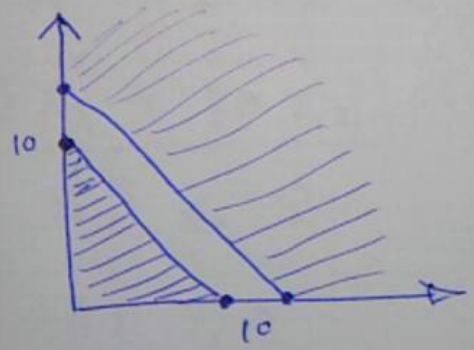
$$3X_1 + 10X_2 \leq 500$$

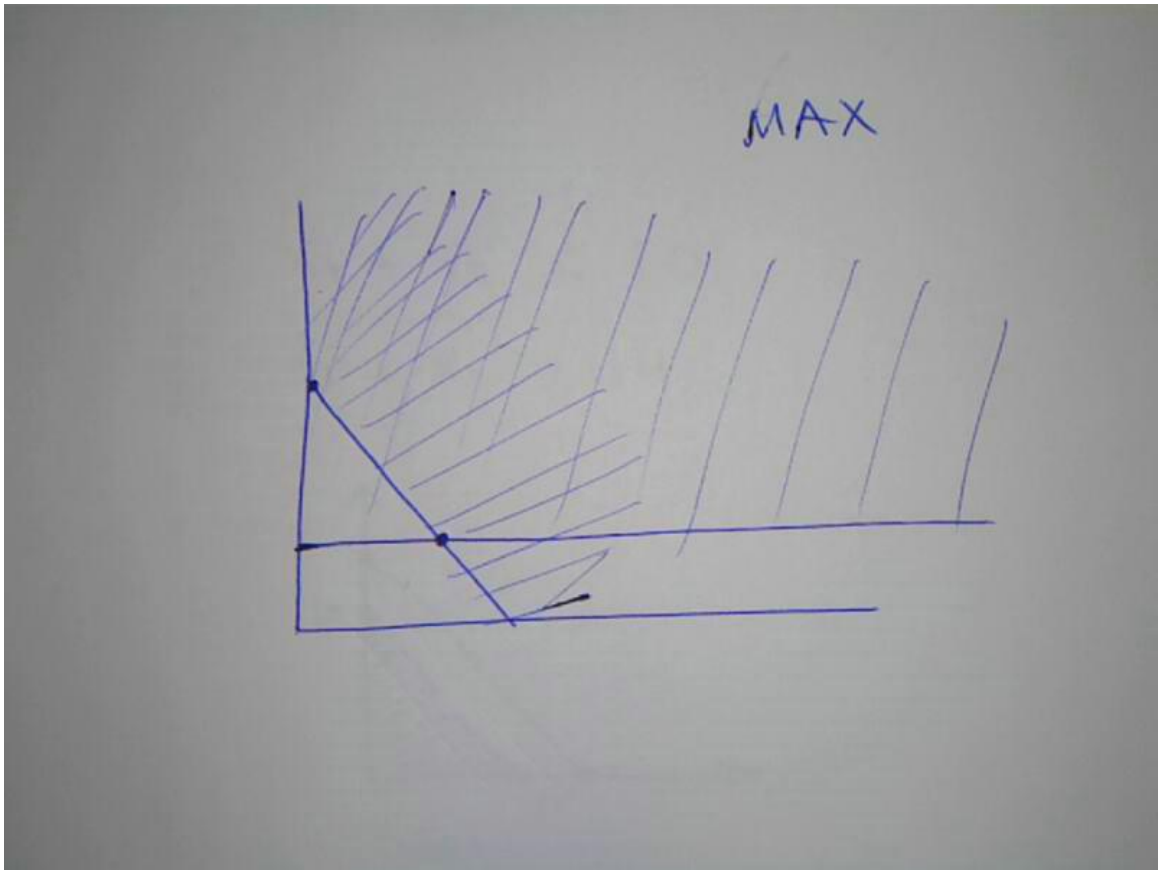
$$X_2 \leq 50$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_1 + X_2 \geq 14$$





MAX $Z = 2X_1 + 4X_2$

s.t.

$4X_1 + 3X_2 \leq 10$

(-1) اضرب في $2X_1 + 10X_2 \geq 2$

$X_1, X_2 \geq 0$

MAX $Z = 2X_1 + 4X_2$

s.t. $4X_1 + 3X_2 \leq 10$

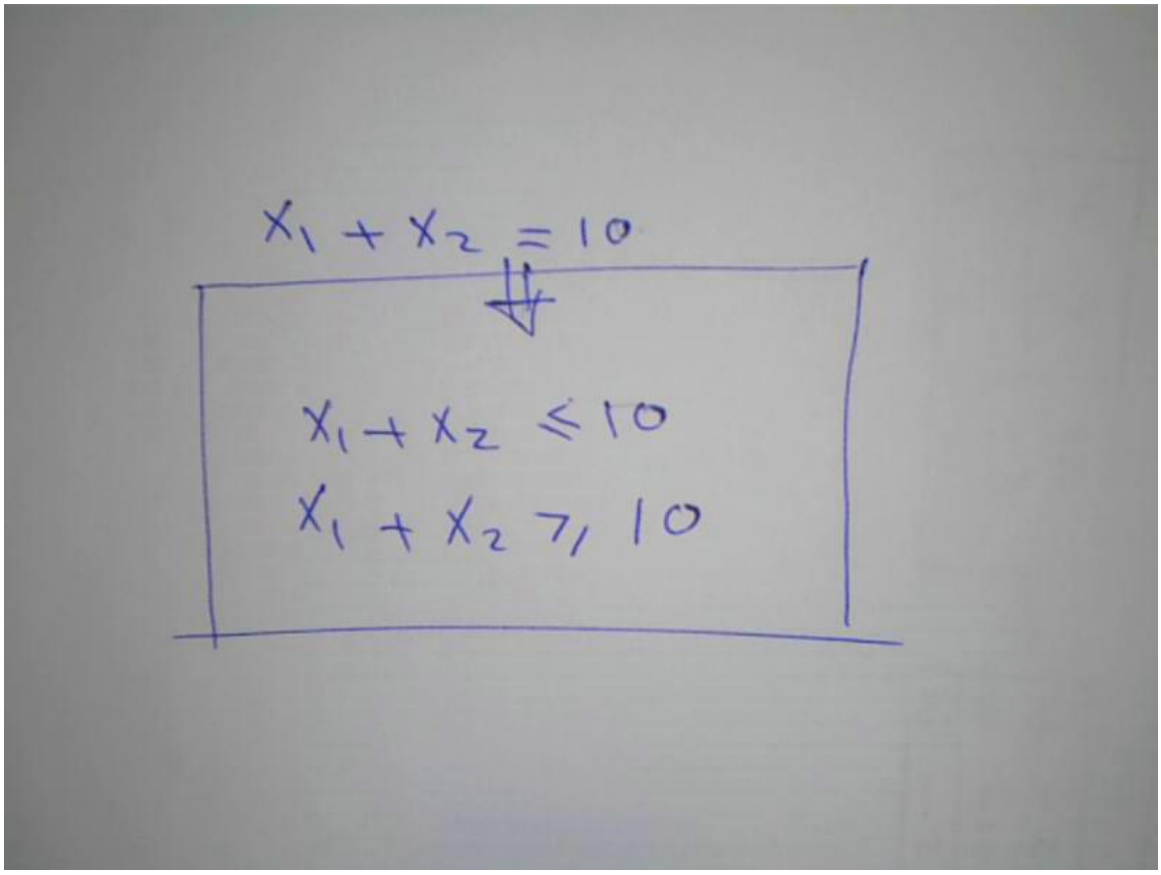
$-2X_1 - 10X_2 \leq -2$

$X_1, X_2 \geq 0$

4	3	10
-2	-10	-2
2	4	0

⟹

4	-2	2
3	-10	4
10	-2	0


$X_1 + X_2 = 10$
$X_1 + X_2 \leq 10$
$X_1 + X_2 \geq 10$

المحاضرة : العاشرة مدة المحاضرة : دقيقة

جدولة المشاريع CPM & PERT

مقدمة :

- طريقة المسار الحرج CPM = Critical Path Method
- طريقة تقييم المشاريع و مراجعتها PERT=Project Evaluation & Review Technique

- الاختلاف :
  - أزمنة مؤكدة : في طريقة المسار الحرج
  - أزمنة احتمالية : في طريقة تقييم المشاريع و مراجعتها

تستخدم جدولة المشاريع من قبل الإداريين لضمان إنجاز المشروع في الوقت المحدد لإيجاد مؤشرات منبهة للحالات الغير اعتيادية حين ظهورها والمرونة في إعادة تخطيط المشروع وفقا لذلك وتشخيصها في ثلاث مراحل تنفيذية :

أولاً : إنشاء شبكة الأعمال للمشروع :

- ✓ تحليل المشاريع إلى أنشطة وأحداث .
- ✓ تتابع الأنشطة والأحداث .
- ✓ رسم تخطيطي للمشروع .
- ✓ تقدير الأزمنة لكل نشاط .

ثانياً : تخطيط المشروع :

تعريف أنشطة المشروع حسب التسلسل الزمني وتحديد التالي :

- ✓ أنشطة والأحداث الحرجة .
- ✓ المسار الحرج .
- ✓ حساب الفائض من كل نشاط .

ثالثاً : ضبط المشروع :

تقدير مراقبة الأنشطة ومتابعتها :

- ✓ مراقبة الأزمنة ومقارنتها مع خطة المشروع النظرية .
- ✓ محاولة قدر المستطاع إتباع الخطة المقرر تنفيذها .
- ✓ نقل الإمكانيات من نشاط ذات فائض إلى الحرج إن أمكن .

فإن أهمية أسلوب المسار الحرج ، و بيرت تكمن في الخطوات التالية :

- ✓ مساعدة المدراء على التعرف على الأنشطة الحرجة .
- ✓ حساب مرونة الأنشطة غير الحرجة لإتاحة الفرص لنقل الموارد إلى الأنشطة الحرجة .
- ✓ التعرف على الأزمنة المبكرة والمتأخرة لانتهاء المشروع .
- ✓ حساب التكلفة النهائية للمشروع .

المصطلحات المستخدمة في جدولة المشاريع

المصطلح	التعريف
الحدث Event	هو الوصول إلى نقطة معينة من الزمن و لا يحتاج إلى بداية ونهاية زمنية.
النشاط Activity	هو مجهود يحتاج إلى نقطة بداية ونهاية وموارد لتنفيذه.
النشاط الوهمي Dummy Activity	النشاط الذي لا يحتاج إلى زمن أو موارد لإتمامه ويستعمل فقط للدلالة على تتابع الأنشطة منطقيا ويرسم بسهم متقطع.
النشاط الحرج Critical Activity	النشاط الذي إذا تم تأخير انتهائه فإنه يتسبب في تأخير المشروع.

المسار الحرج Critical Path	مجموعة من الأنشطة الحرجة، تبدأ من بداية إلى نهاية المشروع.
المشروع Project	عبارة عن مجموعة من الأنشطة والأحداث مرتبة حسب تسلسل منطقي.
شبكة الأعمال Network	عبارة عن مجموعة من الأنشطة والأحداث مرتبة بطريقة منطقية لتسلسل الأنشطة.
زمن البداية المبكر للنشاط Earliest Start	هو الزمن الذي يبدأ فيه النشاط إذا أنجزت جميع الأنشطة السابقة في أوقاتها . (ES)

زمن النهاية المبكر Earliest Finish	هو الزمن الذي يمكن أن ينجز فيه النشاط إذا بدأ في وقته المبكر (EF) نهاية مبكرة = بداية مبكرة + وقت النشاط
زمن النهاية المتأخر Latest Finish	هو أخر زمن يمكن إتمام النشاط فيه بدون أن يسبب تأخير لأية أنشطة لاحقة . (LF)
زمن البداية المتأخر Latest Start	هو أخر وقت يمكن أن يبدأ فيه النشاط بشرط عدم تأخير الأنشطة اللاحقة (LS) بداية متأخرة = نهاية متأخرة – وقت النشاط
الفائض) Slack Time	الفائض في النشاط = زمن بداية متأخر – زمن بداية مبكر ST = LS – ES

قواعد هامة في رسم الشبكة :

- ✓ يبدأ المشروع عند نقطة بداية وينتهي عند نقطة نهاية ، تسمى النقطة الوهمية (Milestone).
- ✓ الترقيم يبدأ من بداية الشبكة إلى النهاية .
- ✓ لا يمكن البدء في عدد من العقد .
- ✓ لا يجوز العودة إلى النشاط السابق .
- ✓ لا يجوز ترك نشاط بدون تسلسل .
- ✓ تحديد الأزمنة وفترة السماح لكل نشاط

ES زمن البداية المبكر	EF زمن النهاية المبكر
Activity رمز النشاط	Time الوقت
LS زمن البداية المتأخر	LF زمن النهاية المتأخر

كيفية رسم الشبكة :

كيفية تحديد أقرب موعد لبداية النشاط (ES) وأقرب موعد لنهاية النشاط (EF) :

١) ابدأ من بداية المشروع وتقدم أمام الشبكة .

٢) حدد أقرب موعد لبدء المشروع بحيث يكون مساوي للصفر .

٣) احسب أقرب موعد لنهاية كل نشاط من خلال إضافة المدة التي تستغرقها إلى أقرب موعد لبدايته .

٤) بالنسبة لكل نشاط متسلسل لا يسبقه مباشرة إلا نشاط واحد، حدد أقرب موعد لبدايته بحيث يكون مساوي لأقرب موعد لنهاية النشاط السابق .

٥) بالنسبة لكل نشاط متسلسل يسبقه أكثر من نشاط واحد، حدد أقرب موعد لبدايته بحيث يكون مساوياً لأقرب موعد نهاية للأنشطة السابقة .

٦) دوّن أقرب موعد بداية، وأقرب موعد نهاية .

٧) كرر الخطوات من (٣) إلى (٦) حتى تصل إلى نهاية المشروع. لا يمكن تحديد أقرب موعد لبداية نشاط إلا بعد تحديد أقرب موعد لنهاية جميع الأنشطة السابقة له .

حساب فترات السماح والأنشطة الحرجة :

١) بالنسبة لكل نشاط يتطابق أقرب موعد لبدايته مع آخر موعد لبدايته، وأقرب موعد لنهايته وآخر موعد لنهايته ، فإن فترة سماحه تساوي صفر .

٢) وفيما عدا ذلك، فإن فترة السماح هي الفرق الزمني بين أقرب وآخر موعد لبداية كل نشاط ، أو بين أقرب وآخر موعد لنهاية ، أي : $ST = LS - ES$ أو $ST = LF - EF$

٣) راجع الحسابات الخاصة بكل نشاط بإضافة المدة التي يستغرقها، وفترة السماح الخاصة به إلى تاريخ اقرب موعد لبدايته .حيث يجب أن يساوي المجموع تاريخ آخر موعد لنهاية النشاط .

٤) أي نشاط تساوي فترة سماحة صفراً هو نشاط حرج .

٥) تسلسل الأنشطة الحرجة من بداية إلى نهاية المشروع هو المسار الحرج للمشروع .

مثال على رسم شبكات الأعمال

قوانين تحكم مرحلة التقدم إلى الأمام Forward Pass :

- وقت البداية المبكر ES = Earliest Start for activity I
- وقت النهاية المبكر EF = Earliest Finish for activity I
- الوقت اللازم لإنجاز النشاط T = Time
- وقت النهاية المبكر = وقت البداية المبكرة + وقت النشاط EF = ES + T
- وقت البداية المبكر = (أعظم قيمة) للنهايات المبكرة للأنشطة السابقة

ES = Max (EF of the activities directly preceding it)

قوانين تحكم مرحلة الرجوع إلى الخلف Backward Pass :

- وقت البداية المتأخر LS = Latest Start for activity I
- وقت النهاية المتأخر LF = Latest Finish for activity I
- وقت البداية المتأخرة = وقت النهاية المتأخرة – وقت النشاط LS = LF – T
- وقت النهاية المتأخرة = (اقل قيمة) للبدايات المتأخرة للأنشطة اللاحقة

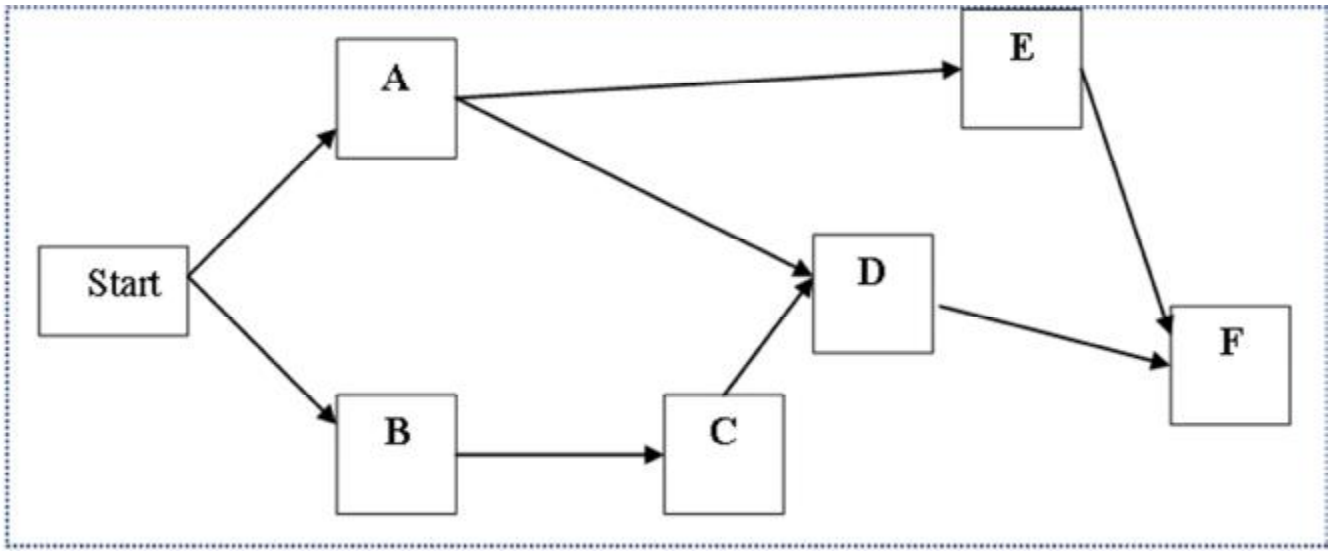
LF = Min (LS of the activities directly succeeding it)

مثال على طريقة لرسم شبكة المشروع وطريقة المسار الحرج :

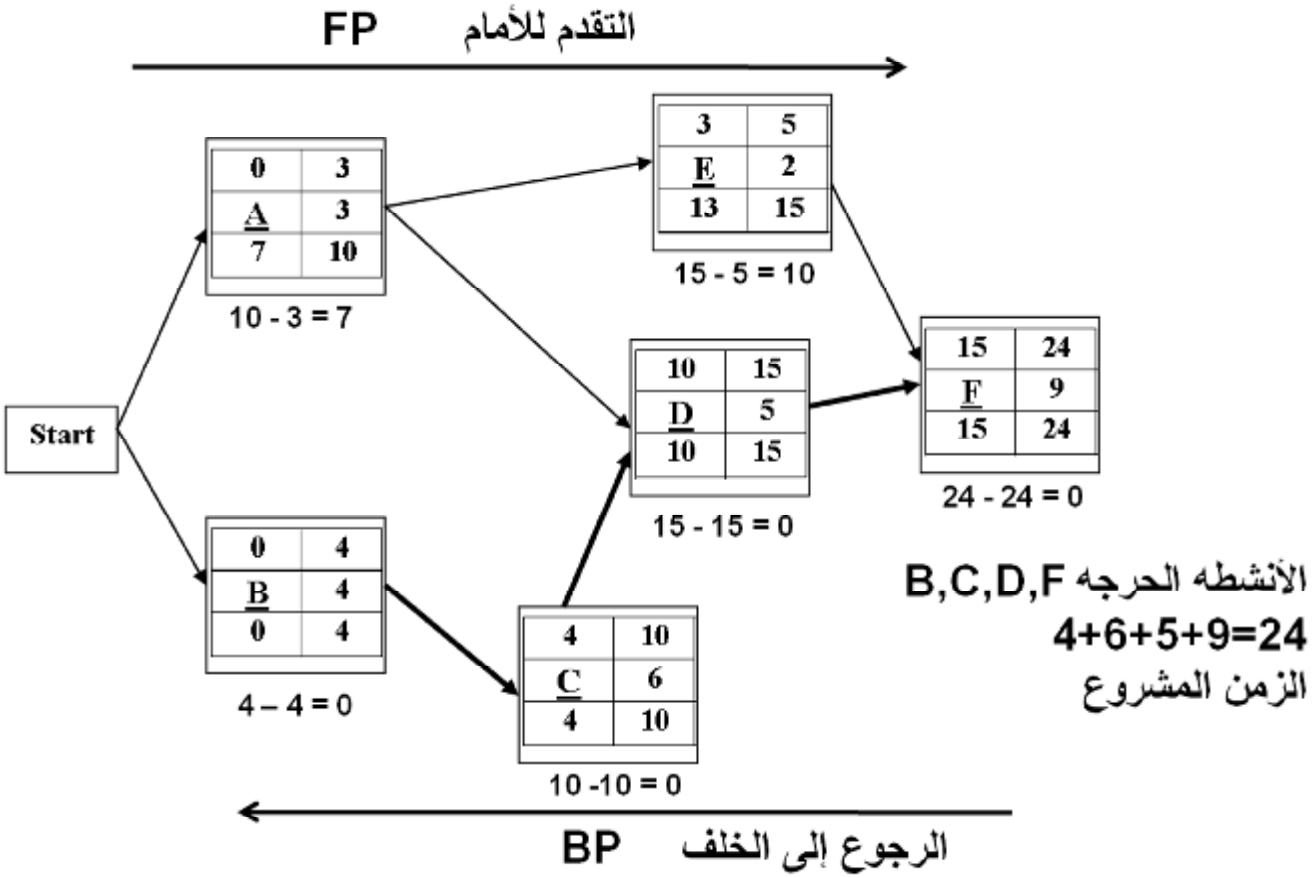
الجدول التالي يمثل الأنشطة والأنشطة السابقة لها مع الوقت اللازم لإكمال النشاط

النشاط	النشاط السابق	الزمن
A	-	3
B	-	4
C	B	6
D	A,C	5
E	A	2
F	D,E	9

* رسم الشبكة :



١ : المسار الحرج :



تقييم المشاريع و مراجعتها PERT

قوانين تحكم مرحلة التقدم إلى الأمام Forward Pass :

- وقت البداية المبكر ES = Earliest Start for activity I
- وقت النهاية المبكر EF = Earliest Finish for activity I
- الوقت اللازم لإنجاز النشاط T = Time
- وقت النهاية المبكر = وقت البداية المبكرة + وقت النشاط EF = ES + T
- وقت البداية المبكر = (أعظم قيمة) للنهايات المبكرة للأنشطة السابقة

ES = Max (EF of the activities directly preceding it)

قوانين تحكم مرحلة الرجوع إلى الخلف Backward Pass :

- وقت البداية المتأخر LS = Latest Start for activity I
- وقت النهاية المتأخر LF = Latest Finish for activity I
- وقت البداية المتأخرة = وقت النهاية المتأخرة – وقت النشاط LS = LF – T
- وقت النهاية المتأخرة = (اقل قيمة) للبدايات المتأخرة للأنشطة اللاحقة

LF = Min (LS of the activities directly succeeding it)

يتبع PERT في حساب متوسط فترة إنجاز النشاط ثلاثة أزمنة تقديرية، وبالتالي فإن متوسط الفترة تفترض طريقة الأسلوب الاحتمالي.

١ : أزمنة النشاط التقديرية : وتشمل ما يلي :

- الزمن المتفائل (S) : هو أقل وقت لإتمام النشاط.
- الزمن الأكثر احتمالا (M) : هو الزمن الأكثر تكرارا لإتمام النشاط.
- الزمن المتشائم (L) : هو أطول زمن لإتمام النشاط.

٢ : تقدير متوسط زمن أداء النشاط :

- بعد تقدير الأزمنة الثلاثة يتم حساب متوسط زمن أداء النشاط، كالتالي :

$$\frac{S+4*M+L}{6}$$

زمن انتهاء المشروع النهائي يتبع التوزيع الطبيعي، وهذا يعني أن المشروع سوف ينتهي عند النقطة المحددة باحتمال ٥٠٪

تحديد أنشطة المشـــروع :

بعد حساب جميع التقديرات الزمنية للأنشطة ثم رسم شبكة الأعمال و تحديد المسار الحرج يتم تقدير التباين لجميع الأنشطة الحرجة .

$$\text{التباين} = \left(\frac{L-S}{6}\right)^2$$

ويقصد بالانحراف المعياري الابتعاد عن القيمة الزمنية المتوقعة (بالأيام ، بالأسابيع ، أو بالأشهر)، إذا كان الانحراف المعياري يساوي (صفر) فيدل ذلك على أن التقديرات دقيقة ، وإذا كبرت قيمة الانحراف المعياري ، زادت درجة عدم اليقين في تقدير الأزمنة .

حساب التباين للمسار الحرج :

- من خلال جميع التباين لكل الأنشطة الحرجة .

التباين للمسار الحرج = (تباين النشاط الحرج ١ + تبيان النشاط الحرج ٢ + ... + تباين النشاط الحرج n)

مثال :

تابع ... تقييم المشاريع و مراجعتها PERT

المثال التالي يوضح كيفية:

١- رسم شبكة بسيطة

٢- حساب الوقت المتوقع

٣- تحديد المسار الحرج

٤- حساب التباين للأنشطة الحرجة

المحاضرة : الرابعة عشر مدة المحاضرة : دقيقة

مراجعة على المقرر

١- الجزء النظري (مفاهيـم & مصطلحـات)
٢- صيـاغة برنامج خطي
٣- رسم بياني
٤- البرنامج المرافق
٥- طريق السمبلكس
٦- المسار الحرج CPM
٧- PERT