محاضرة يوم السبت
من الاسبوع الثاني عشر

* تعرفنا على بعض من أنواع الدوال ونشرح :-

1) الدالة الثابتة :-

$د(س) = جـ$ ، حيث جـ عدد ثابت .

2) الدالة الخطية :-

$د(س) = أ س + ب$ ، حيث أ ، ب : اعداد ثابتة .

$أ \neq$ صفر

3) الدالة التربيعية :-

$د(س) = أ س^2 + ب س + جـ$ ، حيث أ ، ب ، جـ : اعداد ثابتة .

$أ \neq$ صفر .

4) الدالة كثيرة الحدود :-

$$د(س) = أ_ن س^ن + أ_{ن-1} س^{ن-1} + --- + أ_2 س^2 + أ_1 س + أ_0 .$$

حيث ن : عدد صحيح غير سالب .

$أ_ن ، أ_{ن-1} ، --- ، أ_2 ، أ_1 ، أ_0$: اعداد ثابتة .

لاحظوا لو أن : $أ_ن ، أ_{ن-1} ، --- ، أ_2 ، أ_1$ جميع هذه الاعداد اصفار لحصلنا على الدالة الثابتة :-

$د(س) = أ_0$.

وكذلك لو فرضنا أن $أ_ن ، أ_{ن-1} ، --- أ_2$ جميع هذه الاعداد تساوي صفر ، لحصلنا على الدالة الخطية :-

$د(س) = أ_1 س + أ_0$.

ونفرض أن $\text{أ}_{\text{ن}}$ ، $\text{أ}_{\text{ن}-1}$ ، ..... ، أ_3 جميع هذه الأعداد تساوي العدد صفر لحصلنا على دالة تربيعية :-

$$\text{ق(س)} = \text{أ}_2\,\text{س}^2 + \text{أ}_1\,\text{س} + \text{أ}_0 .$$

لو فرضنا أن مثلاً $\text{أ}_2 = ٥$ ، $\text{أ}_1 = -٣$ ، $\text{أ}_0 = ١٠$

فإن الدالة تصبح في الصورة :-

$$\text{ق(س)} = ٥\text{س}^2 - ٣\text{س} + ١٠$$

وبإمكاننا إيجاد صورة أي عدد حقيقي تحت تأثير هذه الدالة

حيث أن :-

$$\text{ق}(-١) = ٥(-١)^2 - ٣(-١) + ١٠ = ٥ + ٣ + ١٠ = ١٨$$

$$\text{ق}(١) = ٥(١)^2 - ٣(١) + ١٠ = ٥ - ٣ + ١٠ = ١٢$$

$$\text{ق(صفر)} = ٥(\text{صفر})^2 - ٣(\text{صفر}) + ١٠ = ١٠$$

نشاط بيتي ؟

الباب العاشر : المشتقة (التفاضل)

من خلال بعض القواعد الخاصة ، يمكن إيجاد مشتقة دالة ثابتة ودالة خطية ، ودالة تربيعية وأخيراً دالة كثيرة حدود .

يرمز لمشتقة الدالة ق(س) بالرمز ق'(س) أو $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

مشتقة الدالة الثابتة :-

تعريف :- إذا كانت ق(س) = جـ ، جـ : عدد ثابت فإن
ق'(س) = صفر .

مثال :- أوجد ق'(س) للدوال التالية :-

١) ق(س) = ١٠ ⇐ ق'(س) = صفر
٢) ق(س) = ١٠^٢ + ١٠ ⇐ ق'(س) = صفر
٣) ق(س) = (١٠ + ٥)^٢ − هـ . هـ : عدد ثابت ⇐ ق'(س) = صفر

مشتقة الدالة الخطية :-

تعريف : إذا كانت ق(س) = أس + ب ، أ، ب : أعداد ثابتة
فإن ق'(س) = أ .

مثال :- أوجد ق'(س) للدوال التالية :-

١) ق(س) = ٥س − ١٠ ⇐ ق'(س) = ٥
٢) ق(س) = −٥س + ١٠ ⇐ ق'(س) = −٥
٣) ق(س) = ١٠ − ٥س ⇐ ق'(س) = −٥

مثال :- أوجد ق'(−١) للدالة
ق(س) = ١٠٠س − ١٠ .

الحل :- ق'(س) = ١٠٠ ⇐ ق'(−١) = ١٠٠

مشتقة الدالة التربيعية :-

تعريف :- إذا كانت د(س) = أس^{2} + ب س + جـ ، أ، ب، جـ : أعداد ثابتة

فإن د$'$(س) = ٢أس + ب .

مثال :- أوجد د$'$(س) للدالة :-

د(س) = ٥س^{2} − ٣س + ١٠ .

الحل :- د$'$(س) = ٢ × ٥ × س − ٣ .

= ١٠س − ٣ .

مثال :- أوجد د$'$(−١) ، د$'$(صفر) ، د(١) للدالة :-

د(س) = ٥ − ٢س − ٣س^{2} .

الحل: أعيد كتابة الدالة على الصورة :-

د(س) = −٣س^{2} − ٢س + ٥ .

د$'$(س) = −٣ × ٢ × س − ٢

د$'$(س) = −٦س − ٢

د$'$(−١) = −٦(−١) − ٢ = ٦ − ٢ = ٤ .

د$'$(صفر) = −٦(صفر) − ٢ = −٢

د(١) = −٣(١)^{2} − ٢(١) + ٥

= −٣ − ٢ + ٥ = −٥ + ٥

= صفر .

مشتقة دالة كثيرة حدود :.

تعريف :- إذا كانت

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}_{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}} + \text{أ}_{\text{ن}-1}\text{س}^{\text{ن}-1} + \cdots + \text{أ}_{2}\text{س}^{2} + \text{أ}_{1}\text{س} + \text{أ}_{0}$$

فإن

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}\,\text{أ}_{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}-1} + (\text{ن}-1)\,\text{أ}_{\text{ن}-1}\text{س}^{\text{ن}-2} + \cdots + 2\,\text{أ}_{2}\text{س} + \text{أ}_{1} .$$

مثال :- أوجد مشتقة الدوال التالية :-

١) $\text{ق}(\text{س}) = 5\text{س}^{3} - 2\text{س}$ (كثيرة حدود من الدرجة الثالثة)

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{5} - 1$. (كثيرة حدود من الدرجة الخامسة)

٣) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{2} - 2\text{س}^{4} + 3\text{س}^{6}$ (كثيرة حدود من الدرجة السادسة)

الحل :- ١) $\text{ق}'(\text{س}) = 5 \times 3 \times \text{س}^{3-1} - 2\,\text{س}^{1-1}$

$= 15\text{س}^{2} - 2$.

٢) $\text{ق}'(\text{س}) = 5\,\text{س}^{5-1}$

$= 5\text{س}^{4}$.

٣) $\text{ق}'(\text{س}) = 2\text{س} - 8\text{س}^{3} + 18\text{س}^{5}$.

مثال : اعتماداً على المثال السابق، حيث $\text{ق}(\text{س}) = 5\text{س}^{3} - 2\text{س}$

أوجد $\text{ق}'(2)$ ، $\text{ق}'(-3)$ ؟

الحل :- ق'(س) = ١٥ $س^{٢}$ - ٢ .

ق'(٢) = ١٥ $(٢)^{٢}$ - ٢

= ١٥ × ٤ - ٢

= ٦٠ - ٢ = ٥٨ .

ق'(-٢) = ١٥ $(-٢)^{٢}$ - ٢

= ١٥ (٤) - ٢

= ٦٠ - ٢ = ٥٨ .

بصورة عامة :-

إذا كانت ق(س) = $س^{ن}$ ، حيث n: عدد حقيقي

فإن :-

ق'(س) = ن $س^{ن-١}$.

مثال :- اوجد $\frac{دص}{دس}$ للدالة

ص = ٥ $س^{-٣}$

الحل :- $\frac{دص}{دس}$ = ٥ × -٣ × $س^{-٣-١}$

= -١٥ $س^{-٤}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-١٥}{س^{٤}}$.

(عند وجود أس سالب نستطيع تحويله الى أس موجب من خلال نقله الى المقام اذا كان موجود في البسط أو تحويله الى البسط اذا كان موجود في المقام)

مثال ١: - أوجد $د'(صفر)$ ، $د'(-١)$ للدالة

$د(س) = \frac{١}{٣} س^{٣}$.

الحل: - $د'(س) = \frac{١}{٣} \times ٣ \times س^{٢}$

$= س^{٢}$.

$د'(صفر) = (صفر)^{٢} = صفر$.

$د'(-١) = (-١)^{٢} = ١$.

مثال ٢: أوجد $د'(٢)$ ، $د'(١)$ للدالة

$د(س) = -٣ س^{-٣}$.

الحل: - $د'(س) = -٣ \times -٣ \times س^{-٣-١}$

$= ٩ س^{-٤}$

$= \frac{٩}{س^{٤}}$.

$د'(٢) = \frac{٩}{(٢)^{٤}} = \frac{٩}{١٦}$.

$د'(١) = \frac{٩}{(١)^{٤}} = \frac{٩}{١} = ٩$.

نظرية مضروب المشتقات من الباب العاشر .