# مقدمة إلى الباب الثامن : المتواليات

* يمكن تصنيف المتواليات الى صنفين :-

١) المتوالية الحسابية :

$$\ldots\ldots ، أ + ٥د ، أ + ٤د ، أ + ٣د ، أ + ٢د ، أ + د ، أ$$

وكان اسم هذه المتوالية هو العدد $د$ ، والحد الأول $= أ$ .

- ويمكن ايجاد قيمة الحد النوني ( $ح_ن$ ) في متوالية حسابية بالصيغة التالية :-

$$ح_ن = أ + (ن - ١)د \quad ، \text{ حيث } ن \in ط .$$

- ويمكن ايجاد قيمة مجموع $ن$ من الحدود ( $ح_ن$ ) في متوالية حسابية من الصيغة التالية :-

$$م_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١)د]$$

- وايضاً يمكن ايجاد مجموع $ن$ من حدود متوالية هندسية إذا علم حدها الأول والأخير بالصيغة التالية :-

$$م_ن = \frac{ن}{٢} [أ + ل] .$$

٢) المتوالية الهندسية :-

$$\ldots\ldots ، أ ر^٣ ، أ ر^٢ ، أ ر ، أ$$

حيث كان اسم هذه المتوالية هو العدد $ر$ وحدها الأول $= أ$ .

- يمكن ايجاد قيمة الحد النوني ( $ح_ن$ ) في متوالية هندسية من خلال الصيغة التالية :-

$$ح_ن = أ ر^{ن-١} \quad ، \text{ حيث } ن : \text{عدد طبيعي} .$$

- ولإيجاد مجموع $ن$ من الحدود لمتوالية هندسية $(ح_ن)$، فإنه يمكنه استخدام الصيغة:

$$مـ_ن = \frac{أ(د^ن - 1)}{د - 1} \quad \text{حيث } د \neq 1 .$$

أيضاً يمكنه إعادة كتابة هذا القانون في الصيغة:

$$مـ_ن = \frac{أ(1 - د^ن)}{1 - د}$$

- وأخيراً يمكنه إيجاد عدد لانهائي من حدود متوالية هندسية ولتكن المتوالية الهندسية اللانهائية من خلال الصيغة التالية:

$$مـ_\infty = \frac{أ}{1 - د} \quad \text{، حيث } |د| < 1 .$$

↓ الحد اللانهائي

↙ القيمة المطلقة للأساس أقل من 1

مثال: أوجد $ح_5$، $مـ_5$، $مـ_\infty$ للمتوالية الهندسية 9، 3، 1، ...

$ح_5$ ← الحد الخامس
$مـ_5$ ← مجموع أول 5 حدود
$مـ_\infty$ ← مجموع الحد اللانهائي

الحل: $أ = 9$

$$د = \frac{3}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)$$

أو $د = \left(\frac{1}{3}\right)$

$$ح_٥ = أ_١ \frac{١ - ر^{ن}}{١ - ر} = ٩ \frac{١ - (\frac{١}{٣})^{٥}}{١ - \frac{١}{٣}}$$

$$= ٩ (\frac{١}{٣})^{٤} = ٩ \times \frac{١}{٨١} = \frac{٩}{٨١} = \frac{١}{٩}$$

لاحظوا أن المتوالية الهندسية تصبح على الصورة التالية:

$$٩، ٣، ١، \frac{١}{٣}، \frac{١}{٩}، \frac{١}{٢٧}، \ldots$$

بقسمة الحد الخامس على الحد الرابع، ينتج أن:

$$\frac{١}{٩} \div \frac{١}{٣} = \frac{١}{٩} \times \frac{٣}{١} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$$

$$ح_٥ = \frac{أ_١ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$$

$$= \frac{٩ (\frac{١}{٣}^{٥} - ١)}{\frac{١}{٣} - ١}$$

$$= \frac{٩ (\frac{١}{٢٤٣} - ١)}{\frac{١}{٣} - \frac{٣}{٣} \times ١} = \frac{٩ (\frac{١}{٢٤٣} - \frac{٢٤٣}{٢٤٣} \times ١)}{-\frac{٢}{٣}}$$

$$= \frac{٩ (-\frac{٢٤٢}{٢٤٣})}{-\frac{٢}{٣}}$$

$$= ٩ \left( \frac{\text{ج}٤\text{ج}-}{\text{ج}٤٢} \right) \times -\frac{٣}{\text{ج}}$$

$$= \frac{\cancel{٩} \times \cancel{\text{ج}٤\text{ج}} \times \cancel{٣} \times \cancel{٤}}{\cancel{\text{ج}٤٣} \times \cancel{\text{ج}}} = \frac{|\text{ج}|}{٩}$$

المطلوب الأخير :-

$$\text{مـ}_{\infty} = \frac{\text{أ}}{١ - \text{د}} \quad ، \quad |\text{د}| < ١$$

لاحظوا أن :

$$|\frac{١}{٣}| < ١$$ (الشرط يتحقق)

$$\text{مـ}_{\infty} = \frac{٩}{١ - \frac{١}{٣}} = \frac{٩}{\frac{٣}{٣} - \frac{١}{٣}}$$ (توحيد المقامات)

$$= \frac{٩}{\frac{٢}{٣}}$$

$$= ٩ \div \frac{\text{ج}}{٣} = ٩ \times \frac{٣}{\text{ج}} = \frac{\text{ج}٧}{\text{ج}}$$

مثال: اوجد الحد الثامن ومجموع أول ثمانية حدود من المتوالية ٤، ٨، ١٦، ... .

الحل: لاحظ أن حاصل الحد الثاني مع الحد الأول يعطي:

$٨ \div ٤ = ٢$

وكذلك حاصل الحد الثالث مع الحد الثاني يعطي:

$١٦ - ٨ = ٨$

∴ لدينا متوالية هندسية حدها الأول $أ = ٤$ وأساسها $ر = ٢$

الحد الأول: $ح_٨$

$ح_ن = أ ر^{ن-١}$

$ح_٨ = ٤ (٢)^{٨-١}$

$= ٤ (٢)^{٧} = ٤ (٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢)$

$= ٤ (١٢٨) = ٥١٢$

الحد الثاني: $ح_٨$

$ح_ن = \frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$

$= \frac{٤ (٢^{٨} - ١)}{٢ - ١} = \frac{٤ (٢٥٦ - ١)}{١} = ٤ (٢٥٥)$

$= ١٠٢٠$ .

وباستخدام الصيغة الأولى:

$$S_N = \frac{a_1(1-r^N)}{1-r}$$

$$S_8 = \frac{4(1-2^8)}{1-2} = \frac{4(1-256)}{-1}$$

$$= \frac{4(-255)}{-1} = 1020 -$$

لاحظوا أنه لا يمكن استخدام الصيغة

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

في هذا المثال لأن $|r| > 1$ حيث أن قيمة

$r = 2$ $(|r| \not< 1)$.

نلتقي محاضرة يوم السبت
من الأسبوع الحادي العشر من
الباب الثامن.