بداية محاضرة الأسبوع الثاني سيوم الاثنين

مثال: إذا أردنا أن نجد ناتج المقدار التالي:

$$\frac{1}{5} + \frac{5}{10} = \frac{1 \times 2}{5 \times 2} + \frac{1 \times 5}{2 \times 5}$$

$$= \frac{7}{10}$$

$$\frac{2}{14} = \frac{5}{14} - \frac{12}{14} = \frac{1 \times 5}{1 \times 14} - \frac{3 \times 4}{7 \times 2}$$

إذا لم نتجد في حالة جمع وطرح الأعداد الكسرية، لا بد من عملية توحيد المقامات أولاً باستخدام المضاعف المشترك الأصغر، وبعدها نقوم بجمع أو طرح البسط مع البسط حسب ما هو على المقام نفسه.

مثال: لو أردنا أن نجد قيمة المقدار التالي:

$$\frac{1}{6} = \frac{7}{36} = \frac{5}{9} \times \frac{3}{4}$$

(نضرب البسط مع البسط والمقام في المقام)

لو أخذنا المثال السابق وأجرينا عليه عملية القسمة

$$\frac{27}{8} = \frac{9}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{9} \div \frac{3}{4}$$

(لابد من تحويل العشرة الصحيحة أولاً مع أخذ مقلوب الكسر الثاني)

خصائص الأعداد الطبيعية :-

إذا كان لدينا س ، ص ، ع فإن هذه الأعداد تحقق الخواص التالية :-

١) الخاصية التبديلية :-

عملية الجمع

$$س + ص = ص + س$$

مثال :- $٣ + ٥ = ٥ + ٣ = ٨$

$$-٣ + ٥ = ٥ + -٣ = ٢$$

٢) الخاصية التجميعية :-

$$(س + ص) + ع = س + (ص + ع)$$

مثال :-

على عملية الجمع

$$(-٥ + ٢) + ١٣ = ٢ + (-٥ + ١٣)$$

$$٨ + ٢ = (-٣) + ١٣$$

$$١٠ = ١٠$$

على عملية الضرب

$$(٢ \times ٥) \times ٤ = ٢ \times (٥ \times ٤)$$

$$(١٠) \times ٤ = ٢ \times (٢٠)$$

$$٤٠ = ٤٠$$

$$(س ص) ع = س (ص ع) .$$

٣ خاصية التوزيع :- (توزيع الضرب على الجمع)

$س(ص + ع) = س ص + س ع$.

مثال :-

$-٣(٥ + ٢) = (-٣ \times ٥) + (-٣ \times ٢)$

$= -١٥ + -٦$

$= -٢١$.

٤ خاصية الاختصار (الحذف) :-

$س + ص = س + ع \Leftarrow ص = ع$

مثال :- $٣ + ع = ٣ + -٥ \Leftarrow ع = -٥$

$س ص = س ع \Leftarrow ص = ع$.

مثال : $٣ \times ص = ٣ \times ٩ \Leftarrow ص = ٩$

٥ خاصية النظير :-

أ) نظير الجمع :-

$س + (-س) = ٠$.

مثال :- $١٠ + -١٠ = ١٠ + -١٠$.

ب) نظير الضرب :-

$\frac{1}{2}$: - النظير الضربي للمتغير س . (مقلوب المتغير س)

$س \times \frac{1}{س} = 1$ حيث أ ، س $\neq$ صفر

$2 \times \frac{1}{2} = 1$

مثال :- $(-3) \times \frac{1}{-3} = 1$

٦) خاصية العوامل :-

إذا كان $س ص = صفر \iff س = صفر$ أو $ص = صفر$

مثال :- $5 س = صفر \Leftarrow س = صفر$ أو $5 \neq صفر$

$س = صفر$

وكذلك $-3 س ص = صفر \Leftarrow \frac{-3 س}{-3} = \frac{صفر}{-3} \Leftarrow س = صفر$

أو

$ص = صفر$

- سندرس ايضاً بعض من المفاهيم الأساسية في علم الرياضيات وهي :-

١ الأسس والجذور .
٢ اللوغاريتمات .
٣ كثيرات الحدود .

بدايةً سنبدأ في مفهوم الأسس :-

الأسس :-

تعريف :- اذا كان م عدداً موجباً وكان س ، ص عددين حقيقيين ، فيمكن تعريف القواعد التالية لأسس :-

١ $س^{م} = س \times س \times س \times \dots \times س$ (م من المرات)

م - من المرات

مثال :- $س^{٢} = س \times س$.

حالة خاصة :- $س^{صفر} = ١$ ، $س \neq صفر$

(٢) $س^{-م} = \frac{١}{س^{م}}$ ، $س \neq ٠$ ، $م \in ص$.

مثال :- $(٥)^{-٣} = \frac{١}{٥^{٣}} = \frac{١}{١٢٥}$.

مثال :- $ج^{-٣} = \frac{١}{ج^{٣}} = \frac{١}{ج \times ج \times ج} = ٨$.

(٣) $\left(\frac{س}{ص}\right)^{-م} = \left(\frac{ص}{س}\right)^{م}$ ، $س \neq ٠$ ، $ص \neq ٠$ ، $م \in ص$

مثال :- $\left(\frac{٥}{٣}\right)^{-٢} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} = \frac{٣^{٢}}{٥^{٢}} = \frac{٩}{٢٥}$.

مفهوم الأُسس :-

اذا كان س عدد حقيقي ، وكانت ن عدد صحيح فان

$س^{ن} = س \times س \times س \times \dots \times س$ (م مرة)

$س^{صفر} = 1$

$س^{-م} = \frac{1}{س^{م}}$.

$(\frac{س}{ص})^{-م} = (\frac{ص}{س})^{م}$.

خواص الأُسس :-

اذا كانت س ، ص ∈ ح ، وكان م ، ن ∈ ص فإن

$س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$.

(الأس / الأساس)

مثال :-

$س^{٣} \times س^{٥} = س^{٨}$.

$س^{-٣} \times س^{-٥} = س^{-٨} = \frac{1}{س^{٨}}$.

$س^{٣} \times ص^{٤}$ (الناتج هو في ابسط صورة)

$س^{٣} \times ص^{٤} \neq (س ص)^{٧}$

ج) $\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن}$ ، حيث $س \neq ص$.

مثال :- $\frac{س^{٣}}{س^{٥}} = س^{٣-٥} = س^{-٢} = \frac{١}{س^{٢}}$.

↓

إعادة كتابة المقدار في الصورة الثانية :-

$\frac{س^{٣}}{س^{٥}} = \frac{\not{س} \times \not{س} \times \not{س}}{س \times س \times \not{س} \times \not{س} \times \not{س}} = \frac{١}{س \times س} = \frac{١}{س^{٢}}$.

مثال :- $\frac{س^{-٣}}{س^{٥}} = س^{-٣-٥} = س^{-٨} = \frac{١}{س^{٨}}$.

د) $س^{-م} = \frac{١}{س^{م}}$

$\frac{١}{س^{٥}} = \frac{س^{-٣}}{س^{٥}} = س^{-٣-٥} = س^{-٨} = \frac{١}{س^{٨}}$.

هـ) $(س^{م})^{ن} = س^{م \times ن}$

$(س^{-٣})^{-٥} = س^{-٣ \times -٥} = س^{١٥} = س^{١٥-٥+٥} = س^{١٠} \times س^{٥} = ص^{٥}$.

أو استطع حل بطريقة أخرى :-

$\frac{س^{-٣}}{س^{-٥}} = س^{-٣-(-٥)} = س^{-٣+٥} = س^{٢} = ص^{٥}$.

٣ $(س^{م})^{ن} = س^{م ن}$.

مثال :- $(س^{٣})^{-٦} = س^{-١٨} = \frac{١}{س^{١٨}}$ ⇐ اضرب

$(\frac{١}{٥} س)^{١٠} = \frac{١}{٥}^{١٠} \times س^{١٠} = س^{٢}$.

٤ $(س ص)^{م} = س^{م} ص^{م}$.

مثال :- $(٥ ص)^{-٣} = ٥^{-٣} \times ص^{-٣}$

$= \frac{١}{١٢٥ ص^{٣}}$.

مثال :- اذا اردنا ان نكتب المقدار السابق بأبسط صورة

$(٤ س ص)^{-٢} = \frac{١}{(٤ س ص)^{٢}} = \frac{١}{١٦ س^{٢} ص^{٢}}$.

٥ $(\frac{س}{ص})^{م} = \frac{س^{م}}{ص^{م}}$ ، $ص \neq$ صفر .

مثال : $(\frac{٢٥}{١٦})^{-٣} = \frac{(٢٥)^{-٣}}{(١٦)^{-٣}} = \frac{٦٤٥}{٢٦٤}$.

$(\frac{٣ س^{-٢}}{٥ ص^{٣}})^{-٣} = (\frac{٥ ص^{٣}}{٣ س^{-٢}})^{٣} = (٥ ص^{٣} \times ٣ س^{-٢})^{٣}$

$= (١٥ س^{-٢} ص^{٣})^{٣}$

$$\leftarrow \quad (١٥\,س^{٢}\,ص^{٣})^{٣} = (١٥)^{٣}\,س^{٦}\,ص^{٩} \quad .$$

مثال :- اوجد الناتج المقدار التالي ابسط صورة :-

$$\left(\frac{س^{-٣}\,ص^{-٦}}{ع^{٤}\,ج^{-٢}}\right)^{٣} = \frac{س^{-٩}\,ص^{-١٨}}{ع^{١٢}\,ج^{-٦}}$$

$$= \frac{١}{ع^{١٢}\,ج^{-٦}\,س^{٩}\,ص^{١٨}}$$

بداية محاضرة يوم الثلاثاء
من الأسبوع الثاني

* الجذور :-

تعريف : اذا كان $س، ص \in ح$ فان العدد س يسمى الجذر النوني للعدد ص إذا كان :

$س^{ن} = ص$ حيث ن : عدد صحيح .

مثال : نقول بان العدد ٥ هو الجذر التربيعي للعدد ٢٥

حيث $٥^{٢} = ٢٥$

وكذلك نقول بان العدد ٣ هو الجذر التكعيبي للعدد ٢٧

حيث $٣^{٣} = ٢٧$

نلاحظ أنه في نظام الاعداد الحقيقية ما يلي :-

١) كل عدد موجب له جذران تربيعيان (احدهما موجب والآخر سالب .

مثال :- $\sqrt{٢٥} = \pm ٥$.

٢) اذا كان العدد سالباً ، فليس له جذر تربيعي .

مثال :- $\sqrt{-٢٥}$ (ليس له جذور حقيقية) .

٣) اذا كان العدد سالباً ، فإن له جذر تكعيبي واحد فقط واشارته سالبة .

مثال :- $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$ $(-٣ \times -٣ \times -٣ = -٢٧)$

تعريف :- اذا كانت $N \geq 2$ ، حيث N عدد صحيح فان

$س^{\frac{1}{N}} = \sqrt[N]{س}$ (يسمى الجذر النوني للعدد س)

س ∈ ح .

الأس الكسري .

مثال :- حاسم كتابة كل من المقادير التالية على الصورة كما هو موضح في الاسفل :

أ) $(16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = \pm 4$.

ب) $(27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

ج) $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$

د) $(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$.

قواعد خاصة بالأسس الكسرية :

اذا كانت س ، ص ∈ ح ؛ س ، ص اعداد موجبة ، ويفرض أن

ن ، م اعداد صحيحة فإن :

1) $\sqrt[N]{س^{N}} = س^{\frac{N}{N}} = س$.

2) $\sqrt[N]{س^{م}} = س^{\frac{م}{N}}$.

3) $\sqrt[N]{س ص} = \sqrt[N]{س} \times \sqrt[N]{ص} = س^{\frac{1}{N}} ص^{\frac{1}{N}}$.

4) $\sqrt[N]{\frac{س}{ص}} = \frac{\sqrt[N]{س}}{\sqrt[N]{ص}} = \frac{س^{\frac{1}{N}}}{ص^{\frac{1}{N}}}$ ، ص ≠ صفر .

مثال :- أكتب المقادير التالية بالصورة الجذرية ثم الصورة الأسية بأبسط صورة :-

١) $\sqrt[5]{س^5} = س^{\frac{5}{5}} = س$.

٢) $\sqrt[4]{س^2} = س^{\frac{2}{4}} = س^{\frac{1}{2}} \leftarrow \sqrt{س}$.

٣) $\sqrt[2]{س^3 ص} = \sqrt[2]{س^3} \sqrt[2]{ص} = س^{\frac{3}{2}} ص^{\frac{1}{2}}$.

٤) $\sqrt{\frac{٢٥}{س^2}} = \frac{\sqrt{٢٥}}{\sqrt{س^2}} = \frac{\pm ٥}{س}$. $(\sqrt{س} = س^{\frac{1}{2}})$

$= س^{-1} = \frac{1}{س}$

٥) $\sqrt[3]{\frac{٨}{٢٧} س^3} = \sqrt[3]{\frac{٨}{٢٧}} \times \sqrt[3]{س^3}$

$= \frac{\sqrt[3]{٨}}{\sqrt[3]{٢٧}} \times س$

$= \frac{٢}{٣} \times س = \frac{٢}{٣} س$.

---

٤ اللوغاريتمات :-

نشأت فكرة مفهوم اللوغاريتمات عند محاولة إيجاد حل للمعادلة

$س = ص^م$ بالنسبة للمجهول م .

~~الحل~~ إذا كان كل من س، ص عددين موجبين، بحيث ص ≠ ١ فإنه يوجد عدد حقيقي م بحيث $ص^م = س$ ويسمى العدد م لوغاريتم العدد س للأساس ص ويكتب بالصورة التالية :

لو س = م .
ص

وباختصار شديد، يمكن كتابة العلاقة السابقة العلاقة التالية :

$$\text{لو}_{\text{ص}} \text{س} = \text{م} \iff \text{ص}^{\text{م}} = \text{س}$$

ص > صفر ، ص ≠ ١
س > صفر

الأمثلة : ① اكتب المقادير التالية على الصورة الأسية :

أ) $\text{لو}_{١٠} ١٠٠٠ = ٣ \iff ١٠^{٣} = ١٠٠٠$

ب) $\text{لو}_{٣} ٩ = ٢ \iff ٣^{٢} = ٩$

ج) $\text{لو}_{٢٥} ٥ = \frac{١}{٢} \iff (٢٥)^{\frac{١}{٢}} = ٥$

$\sqrt{٢٥} = ٥$

② حول المقادير التالية الى الصورة اللوغاريتمية :

أ) $٩ = (٨١)^{\frac{١}{٢}} \iff \text{لو}_{٨١} ٩ = \frac{١}{٢}$

ب) $\frac{١}{٨} = (\frac{١}{٤})^{٣} \iff \text{لو}_{\frac{١}{٤}} \frac{١}{٨} = ٣$

ج) $١٢٥ = (٥)^{٣} \iff \text{لو}_{٥} ١٢٥ = ٣$

٣ اذا كان لدينا المقدار $\log_{10} ١٠٠٠ = م$

والمطلوب هو ايجاد قيمة $م$ ؟

الحل :- $\log_{10} ١٠٠٠ = م \Leftarrow (١٠)^{م} = ١٠٠٠$

$\Leftarrow (١٠)^{م} = ١٠^{٣}$

$\Leftarrow \boxed{م = ٣}$

٤ اذا كان لدينا المقدار $\log_{٩} س = ٢$

والمطلوب هو ايجاد قيمة المتغير $س$ ؟

الحل : $\log_{٩} س = ٢ \Leftarrow س = ٩^{٢} \Leftarrow \boxed{س = ٨١}$

٥ اذا كان لدينا المقدار $\log_{٢٧} ص = ٣$

والمطلوب هو ايجاد قيمة $ص$ ؟

الحل :- $\log_{٢٧} ص = ٣ \Leftarrow ص = ٢٧^{\frac{١}{٣}}$

$\Leftarrow ص = (٣)^{٣}$

$\Leftarrow \boxed{ص = ٣}$

بشكل عام، يوجد أساسان لهما أهمية كبرى في التطبيقات:

1) الأساس ١٠ (اللوغاريتم العادي أو العشري)

وهذا النوع من الأساس لا يكتب أسفل اللوغاريتم.

مثلاً: $\log 100 = 2 \Leftarrow 10^2 = 100 \Leftarrow \log_{10} 100 = 2$

2) الأساس للعدد $e = هـ = 2.718$ (هـ: عدد ثابت)

ويسمى هذا النوع من اللوغاريتم الذي أساسه هـ باللوغاريتم الطبيعي. ($\ln$)

- بعض من اللوغاريتمات:

1) $\log_م 1 = صفر$ (م عدد حقيقي).

$\log_{10} 1 = صفر$، $\log_هـ 1 = صفر$.

2) $\log_م م = 1$

$\log_{10} 10 = 1$، $\log_هـ هـ = 1$.

3) $\log_م ن^س = س \log_م ن$.

مثال: أوجد ناتج المقدار التالي بأبسط صوره

$\log_5 5^س = س \log_5 5 = س \times 1 = س$

مثال:
١) اكتب المقدار لو ١٠٠٠ بأبسط صورة ؟

الحل :- لو ١٠٠٠ = لو ١٠^٣ = ٣ لو ١٠ = ٣ × ١ = ٣
١٠ ١٠ ١٠

٤) لو (س ص) = لو س + لو ص .
م م م

مثال :- اكتب المقدار لو ٥٠ بأبسط صورة ؟

الحل :- لو ٥٠ = لو (١٠ × ٥)
= لو ١٠ + لو ٥ = ١ + لو ٥ .
١٠ ١٠

٥) لو (س / ص) = لو س − لو ص .
م م م

مثال :- اكتب المقدار التالي بأبسط صورة :-
لو ١٠٠ / ٢٠٠ ؟

الحل : لو ١٠٠ / ٢٠٠ = لو ١٠٠ − لو ٢٠٠
= لو ١٠^٢ − لو (٢ × ١٠٠)
= ٢ لو ١٠ − (لو ٢ + لو ١٠٠)
= ٢ × ١ − لو ٢ − لو ١٠^٢
= ٢ × ١ − لو ٢ − ٢ لو ١٠
= ٢ × ١ − ٢ − لو ٢
= س − لو ٢ = − لو ٢ .

مثال :- لو (س ص)^{٢} كتابة هذا المقدار بأبسط صورة ؟
١٠

الحل :- لو (س ص)^{٢} = ٢ لو (س ص)
١٠ ١٠

= ٢ (لو س + لو ص)
١٠ ١٠

= ٢ لو س + ٢ لو ص .

فلو فرضنا أنه مثلاً

س = ١٠ ، ص = ١٠ فيصبح المقدار $\frac{1}{2}$ ٤٧

٤ الحل الآتي :-

٢ لو س + ٢ لو ص = ٢ لو ١٠ + ٢ لو ١٠

= ٢ لو ١٠ + ١ × ٢

= ٢ + ٤ لو ١٠ = ٢ + ٤ × ١

= ٦

#

□ لو $\frac{1}{س}$ = لو س$^{-١}$ = - لو س ،
م م

بمثله لو $\frac{1}{س}$ = - لو س .
م م

مثال :- لو $\frac{1}{٥}$ = - لو ٥ = - ١ ،
٥

مثال : لو $\frac{1}{١٠٠}$ = لو ١٠٠$^{-١}$ = - لو ١٠٠ = - لو ١٠^{٢}

= - ٢ لو ١٠

= - ٢ × ١

= - ٢

$\log_م س^{\frac{1}{ن}} = \frac{1}{ن} \log_م س$ $(ن \geq 2)$.

مثال :- $\log_3 \sqrt[3]{27} = \log_3 27^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_3 27$

$= \frac{1}{3} \log_3 3^3$

$= \frac{1}{3} \times 3 \times \log_3 3$

$= 1 \times 1 \times 1 = 1$.

$\Downarrow$

$\log_3 \sqrt[3]{27} = \log_3 3$

$= 1$

#

ب) كثيرات الحدود :

تعريف : إن كثيرة الحدود في متغير واحد هي عبارة عن تعبير جبري يكتب على الصورة التالية :-

$أ_ن س^ن + أ_{ن-1} س^{ن-1} + \cdots + أ_1 س + أ_0$

حيث $ن \geq$ صفر وعدد صحيح

$أ_ن ، أ_{ن-1} ، \cdots ، أ_1 ، أ_0$ أعداد حقيقية .

والأمثلة :-

$س^5 - س^2$ (كثيرة حدود من الدرجة الخامسة)

$ص^4 - 3 س^4$ (كثيرة حدود من الدرجة الرابعة)

$س^3 - س$ صفر $= ص^3 - 1$ (كثيرة حدود من الدرجة الثالثة)

$جس$ صفر $= 1$ (كثيرة حدود من الدرجة الصفرية)

عدد ثابت

نهاية المحاضرة ليوم الثلاثاء من الأسبوع الثاني