الباب الأول: مجموعات الأعداد

1- مفهوم المجموعة:

- يعتبر مفهوم المجموعة من أهم المفاهيم الأساسية في علم الرياضيات. والمجموعة هي عبارة عن تجمع من الأشياء أو العناصر المحددة تماما. تكتب عناصر أي مجموعة داخل قوسين على الشكل التالي { }، ويرمز للمجموعة بأحد الحروف العربية س، ص، ع، ...

ومثال على ذلك، يمكن التعبير عن مجموعة الاعداد 1، 2، 3، 4، 5 على النحو الآتي:

س = { 1، 2، 3، 4، 5}

- يمكن التعبير عن عناصر المجموعات بأحد الطريقتين التاليتين:

أ- ذكر العناصر: وهي الطريقة التي يتم فيها سرد جميع عناصر المجموعة بين القوسين { } كما في المثال السابق.

ب- طريقة الوصف (القانون): وتتم من خلال ذكر الخاصية أو الصفة التي تميز عناصر هذه المجموعة، ففي المثال السابق يمكن التعبير عن مجموعة الأعداد الصحيحة من 1 إلى 5 على الصورة التالية:

س = { أ: أ عدد صحيح أكبر من أو يساوي 1 وأقل من أو يساوي 5}

2- مجموعات الأعداد:

سنتعرف في هذا البند على بعض من مجموعات الأعداد الشهيرة ومنها:

أ- مجموعة الاعداد الطبيعية (الاعداد الموجبة):

ويرمز لها بالرمز ط وتكتب على النحو الآتي:

ط = {1، 2، 3}

ب – مجموعة الأعداد الصحيحة:

وتكتب على النحو الآتي: صويرمز لها بالرمز

ص ={ ...، -3، -2، -1، 0، 1، 2، 3 ...}

جـ - مجموعة الأعداد النسبية:

حيث ب $\frac{أ}{ب}$ ويرمز لها بالرمز ن وهي جميع الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة

لا تساوي صفر، أ، ب عددان حقيقيان، ومن الأمثلة على ذلك $\frac{1}{3}$ ، $\frac{-1}{5}$.

د – مجموعة الأعداد غير النسبية:

ورمزها نَ وهي جميع الاعداد التي لا يمكن كتابتها على شكل عدد نسبي،

ومن الأمثلة عليها $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{5}$.

هـ - مجموعة الأعداد الحقيقية:

ورمزها ح وهي المجموعة التي تحتوي جميع الأعداد في المجموعات سابقة الذكر.

<u>3- القيمة المطلقة:</u>

القيمة المطلقة لعدد حقيقي سالب تساوي ذلك العدد بعد إزالة إشارة السالب، وبالرموز لو أخذنا القيمة المطلقة للعدد أ، فيمكن كتابته على الصورة | أ| = أ، حيث أ عدد حقيقي.

ومن الأمثلة على ذلك | -1| = 1 ، | 5| = 5 وهكذا.

الباب الأول من المحاضرة السابقة :-

① مفهوم المجموعة :- س = {١، ٢، ٣، ٤}

(المجموعة س مجموعة مكونة من أربعة عناصر) .

② مجموعات الأعداد الشهيرة :-

أ) الأعداد الطبيعية (الأعداد الموجبة) : ط = {١، ٢، ---} .

$\Downarrow$

ب) الأعداد الصحيحة : ص = {--، -٢، -١، ٠، ١، ٢، --}

$\Downarrow$

ج) الأعداد النسبية :- N = {س : س = $\frac{أ}{ب}$} ، ب ≠ صفر

$\Downarrow$

د) الأعداد غير النسبية : N' : جميع الأعداد التي لا يمكن كتابتها على الصورة النسبية .

$\Downarrow$

هـ) الأعداد الحقيقية :- (ح) ،

③ العمليات الجبرية على المجموعات :-

أ) الاتحاد ($\cup$) .

ب) التقاطع ($\cap$) .

ج) المتممة (المكملة) : $\overline{س}$.

د) الفرق بين مجموعتين :- س − ص

العمليات الجبرية على المجموعة :-

1) عملية الاتحاد :-

تعريف :- إذا كان س، ص أي مجموعتين في ك

فإن س $\cup$ ص هي جميع العناصر الموجودة في س أو موجودة في ص .

يمكننا استخدام طريقة الوصف لكتابة عناصر الاتحاد لأي مجموعتين على النحو الآتي :-

س $\cup$ ص = { ~~ك~~ أ : أ $\in$ س أو أ $\in$ ص } .

مثال :- إذا كانت ك = { ٣، ٤، ٥، ٧، ٨ } .

وكانت س = { ٣، ٤ } .

ص = { ٤، ٥، ٧ } .

فإن س $\cup$ ص = { ٣، ٤، ٥، ٧ } .

2) عملية التقاطع :-

تعريف :- إذا كان لدينا مجموعتين س، ص في ك فإن

س $\cap$ ص هي جميع العناصر الموجودة في س و موجودة في ص

~~مثال~~ بالرموز :- س $\cap$ ص = { أ : أ $\in$ س و أ $\in$ ص } .

وبالاعتماد على المثال السابق، فإن س $\cap$ ص = { ٤ } .

③ المتممة (المكملة) :-

تعريفاً :- إذا كانت لدينا المجموعة الجزئية س في ك ،
فإن متممة س ويرمز لها بالرمز $\overline{\text{س}}$ هي جميع
العناصر التي تنتمي إلى ك ولا تنتمي إلى س
بالصورة :-

$\overline{\text{س}} = \{ \text{أ} : \text{أ} \in \text{ك و أ} \notin \text{س} \}$.

مثال :-

إذا كانت لدينا المجموعة ك = { السعودية، مصر، الأردن، البحرين }
وكانت س = { السعودية ، البحرين } .
فنقول بأن $\overline{\text{س}}$ = { مصر، الأردن } .

ونلاحظ دائماً أن :-

- $\text{س} \cup \overline{\text{س}} = \text{ك}$ (عملية اتحاد أي مجموعة مع متممتها تعطينا المجموعة الكلية).
- $\text{س} \cap \overline{\text{س}} = \phi$ (عملية تقاطع أي مجموعة مع متممتها يعطينا المجموعة الخالية).

④ الفرق بين مجموعتين :-

إذا كانت لدينا مجموعتين س ، ص ، فإن الفرق بينهما هو جميع العناصر
التي تنتمي إلى س ولا تنتمي إلى ص .

بالصورة :- $\text{س} - \text{ص} = \{ \text{أ} : \text{أ} \in \text{س و أ} \notin \text{ص} \}$.

٣ إذا كان عنصر في مجموعة، فإننا نستخدم مفهوم الانتماء، وبالرمز :-

اذا كانت

س = {أ ، ب ، جـ ، د} .

فنقول بأن العنصر أ ∈ س .

عنصر الانتماء مجموعة

٤ المجموعة الخالية :-

نقول بأن المجموعة س هي مجموعة خالية إذا لم تحتوي على أي عنصر، ونرمز للمجموعة الخالية بالرمز ∅ أو { } .

٥ المجموعة الكلية :-

وهي المجموعة التي تحوي جميع المجموعات الجزئية قيد الدراسة.

ونرمز للمجموعة الكلية بالرمز ك .

مثال :-

اذا كانت ك = {١، ٢، ٣، ...، ١٠} .

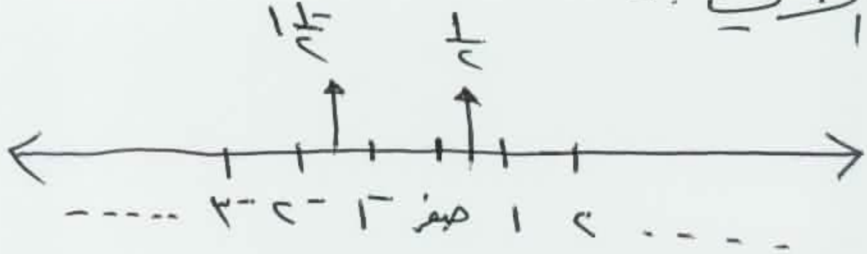
وكانت س = {س : س عدد فردي} = {١، ٣، ٥، ٧، ٩}

ص = {ص : ص عدد زوجي} = {٢، ٤، ٦، ٨، ١٠}

نلاحظ أن :- س ⊆ ك ، ص ⊆ ك ، س ≠ ص ، س ⊄ ص ، ص ⊄ س

* التمثيل البياني للأعداد الحقيقية :-

- يمكن تمثيل الأعداد الحقيقية بيانياً باستخدام خط الأعداد على النحو الآتي :-



* بعض المفاهيم الأساسية على المجموعات :-

(1) تساوي مجموعتين إذا تساوت جميع العناصر في كلا المجموعتين :-

مثال :-

أ = {١، ٢، ٣، ٥} .

ب = {٥، ١، ٣، ٢} .

فنقول بأن أ = ب .

(2) نقول بأن المجموعة س هي عبارة عن مجموعة جزئية من ص إذا كان كل عنصر في س موجودة في ص .

وبالرموز : س $\subseteq$ ص

مثال : إذا كان س = {١، ٣، ٥} .

ص = {١، ٢، ٣، ...، ١٠} .

فنقول بأن س $\subseteq$ ص ← الاحتواء

مثال :- إذا كانت

ك = {١، ٢، ---، ١٠}.

وكانت س = {١، ٢، ٥}.

ص = {٥، ٦، ٧، ٨}.

فإن :-

س − ص = {١، ٢}.

س ∪ ص = {١، ٢، ٥، ٦، ٧، ٨}.

س ∩ ص = {٥}.

$\overline{\text{س}}$ = {٣، ٤، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠}.

$\overline{\text{ص}}$ = {١، ٢، ٣، ٤، ٩، ١٠}.

$\overline{\text{ك}}$ = ϕ.

$\overline{\phi}$ = ك.

نهاية الجزء الأول من محاضرة الأسبوع الأول

طباعة مبادئ الإحصاء.

الباب الثاني :- المفاهيم الأساسية في الجبر .

في العادة، يوجد لدينا أربع عمليات أساسية في الجبر وهي

① الجمع ، ② الطرح ، ③ الضرب ، ④ القسمة .

أولاً :- سنتعرف على كيفية إجراء العمليات الجبرية الأربع في الأعداد الحقيقية :-

① مثال : إذا كان لدينا العددين ٣ ، ٥−
فإننا نجري عملية الجمع في النحو الآتي :-

٣ + (−٥) = −٢ (إذا كانت الإشارات مختلفة في عملية الجمع فإننا نأخذ الفرق بينهما مع وضع إشارة العدد الأكبر).

وكذلك نقول بأن :-

−٣ + ٥ = ٢ .

أما إذا كان لدينا العددين −٣ ، −٥
فإننا نجري عملية الجمع على النحو الآتي :-

−٣ + −٥ = −٨ (إذا كانت الإشارات متشابهة لكلا العددين، فإننا نجمع العددين مع وضع الإشارة نفسها) .

وكذلك نقول بأن :-

٣ + ٥ = ٨ .

٨

٢) عملية الطرح :-

يمكن النظر الى عملية الطرح بأنها تفسير لعملية الجمع وبذلك يمكن تطبيق القواعد السابقة على عملية الطرح .

مثال :- إذا اردنا أن نجد الفرق بين العددين ٢ ، ٥ فنقول بأن :

٢ − ٥ = ٢ + (−٥) = −٣

وكذلك

−٣ − ٥ = −٣ + (−٥) = −٨ .

وكذلك

−٤ − ٩ = −٤ + (−٩) = −١٢ .

وكذلك

−٣ − (−٢) = −٣ + (+٢) = −١

* يمكن استنتاج أن عملية الجمع والطرح هي عملية واحدة تسمى عملية الجمع الجبري .

٣) عملية الضرب :-

مثال :- اذا كان لدينا العددين -٣ ، ٥

فإن حاصل ضربهما هو $-٣ \times ٥ = -١٥$

(نلاحظ أنه عند ضرب عددين مختلفين
في الاشارة ، فإن الناتج هو حاصل
ضربهما مع وضع اشارة العدد سالب)

وكذلك $٣ \times ٥^{-} = ١٠^{-}$.

أما اذا كان لدينا العددين ٢ ، ٥ أو -٢ ، -٥

فإن حاصل الضرب هو :-

$٢ \times ٥ = ١٠$

$-٢ \times ٥- = ١٠$

(نجد أنه عند ضرب عددين
متشابهين في الاشارة فإن
الناتج هو حاصل ضربهما مع وضع اشارة
الموجب) .

٤) عملية القسمة :-

اذا اردنا تقسيم العددين ١٥ ، ٣ فإنه
يمكن كتابة الناتج في الصورة التالية :-

$١٥ \div ٣ = \frac{١٥}{١} \xrightarrow{\text{تحويل القسمة الى ضرب}} \times \frac{١}{٣} = \frac{١٥}{٣} = ٥$

مقلوب

(نجد أنه يمكن تحويل
عملية القسمة الى عملية
ضرب العدد الأول مع
مقلوب العدد الثاني)

١١

مثال :- أوجد ناتج المقادير التالية :-

١) $-٢٠ \div ٤ = -٢٠ \times \frac{١}{٤} = \frac{-٢٠}{٤} = -٥$

٢) $٢٠ \div -٤ = ٢٠ \times \frac{-١}{٤} = \frac{-٢٠}{٤} = -٥$.

٣) $-٢٠ \div -٤ = -٢٠ \times \frac{-١}{٤} = \frac{٢٠}{٤} = ٥$.

النتيجة :- نلاحظ أن عملية الضرب والقسمة هي عملية واحدة
بحيث نحول عملية القسمة الى ضرب مع تطبيق قواعد الضرب عليها) .

- بعض الملاحظات على الأولويات عند ايجاد ناتج مقدار عددي :

اذا اردنا ان نجد ناتج المقادير التالية :-

١) $-٢ + ٥ \times -٣ = -٢ + (-١٥) = -١٧$

٢) $(-٢ + ٥) \times -٣ = (٣) \times -٣ = -٩$

٣) $١٠ \div ٢ - ٥ = ٥ - ٥ =$ صفر .

٤) $٣ \times -٣ + ٢ \div (١ - ٥) = ٣ \times -٣ + ٢ \div (-٤)$

$= -٩ + \frac{-٢}{٤}$

$= \frac{-٩ \times ٢}{٢ \times ١} + \frac{-١ \times ١}{٢ \times ١} = \frac{-١٨}{٢} + \frac{-١}{٢}$

$= \frac{-١٩}{٢}$.

الاستنتاج :-

وانغاً الأولوية للعمليات الجبرية على الأعداد الحقيقية على النحو الآتي :-

١) في حال وجود الأقواس ، فإننا نجري العمليات داخل هذه الأقواس .

٢) تكون الأولوية لعملية الضرب والقسمة .

٣) آخر الأولويات تكون لعمليتي الجمع والطرح .

مثال :- أوجد ناتج المقادير التالية بأبسط صورة :-

١) $-٩ \div ٣ \times ٢ = -٣ \times ٢ = -٦$

الأولوية

٢) $(-٩ \div ٣) \times ٢ = -٣ \times ٢ = -٦$

٣) $(-٩ - ٣) + ٢ \times ٣ = (-٩ + -٣) + ٦$

$= -١٢ + ٦$

$= -٦$

- ملاحظة :-

١) عند ضرب عددين كسريين فإننا نضرب البسط مع البسط مقسوماً على المقام في المقام .

مثال :- $\frac{١}{٥} \times \frac{-٣}{٤} = \frac{-٣}{٢٠}$

٢) في حالة الجمع ، فإنه لابد من توحيد المقامات قبل إجراء عملية الجمع :-

مثال :- $\frac{١ \times ٤}{٥ \times ٤} + \frac{-٣ \times ٥}{٤ \times ٥} = \frac{٤}{٢٠} + \frac{-١٥}{٢٠} = \frac{-١١}{٢٠}$