النهايات: ① $\lim_{x\to 5} 27$ ② $\lim_{x\to -2}(1-2x)$ ③ $\lim_{x\to 1/2}(8x-5)$ — نوجد

① $\lim_{x\to 5} 27 = 27$ الحل

2) $\lim_{x\to -2}(1-2x) = 1-(2x-2) = 1+4 = 5$ نوجد

3) $\lim_{x\to 5}(8x-5) = 8\times\frac{1}{2} - 5 = 4-5 = -1$

عمليات على النهايات

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و كانت $\lim_{x\to \infty} g(x) = K$

(*) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm K$ نجد

مثال: إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ (*)

نوجد ① $\lim_{x\to 2}[h(x) - f(x)]$ الحل

$\lim_{x\to 2}[h(x) - f(x)] = 10.5 - 5 = 5.5$

نوجد ② $\lim_{x\to 2}[f(x) + h(x) + g(x)]$ الحل

$\lim_{x\to 2}[f(x) + h(x) + g(x)] = 5 + 10.5 + (-8) = 15.5 - 8 = 7.5$

(*) $\lim_{x\to a} c\cdot f(x) = c \times \lim_{x\to a} f(x) = c \times L$

مثال: نوجد $\lim_{x\to 2} 8f(x)$ الحل $f(x) = 5$

$\lim_{x\to 2} 8f(x) = 8\lim_{x\to 2} f(x) = 8\times 5 = 40$

(*) $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = L \times K$

مثال

نوجد $\lim_{x\to 2}[g(x)\times h(x)]$ الحل

$\lim_{x\to 2} g(x) \times \lim_{x\to 2} h(x) = -8 \times 10.5 = -84$

(*) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{K}$

مثال: نوجد ① $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ الحل

$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5}{-8}$

نوجد ② $\lim_{x\to 2}[f(x) - g(x)\times h(x)]$ الحل

$[f(x) - g(x)\times h(x)] = 5 - [-8\times 10.5] = 5 - (-84) = 5 + 84 = 89$

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

مثال

$$\lim_{x\to 1}[3x-1]^6 = \left[\lim_{x\to 1} 3x-1\right]^6 = [3\times 1-1]^6 = (3-1)^6 = 2^6 = 64$$

أمثلة أوجد نهاية كل من الدوال التالية

1) $\lim_{x\to 2}(3x^3+5x^2-7) = 3\times 2^3+5\times 2^2-7$
$= 3\times 8+5\times 4-7 = 24+20-7 = 37$

2) $\lim_{x\to 3}\dfrac{3x^2+7}{x-5} = \dfrac{3\times 3^2+7}{3-5} = \dfrac{3\times 9+7}{-2} = \dfrac{27+7}{-2} = \dfrac{34}{-2} = -17.$

3) $\lim_{x\to 2} e^x = e^2$

4) $\lim_{x\to 1} e^{x^2+2x+1} = e^{1^2+2\times 1+1} = e^{1+2+1} = e^4$

5) $\lim_{x\to 2}[\log(3x^2+5)] = \log(3\times 2^2+5) = \log(3\times 4+5) = \log 17$

6) $\lim_{x\to 3}[\ln(2x-5)] = \ln(2\times 3-5) = \ln(6-5) = \ln 1 = 0$

مثال إذا كانت

$$F(x) = \begin{cases} 3x^2+5 & , x<1 \\ 7x-2 & , x>1 \end{cases}$$

أوجد 1) $\lim_{x\to 3} f(x)$

الحل تقع ٣ ضمن مجال الدالة الثانية لأن $3>1$

$\therefore \lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} 7x-2 = 7\times 3-2$
$= 21-2 = 19$

2) $\lim_{x\to 1/2} f(x)$

الحل تقع $\frac{1}{2}$ ضمن مجال الدالة الأولى لأن $\frac{1}{2}<1$

$\therefore \lim_{x\to 1/2} f(x) = \lim_{x\to 1/2} 3x^2+5 = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+5$
$= 3\times\frac{1}{4}+5 = \frac{3}{4}+5$
$= \frac{3}{4}+\frac{20}{4} = \frac{23}{4}$

نهايات المقادير غير المحدده عند نقطه

هي التي تظهر عند حساب النهايات والناتج يكون $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

أولاً عند ما تكون نتيجة التعويض المباشر $\frac{0}{0}$ نتبع الخطوات التالية

① إذا كان البسط والمقام كثيرات حدود
أكمل التحليل ثم الاختصار ثم التعويض

مثال أوجد نهايتين

1) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

أكمل بالتعويض
كمية غير معينة

$\lim_{x\to -1} = \frac{(-1)^2-1}{-1+1} = \frac{0}{0}$

لذا نزال هذه الحالة نحلل البسط

$\lim_{x\to -1} = \frac{x^2-1}{x+1}$

$\therefore \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = \lim_{x\to -1} (x-1)$

ثم نعوض $= -1-1 = -2$

2) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

أكمل بالتعويض

$= \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{9-9}{3-3} = \frac{0}{0}$

لذا نزال هذه الحالة نحلل البسط بالعوامل الأولية

$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}$

$= \lim_{x\to 3} (x+3)$

$= 3+3 = 6$

x^2-3x+2 نحلل البسط بالتقاطع كالتالي
$x(x+1) = x^2+x$ ونحلل بالعامل المشترك كالتالي

ج إذا احتوت الدالة على جذر

مثال أوجد نهاية الدالة

$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

أكمل

كمية غير معينة

$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{\sqrt{9}-3}{9-9} = \frac{3-3}{9-9} = \frac{0}{0}$

نضرب البسط والمقام بمرافق البسط $(\sqrt{x}+3)$ (مرافق = مرافق الجذر - مرافق الثنائي)

$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3}$

$= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$

2) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

$= \frac{\sqrt{2+2}-2}{2-2} = \frac{\sqrt{4}-2}{2-2} = \frac{2-2}{2-2} = \frac{0}{0}$

$\therefore$ نضرب البسط والمقام بمرافق البسط

$\lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$

ثانيا عندما $x \to \infty$

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرات حدود و $x \to \infty$ فإن

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

الحالة الأولى

إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام فإن النهاية = صفر

مثال: درجة البسط أقل من درجة المقام

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4-5x^2+2}{7x^5+6x^3-3x+1}$$

∴ النهاية = صفر

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{3x^4-5x^2+2}{7x^5+6x^3-3x+1} = 0$$

مثال آخر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

الحالة الثانية

درجة البسط = درجة المقام ∴ النهاية = معامل أكبر أس في البسط / معامل أكبر أس في المقام

مثال: أوجد النهاية

درجة البسط ③ = درجة المقام ③

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+1}{3x^3+x^2+5}$$

∴ الحل = $\frac{1}{3}$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+1}{3x^3+x^2+5} = \frac{1}{3}$$

الحالة الثالثة

درجة البسط أكبر من درجة المقام ∴ النهاية = ∞

مثال: أوجد النهاية

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^2+5}$$

الحل: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^2+5} = \infty$

لأن درجة البسط ٣ أكبر من درجة المقام ٢

الاتصال

هل الدالة $f(x) = \begin{cases} x-9 & x \neq -3 \\ -6 & x = -3 \end{cases}$ متصلة في $x = -3$

الحل: أولا نفحص الدالة عند $x = -3$ ونحسب الدالة عندها

$$f(-3) = -6$$

ثانيا نفحص الدالة عند القيم القريبة من -3 بالنهايات

$$\lim_{x\to-3} f(x) = \lim_{x\to-3} x-9 = -3-9 = -12$$

∴ النهاية عند $x = -3$ ≠ النهاية عند $x = -3$ ∴ الدالة غير متصلة

$$\therefore \lim_{x\to-3} f(x) \neq f(-3)$$

∴ الدالة غير متصلة في $x = -3$

مثال: هل الدالة المعرفة بـ $f(x)=\begin{cases}6x & 0<x<5\\ 25+2x & x\geq 5\end{cases}$ متصلة عند $x=5$

الحل $x=5$ من الدالة الثانية ∴ نفحص في الدالة الثانية عند $x=5$

$f(5)=25+2\times5=25+10=35$

ثم نفحص في الدالة الأولى بالنهايات عند $x\to5^-$

$\lim_{x\to5^-}6x=\lim_{x\to5}6\times5=30$

ثم نفحص في الدالة الثانية بـ $x\to5^+$

$\lim_{x\to5^+}f(x)=\lim_{x\to5}(25+2x)=25+2\times5=35$

∴ نهاية اليمين ≠ نهاية اليسار ∴ الدالة غير متصلة عند $x=5$

مثال: أثبت أن الدالة $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$ غير متصلة عند $x=-2$

لاحظ: إذا كانت الدالة غير معرفة ∴ فهي غير متصلة

هنا الدالة واجب فقط ∴ نفحص عند $x=-2$

$f(-2)=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{4-4}{-2+2}=\frac{0}{0}=$ غير معرفة

∴ الدالة غير متصلة عند $x=-2$