# الباب السابع: المحددات

تعريف: إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة $n$ فإنه يرافقها عدد حقيقي يسمى محدد المصفوفة أ، ويرمز له بالرمز |أ|.

وسنتعرف في هذا الفصل على محددة مصفوفة من الرتبة $1\times1$، $2\times2$ وأخيراً من الرتبة $3\times3$.

أولاً: مصفوفة من الرتبة $1\times1$:

إذا كانت أ = $[م_{11}]$، يعرَّف محدد أ بأنه

|أ| = $م_{11}$.

مثال: إذا كانت أ = $[5]$، فإن |أ| = $5$.

ثانياً: مصفوفة من الرتبة $2\times2$:

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} م_{12} & م_{11} \\ م_{22} & م_{21} \end{bmatrix}$، فإن محدد أ يعرف على النحو الآتي:-

|أ| = $م_{11}\,م_{22} - م_{12}\,م_{21}$.

مثال: أوجد محدد المصفوفات التالية:

① أ = $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ② ب = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

الحل: ① |أ| = $2\times2 - (1\times-3) = 4+3 = 7$

② |ب| = $0\times4 - 2\times3 = 0 - 6 = -6$

ثالثاً: محدد مصفوفة من رتبة ٣×٣ :

إذا كانت

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فإنه يمكن حساب محدد هذا النوع من المصفوفات بأحد الطرق التالية :

١- $$|\underline{أ}| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

مثال ١: اوجد محددة المصفوفة

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 6 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ ؟}$$

الحل:

$$|\underline{أ}| = 3\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1\times 3 - 4\times -5) - 2(1\times 0 - 4\times 6) + (-2)(-5\times 0 - 3\times 6)$$

$$= 3(3 - -20) - 2(0 - 24) + (-2)(0 - 18)$$

$$= 3(-23) - 2(24) - 2(18)$$

$$= -69 - 48 - 36$$

$$= -153 .$$

مثال ٢: أوجد محدد المصفوفة

$$ب = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$|ب| = 0\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 0\,(3\times 0 - 5(-1)) - 1\,(2\times 0 - 5\times 1) + (-1)\,(2\times(-1) - 1\times 3)$$

$$= \text{صفر} - 1\,(-5) - 1\,(-2-3)$$

$$= 5 - 1\,(-5) = 5 + 5 = 10$$

٢- طريقة ساروس:

تتلخص هذه الطريقة بأن نكتب العمود الأول والعمود الثاني في العمود الرابع والعمود الخامس على التوالي بالشكل التالي:

إذا كانت

$$أ = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

نقوم بإعادة كتابة المصفوفة على الصورة:

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ + & + & + & & \end{array}$$

وعليه فإن محدد المصفوفة أ يصبح على الصورة :

$$|أ| = أ_{11}أ_{22}أ_{33} + أ_{21}أ_{32}أ_{13} + أ_{31}أ_{12}أ_{23}$$

$$-\ (أ_{13}أ_{22}أ_{31} + أ_{23}أ_{32}أ_{11} + أ_{33}أ_{12}أ_{21}) .$$

مثال ١: سنعيد حل المثال الأول من الطريقة الأولى بحيث

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ & ٣ \\ ١ & -٥ & ٦ \\ ٤ & ٣ & ٠ \end{bmatrix} .$$

الحل:

$$\begin{array}{ccccc} \text{العمود الثاني} & \text{العمود الأول} & & & \\ ٢ & ٣ & -٢ & ٢ & ٣ \\ -٥ & ٦ & ١ & -٥ & ٦ \\ ٣ & ٠ & ٤ & ٣ & ٠ \end{array}$$

$$(٣ \times ٦ \times -٢) + (٠ \times ١ \times ٢) + (٤ \times -٥ \times ٣) = |\underline{أ}|$$

$$\left[(٢ \times ٦ \times ٤) + (٣ \times ١ \times ٣) + (-٢ \times -٥ \times ٠)\right] -$$

$$\left[٤٨ + ٩ + \text{صفر}\right] - ٣٦ - ٦٠ - =$$

$$. ١٥٣ - = ٥٧ - ٩٦ - =$$

مثال ٢ : أوجد محددة المصفوفة

$$\begin{bmatrix} ١- & ١ & ٠ \\ ٥ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ١- & ١ \end{bmatrix} = \underline{ب}$$

الحل: نعيد كتابة المصفوفة ب على الصورة :

$$\begin{array}{ccccc} ١ & ٠ & ١- & ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٥ & ٣ & ٢ \\ ١- & ١ & ٠ & ١- & ١ \end{array}$$

$$(١- \times ٢ \times ١-) + (١ \times ٥ \times ١) + (٠ \times ٣ \times ٥) = |\underline{ب}|$$

$$[(١ \times ٢ \times ٠) + (٠ \times ٥ \times ١-) + (١- \times ٣ \times ١)] -$$

$$(\text{صفر} + \text{صفر} + ٣-) - (٢ + ٥ + \text{صفر}) =$$

$$. \quad ١٠ = ٣ + ٧ =$$

* خواص المحددات :

سوف نستعرض في هذا البند بعض من خواص المحددات والتي تفيد في عملية حساب محدد :-

١) إذا وجد صف أو عمود في مصفوفة مربعة جميع عناصره أصفاراً فإن محددة تلك المصفوفة = صفر .

مثال :-

١) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} =$ صفر

٢) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & -2 \end{vmatrix} =$ صفر

٣) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$ صفر

٢) لا تتغير قيمة المحدد إذا استبدلت الأعمدة بالصفوف والصفوف بالأعمدة :

مثال :-

١) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -13$

٢) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24$ .

٣) عند استبدال صف بصف آخر أو عمود بعمود آخر فإن إشارة المحدد تتغير:

مثال: ١)

$$-١٠ = -\begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

تبديل الصف الأول مع الصف الثاني — تبديل العمود الأول مع العمود الثاني

٢)

$$\begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ -١ & -١ & ٤ \\ ١ & ٥ & ٢ \end{vmatrix} - = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ -١ & ٤ & -١ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{vmatrix}$$

٤) إذا تساوت العناصر المتقابلة لعمودين أو صفين في مصفوفة أ فإن |أ| = صفر.

مثال: ١)

$$\begin{vmatrix} -٢ & -٢ & ٥ \\ ٣ & ٣ & ٣ \\ ٢ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

(العمود الثاني = العمود الثالث)

٢)

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & -١ \\ ٣ & ٢ & -١ \\ ٨ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

(الصف الأول = الصف الثاني)

٥) إذا ضربت عناصر عمود أو صف لمصفوفة أ في عدد ثابت م فإن قيمة المحدد الناتج تساوي قيمة المحدد الأصلي مضروبة في العدد م.

مثال :-

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (-1\times 2) - 5\times 3 = 17 .$$

والآن نضرب العمود الأول في العدد ٢ :-

$$\begin{vmatrix} -1 & 2\times 3 \\ 5 & 2\times 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times 17 = 34 .$$

٦) محدد المصفوفة القطرية يساوي حاصل ضرب عناصر القطر :-

مثال :-

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\times -1\times 3 = -3 .$$

ملاحظة: المحاضرة المباشرة الثالثة من الاسبوع التاسع