المحاضرة الثالثة عشر
التكامل بالتعويض
وحل المعادلات التفاضلية

التكامل بالتعويض:

اذا كانت $\frac{d}{dx}[F(g(x))]=f(g(x))g'(x)$ بفرض $f(g(x))=F'(g(x))$ فان

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx=F(g(x))+c$$

يمكن ايجاد التكامل أعلاه بأتباع الخطوات التالية

بفرض ان

$$\boxed{\begin{aligned} &u=g(x)\\ &\frac{du}{dx}=g'(x)\Rightarrow du=g'(x)dx \end{aligned}}$$

اذاً $\int f(g(x)).g'(x)\,dx=\int f(u)du=F(u)+c$

أمثلة: أوجد التكاملات التالية:

1. $\int (x^2+1)^{50}.2x\,dx$

الحل:

$$\boxed{\begin{aligned} &u=x^2+1\\ &du=2xdx \end{aligned}}$$

$$\int (x^2+1)^{50}.2xdx=\int u^{50}du=\frac{u^{51}}{51}+c$$

$$=\frac{1}{51}(x+1)^{51}+c$$

2. $\int (x^2+1)^3 x\,dx$

الحل:

$$\boxed{\begin{aligned} &u=x^2+1\\ &du=2x\,dx \end{aligned}}$$

$$\int (x^2+1)^3 x\,dx=\frac{1}{2}\int 2(x^2+1)^3 x\,dx=\frac{1}{2}\int u^3 du$$

$$=\frac{1}{2}\frac{u^4}{4}+c$$

$$=\frac{1}{8}(x^2+1)^4+c$$

تابع التكامل:

3. $\int \sin x \cos x \, dx$

الحل:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sin x \\ du &= \cos x \, dx \end{aligned}}$$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2 x + c$$

4. $\int x \cos(x^2) \, dx$

الحل:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^2 \\ du &= 2x \, dx \end{aligned}}$$

$$\int x \cos(x^2) \, dx = \frac{1}{2}\int 2x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2}\int \cos u \, du = \frac{1}{2}\sin u + c$$

$$= \frac{1}{2}\sin(x^2) + c$$

5. $\int \frac{x^3}{1+x^4} \, dx$

الحل:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 1+x^4 \\ du &= 4x^3 \, dx \end{aligned}}$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+x^4} 4x^3 dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u} du = \frac{1}{4}\ln|u| + c$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|1+x^4\right| + c$$

6. $\int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$

الحل:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 1+x^2 \\ du &= 2x \, dx \end{aligned}}$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} 2x dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$$

$$= \ln\left|1+x^2\right| + c$$

تابع التكامل:

$$7.\quad \int e^{\sin x}\cos x\ dx$$

الحل:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sin x \\ du &= \cos x\, dx \end{aligned}}$$

$$\int e^{\sin x}\cos x\, dx = \int e^{u}\, du = e^{u} + c$$
$$= e^{\sin x} + c$$

$$8.\quad \int x e^{x^2} dx$$

الحل:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^2 \\ du &= 2x\, dx \end{aligned}}$$

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{u}\, du = \frac{1}{2}e^{u} + c$$
$$= \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

$$9.\quad \int x^2 e^{3x^3} dx$$

الحل:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 3x^3 \\ du &= 9x^2\ dx \end{aligned}}$$

$$\int x^2 e^{3x^3} dx = \frac{1}{9}\int 9x^2 e^{3x^3} dx = \frac{1}{9}\int e^{u}\, du = \frac{1}{9}e^{u} + c$$
$$= \frac{1}{9}e^{3x^3} + c$$

حل المعادلات التفاضلية:

مثال:

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = xy^{-2}$

الحل:

نفصل المتغيرين x، y عن بعضهما بحيث يصبح تفاضل كل منهما مضروباً في دالة لذلك المتغير فقط، كما نبين أدناه.

$$\frac{dy}{dx} = xy^{-2} = \frac{x}{y^2}$$
$$y^2 dy = xdx$$

بإجراء التكامل للطرفين

$$\int y^2 dy = \int xdx$$
$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + c$$

تابع التكامل:

مثال:

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 4x^3y^3$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3y^3 = \frac{4x^3}{y^{-3}}$$

$$y^{-3}dy = 4x^3dx$$

$$\int y^{-3}dy = \int 4x^3dx$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = \frac{4x^4}{4} + c$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = x^4 + c$$

تمارين

أوجد التكاملات التالية:

$$\int \cos 3x\, dx$$

$$\int \left(\sec^2 2x - 1\right) dx$$

$$\int e^{2x}dx$$

$$\int \frac{x^2dx}{x^3+1} \quad , x \neq -1$$

حل المعادلة التفاضلية المعطاة:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3$$