المحاضرةالحادية عشرة
الجزء الاول
مشتقة الدوال الاسية واللوغاريتمية والمثلثية

مشتقة الدوال الاسية:

إذا كانت $y=e^{x}$ فان :

$$\frac{dy}{dx}=e^{x}$$

وبشكل عام إذا كانت $y=e^{u}$ حيث $u=f(x)$ فان $\frac{dy}{dx}=e^{u}.\frac{du}{dx}$

مثال: إذا كانت $y=e^{x^2+2x+1}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=e^{x^2+2x+1}.(2x+2)$$

نتيجة:

إذا كانت $y=b^{x}$ فان :

$$\frac{dy}{dx}=b^{x}.\ln b$$

وبشكل عام إذا كانت $y=b^{u}$ حيث $u=f(x)$ فان $\frac{dy}{dx}=b^{u}.\ln b.\frac{du}{dx}$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y=3^{x}$ 2. $y=9^{2x^2}$

الحل:

(1) $\frac{dy}{dx}=3^{x}\ln 3$

(2) $\frac{dy}{dx}=9^{2x^2}.\ln 9.(4x)$

مشتقة الدوال اللوغاريتمية:

إذا كانت $y=\ln x$ فان :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

وبشكل عام إذا كانت $y=\ln u$ حيث $u=f(x)$ فان $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$

مثال: إذا كانت $y=\ln(1+x^2)$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}\times 2x=\frac{2x}{1+x^2}$$

تابع الاشتقاق:

نتيجة:

إذا كانت $y=\log_b x$ فان :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}.\frac{1}{\ln b}$$

وبشكل عام إذا كانت $y=\log_b u$ حيث $u=f(x)$ فان:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}.\frac{1}{\ln b}.\frac{du}{dx}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y=\log_2 4x$ 2. $y=\log_2(1+x^2)$

الحل:

$$1.\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{4x}\cdot 4\cdot\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{x\ln 2}$$

$$2.\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}\times 2x\times\frac{1}{\ln 2}=\frac{2x}{(1+x^2)\ln 2}$$

مشتقة الدوال المثلثية:

١-إذا كانت $y=\sin x$ فان :

$$\frac{dy}{dx}=\cos x$$

وبشكل عام إذا كانت $y=\sin u$ حيث $u=f(x)$ فان:

$$\frac{dy}{dx}=\cos u.\frac{du}{dx}$$

مثال: إذا كانت $y=\sin 4x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\cos 4x\times 4=4\cos 4x$$

٢-إذا كانت $y=\cos x$ فان :

$$\frac{dy}{dx}=-\sin x$$

وبشكل عام إذا كانت $y=\cos u$ حيث $u=f(x)$ فان:

$$\frac{dy}{dx}=-\sin u.\frac{du}{dx}$$

مثال: إذا كانت $y=\cos 5x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=-\sin 5x\times 5=-5\cos 5x$$

تابع الاشتقاق:

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y=\cos^2 x$

2. $y=\sin x\cos x$

الحل:

1. $\frac{dy}{dx}=2\cos x\,.(-\sin x)=-2\cos x\sin x$

2. $y=\sin x\times-\sin x+\cos x\times\cos x=-\sin^2 x+\cos^2 x$

جدول مشتقات بقية الدوال المثلثية:

3. $\frac{d}{dx}(\tan u)=\sec^2 u.\frac{du}{dx}$

4. $\frac{d}{dx}(\sec u)=\sec u.\tan u.\frac{du}{dx}$

5. $\frac{d}{dx}(\csc u)=-\csc u.\cot u.\frac{du}{dx}$

6. $\frac{d}{dx}(\cot u)=-\csc^2 u.\frac{du}{dx}$

حيث $u=f(x)$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ الدوال الآتية :

1. $y=\tan^2 x$

2. $y=\cot^3(2x+1)$

3. $y=\sec(x+1)$

4. $y=\csc 2x$

الحل:

1. $\frac{dy}{dx}=2\tan x\ \sec^2 x$

2. $\frac{dy}{dx}=3\cot^2(2x+1).\left[-\csc^2(2x+1)\right].(2)$

$=-6\cot^2(2x+1).\csc^2(2x+1)$

3. $\frac{dy}{dx}=\sec(x+1).\tan(x+1)\,.(1)$

$=\sec(x+1)\tan(x+1)$

4. $\frac{dy}{dx}=-\csc 2x\,.\cot 2x\,.(2)$

$=-2\csc 2x\cot 2x$

تابع الاشتقاق:

الاشتقاق الضمني:

لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ من دالة ضمنية(غير صريحة) نعتبر y دالة لـ x ونطبق قواعد الاشتقاق المناسبة.

ملاحظة:
عندما نفاضل أي حد يحتوي على y نضرب ناتج التفاضل في $\frac{dy}{dx}$ ثم نجمع الحدود المحتوية على $\frac{dy}{dx}$ في طرف وننقل الحدود الاخرى في الطرف الثاني.

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال الآتية:

1. $y^2 + x^2 = 9$
2. $y^2 + x^2 + 3x^3 + 4y^3 = 9$
3. $x^2 y + 3xy^3 = x + 3$

الحل:

1. $\frac{d}{dx}(y^2 + x^2) = \frac{d}{dx}(9)$

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

2. $\frac{d}{dx}(y^2 + x^2 + 3x^3 + 4y^3) = \frac{d}{dx}(9)$

$$2y.\frac{dy}{dx} + 2x + 9x^2 + 12y^2.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(2y + 12y^2) = -2x - 9x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 9x^2}{2y + 12y^2}$$

3. $\frac{d}{dx}(x^2 y + 3xy^3) = \frac{d}{dx}(x + 3)$

$$x^2.\frac{dy}{dx} + y.2x + 3\left[x.3y^2.\frac{dy}{dx} + y^3.1\right] = 1 + 0$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy + 9xy^2\frac{dy}{dx} + 3y^3 = 1$$

$$\frac{dy}{dx}\left(x^2 + 9xy^2\right) = 1 - 2xy - 3y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2xy - 3y^3}{x^2 + 9xy^2}$$

تابع الاشتقاق:

الاشتقاق الجزئي:

إذا كانت لدينا الدالة $z=f(x,y)$ دالة متغيرين ، اذا ابقينا y ثابتاً فان z دالة في x فقط ، وعليه نستطيع ايجاد تفاضل z بالنسبة إلى x وتسمى المشتقة التي نحصل عليها المشتقة الجزئية للدالة z بالنسبة إلى x ويرمز لها بالرمز $\frac{\partial z}{\partial x}$

وبنفس الطريقة إذا أبقينا x ثابتاً فان z دالة في y فقط ، وعليه نستطيع ايجاد تفاضل z بالنسبة إلى y وتسمى المشتقة التي نحصل عليها المشتقة الجزئية للدالة z بالنسبة إلى y ويرمز لها بالرمز $\frac{\partial z}{\partial y}$

مثال:

أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ لكل من الدوال الآتية:

1. $z=xy+x^2y+y^2x$
2. $z=2x^2+3xy-6y^2$

الحل:

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=y+2xy+y^2$

   $\frac{\partial z}{\partial y}=x+x^2+2yx$

2. $\frac{\partial z}{\partial x}=4x+3y$

   $\frac{\partial z}{\partial y}=3x-12y$

تمارين

أوجد مشتقات الدوال التالية:

$y=e^{x^2-2x}$

$y=(2x+3)e^{-2x}$

$y=e^{\cos x}$

$y=\frac{1}{2}\left(e^{3x}+e^{-3x}\right)$

$y=\log_2 3x$

$y=7^{x^3}$

$y=\ln(\sin x)$

$y=x^2e^{2x}$

$y=e^{2x}\cos 3x$

تمارين

أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

i. $9x^2+4y^2=40$

ii. $y^4+3y-4x^3=5x+1$

iii. $4xy^3-x^2y+x^3-5x+6=0$

iv. $5x^2+2x^2y+y^2=8$

v. $y=x^2\sin x$

vi. $y^2=x\cos y$

إذا كانت $y^2-4x^2=5$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x=-1$ و $y=3$

إذا كانت $xy^2+3y=27$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x=2$ و $y=3$

أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ إذا كانت :

$z=x^3-2xy+y^3$

$z=5y^3+xy-7y^2$

$z=xy-\ln xy$

$z=x\ln y+y\ln x-xe^{xy}$

المحاضرة الحادية عشرة
الجزء الثاني
تطبيقات التفاضل

إيجاد القيم العظمى والصغرى للدالة:

أسلوب المشتقة الثانية:

الخطوات :

إيجاد المشتقة الأولى للدالة ($f'(x)$).

نضع $f'(x)=0$ لإيجاد قيم x التي تحقق المعادلة (القيم الحرجة).

إيجاد المشتقة الثانية للدالة ($f''(x)$).

عند القيمة الحرجة $x=x_1$ تكون للدالة ......

١. قيمة صغرى محلية إذا كانت $f''(x_1)>0$

٢. قيمة عظمى محلية إذا كانت $f''(x_1)<0$

٣. ويفشل الاختبار إذا كانت $f''(x_1)=0$

مثال(١): إذا كان $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ فما هي نقط القيم العظمى والصغرى إن وجدت؟ لهذه الدالة.

الحل: $f'(x)=3x^2-6x-9$

$$3x^2-6x-9=0$$
$$3(x^2-2x-3)=0 \qquad \div 3$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$(x-3)(x+1)=0$$

إما $(x-3)=0$ اذاً $x=3$

أو $(x+1)=0$ اذاً $x=-1$

$$f''(x)=6x-6$$

عند $x=3$

$$f''(3)=6\times3-6=18-6=12>0$$

∴توجد قيمة صغرى محلية عند $x=3$ وهي:

$$f(3)=3^3-3\times3^2-9\times3+5$$
$$=27-27-27+5=-22$$

عند $x=-1$

$$f''(-1)=6\times-1-6=-6-6=-12<0$$

∴توجد قيمة عظمى محلية عند $x=-1$ وهي:

$$f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2-9\times-1+5$$
$$=-1-3+9+5=10$$

تابع القيم العظمى والصغرى:

مثال(٢): إذا كان $f(x)=x^3-12x^2+45x+1$ فما هي نقط القيم العظمى والصغرى إن وجدت؟ لهذه الدالة.

الحل:

$$f'(x)=3x^2-24x+45$$

$$3x^2-24x+45=0$$

$$3(x^2-8x+15)=0 \qquad \div 3$$

$$x^2-8x+15=0$$

$$(x-3)(x-5)=0$$

إما $(x-3)=0$ اذاً $x=3$

أو $(x-5)=0$ اذاً $x=5$

$$f''(x)=6x-24$$

عند $x=3$

$$f''(3)=6\times3-24=18-24=-6<0$$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية عند $x=3$ وهي:

$$f(3)=3^3-12\times3^2+45\times3+1$$

$$=27-108+135+1=163-108=55$$

عند $x=5$

$$f''(5)=6\times5-24=30-24=6>0$$

$\therefore$ توجد قيمةصغرى محلية عند $x=5$ وهي:

$$f(5)=5^3-12\times5^2+45\times5+1$$

$$=125-300+225+1=351-300=51$$

نقطة الانقلاب ومجالات التقعر

تعريف:

تسمى النقطة $(x_1, f(x_1))$ نقطة انقلاب لمنحنى الدالة f إذا كان منحنى الدالة مقعراً إلى أسفل مباشرة إلى يسار x ومقعرا إلى أعلى مباشرة إلى يمين x أو العكس.

تحديد مجالات التقعر ونقطة الانقلاب:

١) نوجد $f''(x)$

٢) نوجد النقاط الحرجة للمشتقة الثانية ($f''(x)=0$)

٣) نضع القيم على خط الأعداد

٤) نحدد إشارة $f''(x)$ حول النقاط الحرجة ويكون المنحنى:

-مقعرا نحو الأعلى إذا كان $f''(x)>0$

-مقعرا نحو الأسفل إذا كان $f''(x)<0$

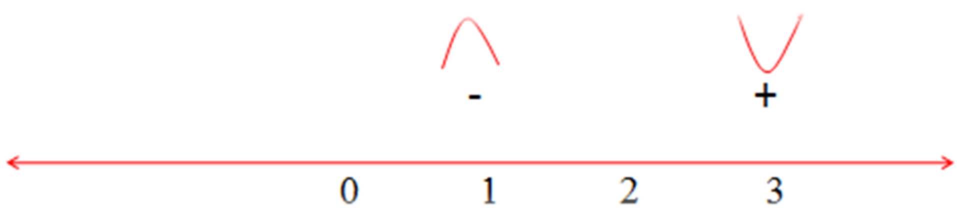
٥) إذا حصل التغير في التقعر قبل وبعد نقطة حرجة x_1 مثلا اذاً توجد نقطة انقلاب وهي $(x_1, f(x_1))$

مثال(١):

أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة $f(x)=x^3-6x^2+9x+5$

الحل:

$$f'(x)=3x^2-12x+9$$
$$f''(x)=6x-12$$
$$6x-12=0$$
$$6x=12$$
$$x=\frac{12}{6}=2$$



$$f''(1)=6(1)-12=6-12=-6$$
$$f''(3)=6(3)-12=18-12=+6$$

بما أن حصل تغير في التقعر قبل وبعد 2 اذا توجد نقطة انقلاب عند x= 2 وهي $(2, f(2))$

$$f(2)=2^3-6\times2^2+9\times2+5$$
$$=8-24+18+5=7$$

نقطة الانقلاب هي $(2,7)$

مثال(٢):

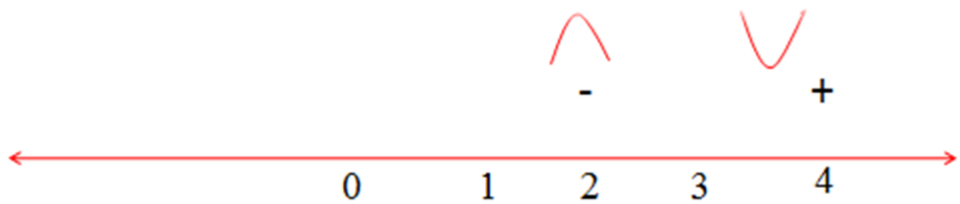
أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة $f(x)=x^3-9x^2+24x$

الحل: $f'(x)=3x^2-18x+24$

$$f''(x)=6x-18$$
$$6x-18=0$$
$$6x=18$$
$$x=\frac{18}{6}=3$$

تابع نقطة الانقلاب ومجالات التقعر

تابع الحل:



$$f''(2) = 6(2) - 18 = 12 - 18 = -6$$
$$f''(4) = 6(4) - 18 = 24 - 18 = +6$$

بما أن حصل تغير في التقعر قبل وبعد 2 اذا توجد نقطة انقلاب عند x= 2 وهي $(3, f(3))$

$$f(2) = 3^3 - 9 \times 3^2 + 24 \times 3$$
$$= 27 - 81 + 72 = 18$$

نقطة الانقلاب هي $(3,18)$

تمارين:

١ - ما هي نقط القيم العظمى والصغرى إن وجدت؟ للدوال التالية:

i. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

ii. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$

iii. $f(x) = x^2 + 2x + 18$

٢- أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

٣- أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$