المحاضرة العاشرة
الاشتقاق

الاشتقاق:

متوسط التغير:

إذا كانت y=f(x) فان أي زيادة في المتغير المستقل x قدرها Δx تحدث تغير في المتغير التابع y قدره Δy النسبة بين التغير في y إلى التغير في x تسمى متوسط التغير للدالة

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$ اذاً

لأي x_1 و x_2 في مجال الدالة

حيث $x_2=x_1+\Delta x$

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=x^2+2$ عندما تتغير x من 1إلى 1.5

الحل:

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=1.5$$

$$f(1)=1^2+2=1+2=3$$

$$f(1.5)=(1.5)^2+2=2.25+2=4.25$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{4.25-3}{1.5-1}=\frac{1.25}{0.5}=2.5$$

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=3x+2$ عندما تتغير x من 1 إلى 2

الحل:

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=2$$

$$f(1)=3\times1+2=3+2=5$$

$$f(2)=3\times2+2=6+2=8$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{8-5}{2-1}=\frac{3}{1}=3$$

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=x^2+2$ عندما تتغير x من 2 إلى 4

الحل:

$$x_1=2 \quad , \quad x_2=4$$

$$f(2)=2^2+2=4+2=6$$

$$f(4)=4^2+2=16+2=18$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{18-6}{4-2}=\frac{12}{2}=6$$

تابع الاشتقاق:

تعريف المشتقة الأولى:

نهاية متوسط التغير للدالة عندما $\Delta x \to 0$ (ان وجدت) تسمى المشتقة الاولى للدالة $y = f(x)$ بالنسبة للمتغير x ويرمز لها باحد الرموز التالية:

$$f'(x) \text{ ، } \frac{dy}{dx} \text{ ، } y' \text{ ، } \frac{d}{dx}[f(x)]$$

إذاً

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ويسمى هذا التعريف بالتعريف العام للتفاضل(المبادئ الأولية للتفاضل)

جبر الاشتقاق:

1*إذا كانت $y = x^n$ حيث n عدد حقيقي فان :

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

$$y = x^{\frac{1}{2}} \qquad y = x^{-3} \qquad y = x^5$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4$$

$$\frac{dy}{dx} = -3x^{-4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

٢*إذا كانت $y = c$ حيث c كمية ثابتة فان :

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

$$y = 5 \qquad y = -10$$

$$y = \frac{3}{4}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

تابع الاشتقاق:

٣*إذا كانت $y = cx^n$ حيث c عدد حقيقي فان :

$$\frac{dy}{dx} = n.c\,x^{n-1}$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

$$y = 3x^4$$

$$y = -2x^7$$

$$y = 16x^{\frac{1}{2}}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = -14x^6$$

$$\frac{dy}{dx} = 8x^{-\frac{1}{2}}$$

٤*إذا كانت $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n-1)ax^{n-2} + na_nx^{n-1}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x + 20$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 15x^2 - 4x + 7$$

5*إذا كانت $y = [f(x)]^n$ فان:

$$\frac{dy}{dx} = n[f(x)]^{n-1}.\ f'(x)$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = (2x^2 + 5)^8$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 8(2x^2 + 5)^7.4x = 32x(2x^2 + 5)^7$$

تابع الاشتقاق:

6*إذا كانت $y=\left(f(x).g(x)\right)$ فان :

$$\frac{dy}{dx}=f(x).g'(x)+g(x).f'(x)$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=(x-1)(3x-2)$

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=(x-1)(3)+(3x-2)(1)\\&=3x-3+3x-2\\&=6x-5\end{aligned}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=(x^2+1)(2x^3-2)$

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=(x^2+1)(6x^2)+(2x^3-2)(2x)\\&=6x^4+6x^2+4x^4-4x\\&=10x^4+6x^2-4x\end{aligned}$$

٧*إذا كانت $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ فان :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g(x).f'(x)-f(x).g'(x))}{[g(x)]^2}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=\frac{2x+5}{3x-4}$

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{(3x-4)(2)-(2x+5)(3)}{(3x-4)^2}\\&=\frac{6x-8-6x-15}{(3x-4)^2}\\&=\frac{-23}{(3x-4)^2}\end{aligned}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=\frac{x^2-5x+7}{2x}$

الحل:

$$\begin{aligned}y'&=\frac{(2x)(2x-5)-(x^2-5x+7)(2)}{4x^2}\\&=\frac{4x^2-10x-2x^2+10x-14}{4x^2}\\&=\frac{2x^2-14}{4x^2}=\frac{2(x^2-7)}{4x^2}=\frac{x^2-7}{2x^2}\end{aligned}$$

تابع الاشتقاق:

نتيجة: إذا كانت $y=\frac{c}{f(x)}$ حيث c ثابت فان:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-c\,.\,f'(x)}{[f(x)]^2}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=\frac{3}{x^2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3(2x)}{(x^2)^2}=\frac{-6x}{x^4}=\frac{-6}{x^3}$$

٨*إذا كانت $y=f(u)$ ، $u=g(x)$ فان :

(قانون السلسلة) $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\,.\,\frac{du}{dx}$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=u^2+5u$ ، $u=x+3$

الحل:

$$\frac{du}{dx}=1,\quad \frac{dy}{du}=2u+5$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\,.\,\frac{du}{dx}=(2u+5)(1)=2(x+3)+5=2x+11$$

مثال: إذا كانت $y=\frac{u}{u+1}$ ، $u=3x^2-1$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{du}=\frac{(u+1)(1)-u(1)}{(u+1)^2}=\frac{1}{(u+1)^2}$$

$$\frac{du}{dx}=6x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\,.\,\frac{du}{dx}=\left[\frac{1}{(u+1)^2}\right](6x)$$

$$=\frac{6x}{(u+1)^2}$$

$$=\frac{6x}{(3x^2-1+1)^2}=\frac{6x}{9x^4}=\frac{2}{3x^3}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=\frac{2}{3(1)^3}=\frac{2}{3}$$

طلاب التعليم عن بعد - جامعة الملك فيصل > ادارة اعمال ١٤٣٣ > Ialy

تابع الاشتقاق:

المشتقات العليا:

عندما نشتق الدالة للمرة الثانية فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثانية ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$\frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2}{dx^2}[f(x)],\ f''(x),\ y''$$

وعندما نشتق الدالة للمرة الثالثة فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثالثة ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$\frac{d^3y}{dx^3},\quad \frac{d^3}{dx^3}[f(x)],\quad f^{(3)}(x),\quad y'''$$

وهكذا

عندما نشتق الدالة للمرة الـ n فإن المشتقة التي نحصل عليها يرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$f^{(n)}(x),\ \frac{d^ny}{dx^n},\quad \frac{d^n}{dx^n}[f(x)],\quad y^{(n)}$$

مثال: أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة $y=x^4+5x^3-4x+1$

الحل:

$$y'=4x^3+15x^2-4$$

$$y''=12x^2+30x$$

$$y'''=24x+30$$

مثال: أوجد المشتقات الأربع الأولى للدالة

$$y=4x^5+3x^4-8x^3+2x^2+x-1$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=20x^4+12x^3-24x^2+4x+1$$

$$\frac{dy^2}{dx^2}=80x^3+36x^2-48x+4$$

$$\frac{dy^3}{dx^3}=240x^2+72x-48$$

$$\frac{dy^4}{dx^4}=480x+72$$

مثال: اذا كان $y=x^3+3x+1$

أثبت ان $y^{(3)}+xy''-2y'=0$

الحل: $y'=3x^2+3$

$$y''=6x$$

$$y^{(3)}=6$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نجد ان:

$$6+x(6x)-2(3x^2+3)$$

$$=6+6x^2-6x^2-6$$

$$=0$$

تمارين

أوجد مشتقات الدوال التالية:

$y = x+1$ $\quad y = \dfrac{2x-1}{2x+1}$ $\quad y = \sqrt{3}\left(x^5 - x^{-3}\right)$ $\quad y = (2x^5-1)(5x^3+7x)$ $\quad y = 4x^2 - 3x^4$

$y = (4x^2+5x-2)^8$ $\quad y = \dfrac{1}{2x+3}$ $\quad y = \sqrt[5]{3x^2+4}$ $\quad y = (x^2+2x+3)(x^2+1)$

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ إذا كانت :

i. $y = u^2 - u \quad , \; u = 4x+3$

ii. $y = u + \dfrac{1}{u} \quad , \; u = 5-2x$

iii. $y = \dfrac{1}{u+1} \quad , \; u = x^3 - 2x + +5$

طلاب التعليم عن بعد - جامعة الملك فيصل > ادارة اعمال ١٤٣٣ > Ialy

تمارين

أوجد المشتقات الثلاث الأولى لكل من الدوال الآتية:

$$y = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$

$$y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{3x+1}$$

طلاب التعليم عن بعد - جامعة الملك فيصل > ادارة اعمال ١٤٣٣> laly