المحاضرة التاسعة
نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة
(حالات عدم التعيين) والاتصال

نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

الكمية الغير معينة هي الكمية التي ليس لها جواب محدد.

من أهم حالات عدم التعيين التي تظهر عند حساب النهايات هي:

$\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$

يمكن إزالة حالةعدم التعيين بإحدى الطرق التالية:

أولاً: عندما تكون نتيجة التعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ نعالج الحالة كما يلي:

أ - إذا كانت البسط والمقام كثيرتا حدود:

التحليل والاختصار ثم التعويض

مثال:

أوجد نهاية كل مما يلي:

1. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$

الحل:

بالتعويض المباشر نجد أن

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(-1)^2-1}{-1+1}=\frac{1-1}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-1)=-1-1=-2$$

2. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

الحل:

كمية غير معينة $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{3^2-9}{3-3}=\frac{9-9}{3-3}=\frac{0}{0}$ لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$

الحل:

كمية غير معينة $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{1^2-3\times 1+2}{1-1}=\frac{1-3+2}{1-1}=\frac{0}{0}$ لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)=1-2=-1$$

تابع نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

ب -إذا احتوت الدالة على جذر:

نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر ونقوم بالتحليل والاختصار ثم التعويض

مثال:

أوجد نهاية كل مما يلي:

1. $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

الحل:

$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\frac{\sqrt{9}-3}{9-9}=\frac{3-3}{9-9}=\frac{0}{0}$ كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط $\left(\sqrt{x}+3\right)$

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{9}+3}$$

$$=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

2. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

الحل:

$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\frac{\sqrt{2+2}-2}{2-2}=\frac{\sqrt{4}-2}{2-2}=\frac{2-2}{2-2}=\frac{0}{0}$ كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط $\left(\sqrt{x+2}+2\right)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

تابع نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

ثانياً: عندما $x \to \infty$

عندما تكون نتيجة التعويض المباشر = $\frac{\infty}{\infty}$ نتبع ما يلي:

نقسم كل حد من حدود البسط والمقام على x **بأكبر أس أو نستخدم النتيجة التالية إذا كان البسط والمقام كثيرتا حدود.**

نتيجة:

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتا حدود و $x \to \infty$ فان:

$$1- \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام.

$$2- \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{معامل } x \text{ بأكبر أس في البسط}}{\text{معامل } x \text{ بأكبر أس في المقام}}$$

إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام.

$$3- \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام.

ملاحظة:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = \left[\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right]^n = 0$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \left[\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right]^3 = 0$$

مثال:

أوجد نهاية كل مما يلي:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+1}{3x^3+x^2+5}$

الحل:

بما أن درجة البسط = درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+1}{3x^3+x^2+5} = \frac{1}{3}$$

تابع نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^2+2x+1}$

الحل:

بما أن درجة البسط أقل من من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^2+2x+1}=0$$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^2+5}$

الحل:

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^2+5}=\infty$$

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-2}{2x^3+7}$

الحل:

بما أن درجة البسط = من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-2}{2x^3+7}=\frac{5}{2}$$

تمارين:

أوجد النهايات التالية:

1. $\lim_{x\to4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-16}$
2. $\lim_{x\to-3} \frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$
3. $\lim_{x\to-4} \frac{x+4}{x^2+5x+4}$
4. $\lim_{x\to9} \frac{3-\sqrt{x}}{x-9}$
5. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4-5x^2+2}{7x^5+6x^3-3x+1}$
6. $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2+3x-2}{2x^2+4}$
7. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+6x-21}{x^2+1}$

الاتصال:

تعريف:

يقال للدالة $f(x)$ متصلة في نقطة c إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية:

- الدالة معرفة في c أي أن f(c) معرفة
- $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة
- $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

مثال(1):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x+3} & , x\neq -3\\ -6 & , x=-3\end{cases}$$

متصلة في x=-3 ؟

الحل: $f(-3)=-6$

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{9-9}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}=\lim_{x\to -3} x-3=-6$$

بما أن $\lim_{x\to -3} f(x)=f(-3)$

اذاً الدالة متصلة في x=-3

مثال(2):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases}2x-3 & , x\leq 2\\ x^2 & , x>2\end{cases}$$

متصلة في x=2 ؟

الحل: $f(2)=2\times 2-3=1$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(2x-3)=2\times 2-3=1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x^2=2^2=4$$

بما أن $\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$

اذاً

$\lim_{x\to 5} f(x)$ غير موجودة

اذاً الدالة غير متصلة في x=2

تابع الاتصال:

مثال(3):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & , x<2 \\ 1 & , x=2 \\ 5-x & , x>2 \end{cases}$$

متصلة في x=2 ؟

الحل: $f(2)=1$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x+1)=2+1=3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(5-x)=5-2=3$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=3$$

بما أن $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$

اذاً الدالة غير متصلة في x=2

مثال(4):

أثبت أن الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ غير متصلة في x=-2

الحل:

$$f(-2)=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{4-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$ غير معرفة

اذاً الدالة غير متصلة في x=-2

تمارين:

بين فيما إذا كانت الدالة المعطاة متصلة أو غير متصلة في العدد x المعطى

1. $f(x)=\begin{cases} 2+x & , x<2 \\ 2-x & , x\geq 2 \end{cases}$ في x=2

2. $f(x)=\begin{cases} 2x & , x\geq -1 \\ x-1 & , x<-1 \end{cases}$ في x=-1

طلاب التعليم عن بعد - جامعة الملك فيصل > ادارة اعمال ١٤٣٣ > Ialy

تابع تمارين:

3. $f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\le 1 \\ 2 & , x>1 \end{cases}$

في x=1

4. $f(x)=\begin{cases} x+1 & , x<2 \\ 3 & , x=2 \\ 5-x & , x>2 \end{cases}$

في x=2