المحاضرة الثامنة
النهايات
Limits

النهايات:

مفهوم النهاية:

نهاية الدالة يقصد بها إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة. وعادة تكتب النهايات على الصيغة $\lim_{x\to a} f(x)$ وتقرأ

نهاية الدالة f(x) عندما تقترب x من القيمة a ($x \to a$)

مثال:

إذا كانت f(x)=2x+1 فان $\lim_{x\to 2} f(x)$ يعني إيجاد قيمة الدالة f(x) عندما قيمة x تؤول إلى 2.
وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي 5.

جبر النهايات:

- إذا كانت $f(x)=c$ ، حيث c عدد حقيقي فان $\lim_{x\to a} f(x)=c$ لكل عدد حقيقي a .
- إذا كانت $f(x)=x$ فان $\lim_{x\to a} f(x)=a$ لكل عدد حقيقي a .

وكذلك اذا كانت $f(x)=mx+b$ ، حيث m و b عددان حقيقيان فان $\lim_{x\to a} f(x)=ma+b$

مثال:

أوجد قيمة كل مما يأتي:

1. $\lim_{x\to 3} 2$
2. $\lim_{x\to -2} x$
3. $\lim_{x\to 2}(3x+4)$
4. $\lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x-5)$

الحل:

1. $\lim_{x\to 3} 2 = 2$
2. $\lim_{x\to -2} x = -2$
3. $\lim_{x\to 2}(3x+4) = 3\times 2+4 = 6+4 = 10$
4. $\lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x-5) = 8\times\frac{1}{2}-5 = 4-5 = -1$

تابع النهايات:

❖ إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)=l$ ، وكانت $\lim_{x\to a} g(x)=k$ وكانت c أي عدد حقيقي ، فان:

i. $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=l\pm k$

ii. $\lim_{x\to a} cf(x)=c\times\lim_{x\to a} f(x)=c\times l$

iii. $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)]=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\times\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]=l\times k$

iv. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{l}{k}\quad, k\neq 0$

مثال:

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x)=5$ ، $\lim_{x\to 2} g(x)=-8$ و $\lim_{x\to 2} h(x)=10.5$

فأوجد مما يلي:

i. $\lim_{x\to 2}[h(x)-f(x)]$

ii. $\lim_{x\to 2}[g(x)\times h(x)]$

iii. $\lim_{x\to 2} 8f(x)$

iv. $\lim_{x\to 2}[f(x)+h(x)+g(x)]$

v. $\lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{f(x)}$

الحل:

$$\lim_{x\to 2}[h(x)-f(x)]=\lim_{x\to 2} h(x)-\lim_{x\to 2} f(x)$$
$$=10.5-5=5.5$$

$$\lim_{x\to 2}[g(x)\times h(x)]=\lim_{x\to 2} g(x)\times\lim_{x\to 2} h(x)$$
$$=-8\times 10.5=-84$$

$$\lim_{x\to 2} 8f(x)=8\lim_{x\to 2} f(x)=8\times 5=40$$

$$\lim_{x\to 2}[f(x)+h(x)+g(x)]=\lim_{x\to 2} f(x)+\lim_{x\to 2} h(x)+\lim_{x\to 2} g(x)$$
$$=5+10.5+(-8)$$
$$=15.5-8=7.5$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to 2} h(x)}{\lim_{x\to 2} f(x)}=\frac{10.5}{5}=2.1$$

تابع جبر النهايات:

❖ إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة حدود ، $f(x)=c_o+c_1\,x+c_2\,x^2+\cdots+c_n\,x^n$

فان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c_o+c_1\,a+c_2\,a^2+\cdots+c_n\,a^n=f(a)$

مثلاً :

$$\lim_{x\to 5}(x^2-4x+3)=5^2-4\times5+3$$
$$=25-20+3=8$$

ملاحظة:

اذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ فان

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{l}$$

نظرية:

إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجودة و n عددا صحيحاً موجباً فان

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

مثلاً:

$$\lim_{x\to1}[3x-1]^6=\left[\lim_{x\to1}3x-1\right]^6=[3\times1-1]^6=[3-1]^6=2^6=32$$

أمثلة:

أوجد نهاية كل من الدوال التالية:

1. $\lim\limits_{x\to2}(3x^3+5x^2-7)=3\times2^3+5\times2^2-7$

$=3\times8+5\times4-7$

$=24+20-7=37$

2. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2+7}{x-5}=\dfrac{3\times3^2+7}{3-5}=\dfrac{3\times9+7}{-2}=\dfrac{27+7}{-2}=\dfrac{34}{-2}=-17$

3. $\lim\limits_{x\to2}e^{x+2}=e^{2+2}=e^4$

4. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{(-1)^2-1}{-1+1}=\dfrac{1-1}{-1+1}=\dfrac{0}{0}$

كمية غير معينة

5. $\lim\limits_{x\to3}\ln(2x-5)=\ln(2\times3-5)=\ln(6-5)=\ln1=0$

6. $\lim\limits_{x\to2}\log(3x^2+5)=\log(3\times2^2+5)$

$=\log(3\times4+5)$

$=\log(12+5)$

$=\log17$

7. $\lim\limits_{x\to1}(3x^3+4x-2)^3=(3\times1^3+4\times1-2)^3=(3+4-2)^3=5^3=125$

8. $\lim\limits_{x\to2}\sqrt[3]{x^2+5}=\sqrt[3]{2^2+5}=\sqrt[3]{4+5}=\sqrt[3]{9}$

تابع النهايات:

❖ إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل:

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , x<1\\ \\ 7x-2 & , x>1\end{cases}$$

وأردنا إيجاد $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ فقد تنشأ إحدى ثلاث حالات:

١. تقع a ضمن مجال القاعدة الأولى
٢. تقع a ضمن مجال القاعدة الثانية
٣. تقع a على الحد الفاصل بين المجالين

مثال: إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , x<1\\ \\ 7x-2 & , x>1\end{cases}$$

فأوجد

$$i.\ \lim_{x\to 3} f(x) \qquad ii.\ \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) \qquad iii.\ \lim_{x\to 1} f(x)$$

الحل:

*تقع 3 ضمن مجال القاعدة الثانية لان 3 >1

$$\therefore \lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}(7x-2)=7\times 3-2=21-2=19$$

*تقع $\frac{1}{2}$ ضمن مجال القاعدة الأولى لان $\frac{1}{2}<1$

$$\therefore \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to \frac{1}{2}}(3x^2+5)=3\left(\frac{1}{2}\right)^2+5=\frac{3}{4}+5=\frac{3}{4}+\frac{20}{4}=\frac{23}{4}$$

*تقع 1 على الحد الفاصل بين مجال القاعدتين لذا نحسب النهاية من اليمين(أي $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$) والنهاية من اليسار(أي $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$)

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(7x-2)=7\times 1-2=7-2=5$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x^2+5)=3\times 1^2+5=3+5=8$$

$$\because \lim_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

تمارين:

*إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x)=5$ ، $\lim_{x\to 2} g(x)=-8$ و $\lim_{x\to 2} h(x)=10.5$
فأوجد مما يلي:

- $\lim_{x\to 2}[5f(x)-4h(x)]$
- $\lim_{x\to 2}\left[-\frac{1}{2}g(x)\times h(x)\right]$
- $\lim_{x\to 2}[f(x)+2h(x)+3g(x)-2]$
- $\lim_{x\to 2}[8f(x)-g(x)\times h(x)]$
- $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{f(x)}$
- $\lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{2f(x)}$

*أوجد النهايات التالية إذا وجدت:

1. $\lim_{x\to 2}(x^2-2x+1)$
2. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$
3. $\lim_{x\to -2}\frac{2x-3}{x+4}$
4. $\lim_{x\to 0}e^x$
5. $\lim_{x\to 6}\sqrt[4]{x-3x-8}$
6. $\lim_{x\to 3}\log(2x+4)$
7. $\lim_{x\to 2}\ln(x^2+1)$
8. $\lim_{x\to -1}(2x^2+5x+1)^2$
9. $\lim_{x\to 1}\sqrt{x}$