2017

مبادئ رياضيات ١

د/ نبيل مصطفى
منصور

اعداد /أم حنان

المحاضرة (١): المجموعات Sets

تعريف المجموعة: -

-المجموعة هي تجمّع من الأشياء أو العناصر المحددة تماما وقد تكون هذه الأشياء أعدادا أو أشخاصا أو أحداثا أو أي شيء آخر.

نرمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل:

A, B, C، ...

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر ونرمز للعناصر بواسطة حروف صغيرة مثل:

a, b, c، ...

-أرقام العدد ٢٦٣٤ تعبير يدل على مجموعة لأنه محدد وعنصره هي. {٢، ٦، ٣، ٤}

٢) شهور السنة الميلادية تعبير يدل على مجموعة لأنه محدد تبدأ من يناير إلى ديسمبر.

٣) الفاكهة اللذيذة تعبير لا يدل على مجموعة لأنه غير محدد حيث أن الفاكهة اللذيذة بالنسبة للشخص قد تكون غير لذيذة بالنسبة للشخص آخر.

٤)الأعداد الطبيعية الأقل من ٦. {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

-يستخدم الرمز ∈ "ينتمي إلى" ليبين عناصر المجموعة فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A و يكتب بالصورة $a \in A$

أما إذا كان a ليس عنصراً من عناصر المجموعة A فإننا نقول أن العنصر a "لا ينتمي إلى" المجموعة A ويكتب على الصورة $a \notin A$

طريقة كتابة المجموعات:

طريقة العد (سرد العناصر): -

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة، أو جزء منها، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة " ، " :-

مثال: -

$A = \{1, 5, 10, 15\}$

$B = \{a, b, c, d\}$

$C = \{1, 2, 3, \ldots\}$،

(وهي مجموعة منتظمة تسير بنفس الشكل ١ ٢ ٣ ٤وهكذا)

$A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

(وهي مجموعة مغلقة ولكن المساحة لا تكفي لكتابة من ١ إلى ١٠٠ وسوف نستخدم النقاط للتعبير عن بعض العناصر).

طريقة القاعدة (الصفة المميزة): -

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة. فمثلاً:

A = {x : x عدد فردي}

B = {x : x كلية بجامعة الملك فيصل}

C = {x : x طالب بنظام التعليم عن بعد}

D = {x : $-3 \le x \le 1$ x عدد صحيح}

X = {x : $0 \le x \le 12$ x عدد صحيح}

أنواع المجموعات: -

المجموعة الخالية (empty set) :-

هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ (فاي) أو { } .

أمثلة: -

$A=\{x:$ x عدد زوجي وفردي $\}$

$B=\{x:$ x دولة عربية تقع في أوروبا $\}$

المجموعة المنتهية (finite set):-

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة.

مثال:

المجموعات التالية هي مجموعات منتهية.

$A=\{2,4,6,8\}$

$B=\{1,2,3,........,100\}$

$C=\{x,y,s,t,u\}$

المجموعة غير المنتهية (Infinite set):-

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة (وهي المجموعة التي لا يمكن تحديد عناصرها بشكل دقيق)

مثال:

المجموعات التالية هي مجموعات غير منتهية.

$A=\{x:$ x عدد طبيعي فردي $\}$

$B=\{10, 20, 30,......... \}$

المجموعة الكلية (Universal set):-

وهي مجموعة كل العناصر قيد الدراسة ويرمز لها بالرمز U وتعطى ضمن السؤال أو الدراسة.

مثال:

$U=\{x:$ x أستاذ أو طالب بجامعة الملك فيصل $\}$

المجموعة الجزئية (Subset):-

تكون A مجموعة جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B وتكتب على الصورة: $A\subset B$ وتقرأ A جزء من B.

مثال:

1- إذا كانت المجموعة $A=\{2,4,6\}$ و $B=\{1,2,3,4,5,6\}$ فإن $A\subset B$.

2- المجموعة المكونة من جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة.

تساوي المجموعات: -

تكون المجموعتان A و B متساويتان إذا كانت: -

$A\subseteq B\ ,\ B\subseteq A \quad \gg\gg\gg\gg\gg \quad A=B$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرها وتكتب على الصورة $A\equiv B$

مثال:-

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية؟

1- $A=\{1,5,7,9\}$, $B=\{9,7,5,1\}$

2- $A=\{2,5,9\}$, $B=\{a,s,d\}$

الحل:-

$1-A=B$

$2-A\equiv B$

العمليات على المجموعات:-

الاتحاد:-

اتحاد المجموعتين A و B (A U B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما .

مثال:-

إذا كان A = {1 , 2 , 3 , 7} و B = {2 , 4 , 6 , 8} أوجد (AUB) ؟

الحل:-

(AUB) = {1 ,2 , 3, 4, 5, 6, 7, 8}

التقاطع:-

تقاطع المجموعتين A و B (A⋂B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A و في B معاً أي العناصر المشتركة بين A و B .

مثال:-

إذا كان A = {-1 , 0 , 1 , 2 , 3} و B = {0,2,4,6,} أوجد A ⋂ B

الحل:-

(A ⋂ B) = {0 , 2}

المكملة أو المتممة:-

يقال إن $\bar{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A.

مثال:-

إذا كان U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} و A = {2,4,6,8,10} أوجد $\bar{A}$.

الحل:-

$\bar{A}$ = {1,3,5,7,9}

الفرق:-

إذ كانت مجموعتان A و B فإن A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة في A وليست في B.

مثال:-

إذا كانت A = {1,2,3,x,y} و B = {3,4,5,x,w} أوجد A-B

الحل:-

A-B = {1 , 2 , y}

مثال:-

إذا كانت

A={1,2,3,x,y} و

B={3,4,5,x,w}

والمجموعة الكلية

U = {1,2,3,4,5,w,x,y,z}

فأوجد:-

1- A∪B

2- A ∩ B

3- B – A

4- $\bar{A}$

5- $\bar{B}$

6- $\bar{A} \cup \bar{B}$

7- $\bar{A} \cap \bar{B}$

8- $\bar{A} \cup A$

9- $\bar{A} \cap A$

1- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, w\}$

2- $A \cap B = \{3, X\}$

3- $B - A = \{4, 5, w\}$

4- $\bar{A} = \{4, 5, w, z\}$

5- $\bar{B} = \{1, 2, y, z\}$

6- $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, 4, 5, y, w, z\}$

7- $\bar{A} \cap \bar{B} = \{z\}$

8- $\bar{A} \cup A = U$

9- $\bar{A} \cap A = \{\ \}$

مجموعات الاعداد: -

أ - مجموعة الأعداد الطبيعية (Natural numbers) :

وهي أصغر مجموعات الأعداد وتسمى أيضا مجموعة العد وتحتوي على الأعداد الصحيحة الموجبة.

$N=\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

ب - مجموعة الأعداد الصحيحة (Integer numbers) :

هي مجموعة الأعداد الموجبة والسالبة بالإضافة إلى الصفر.

$I=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

ج - مجموعة الأعداد النسبية (Rational numbers) :

العدد النسبي هو العدد الذي يكتب على الصورة $\frac{a}{b}$ بحيث $a,b \in I$ ، $b \neq 0$ وتحوي على الأعداد الصحيحة بالإضافة إلى الكسور مثل

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{8}{10}, \frac{9}{1}, \frac{14}{1}, \ldots\ldots\ldots$$

ويرمز لها بالرمز Q .

د - مجموعة الأعداد غير النسبية (Irrational numbers) :

العدد الغير النسبي هو العدد الذي لا يمكن كتابه على الصورة $\frac{a}{b}$ بحيث $a,b \in I$ ، $b \neq 0$ مثل جذور الأعداد التي ليست مربع كامل.

$$\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{20}, \ldots\ldots$$

ج - مجموعة الأعداد الحقيقية (Real numbers) :

وتحوي مجموعة الأعداد النسبية وغير النسبية ويرمز لها بالرمز R. وتمثل بخط مستقيم يسمى خط الأعداد حيث يمتد من طرفيه من ∞- إلى ∞ ومنتصفه تكون نقطة الصفر وعلى يسار الصفر الأعداد السالبة وعلى يمينه الأعداد الموجبة كالاتي

$$-\infty \longleftarrow \quad - \quad 0 \quad + \quad \longrightarrow \infty$$

وأي جزء من هذا الخط يكون مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية و يسمى فترة ((Interval).

الفترة: -

تعرف الفترة كما ذكرنا سابقا بأنها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية وهي الأعداد التي تمتد من النقطة a إلى النقطة b وتكتب حسب نوعها كالاتي:

1- الفترة المفتوحة: $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$

2- الفترة نصف المغلقة: $[a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$

3- الفترة المغلقة: $[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$

مثال: -

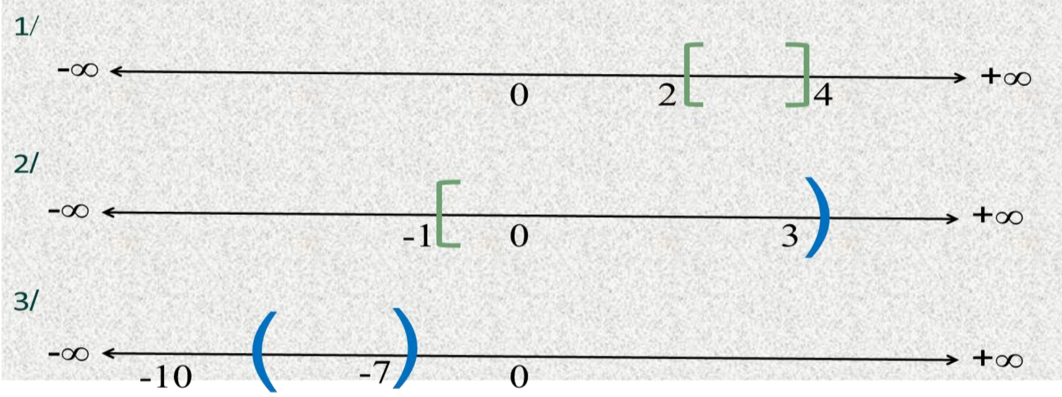
مثل الفترات التالية على خط الأعداد:

1- $[2, 4]$

2- $[-1, 3)$

3- $(-10, -7)$

الحل:



مثال :-

إذا كانت الفترات $B = [1, 4]$ و $A = [-2, 3)$ فأحسب ما يلي:

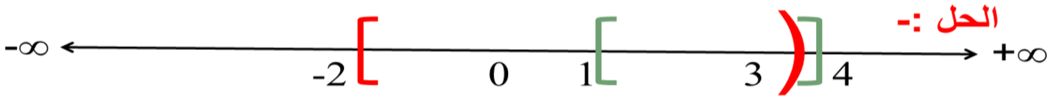
1- $A \cap B$

2- $A \cup B$

3- $A - B$

4- $B - A$

الحل :-



1- $A \cap B = [1, 3)$

2- $A \cup B = [-2, 4]$

3- $A - B = [-2, 1)$

4- $B - A = [3, 4]$

المحاضرة (٢): المجموعات والاقترانات

أولاً: تابع المجموعات: مجموعة المجموعات: -

مجموعة المجموعات لأية مجموعة منتهية S هي المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية Ø و المجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز P(S).

مثال: -

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة S = {a , b , c}

الحل: -

P(s) = { {a} , {b} , {c} , {a,b} , {a,c} , {b,c} , {a,b,c} , Ø }

مجموعة المجموعات: -

ملاحظة: إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر، فان عدد عناصر P(S) يساوي 2^n .

مثال: -

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة S = { x , w , z }

الحل: -

عدد عناصر P(S) يساوي $2^3 = 8$

P(S) = { {x} , {w} , {z} , {x,w} , {x,z} ,{w,z} , {x,w,z} , Ø }

تمارين :-

- وضح أي من هذه المجموعات هي مجموعة خالية أو مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية: -

- A ={x: عدد سالب وموجب x}
- B = {3 ,6 ,9 ,12 }
- C = {x: دولة أوربية تقع في شبة الجزيرة العربية x }
- D = { 2 , 4 , 6 , ……..,100}
- E = { 100 , 200 , 300 ,……..}
- F = { w , e , r , t }

-2 إذا كانت A = {3 , 5 , 7 } و B = { 1,2,3,4,5,6,7,8} فهل يمكن القول أن $A \subset B$ ؟

-3 أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- A = {5 ,10,15,20} , B = {15,10,5, 20}

2- A = { 20,50,70} , B = { k , d , u }

-4 إذا كانت A={8,10,12,r,m} و B={4,6,10,o,r}

أوجد المجموعة الكلية ثم أوجد: -

1- $A \cup B$
2- $A \cap B$
3- $B - A$
4- $\overline{A}$
5- $\overline{B}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B}$
8- $\overline{A} \cup A$
9- $\overline{A} \cap A$

5- أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{2 , 5 , 8\}$؟

6- إذا احتوت المجموعة S على 5 من العناصر، فأوجد عدد عناصر $P(S)$ ؟

ثانياً: الاقترانات (الدوال) Functions :-

يعرف الاقتران f بأنه قاعدة (rule) تعطي قيمة وحيدة (unique value) كنتيجة لتعويض قيمة المتغير x فيه وتمثل هذه القيمة أو النتيجة قيمة y المقابلة لقيمة x المستخدمة بالتعويض. أي أن:

$$f : A \longrightarrow B$$

$$x \longmapsto f(x)$$

ملاحظة: إذا كان f اقتران من A إلى B فإن A يسمى مجال الاقتران ويسمى B بالمجال المقابل كما تسمى مجموعة الصور بالمدى.

حتى يكون f اقتران لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال صورة وصورة واحدة فقط في المجال المقابل.

١- اقتران كثير الحدود: ويكون على الصورة: -

$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_1x + a$

وتكون درجة كثير الحدود بقيمة أعلى أس لـ (x)في الاقتران.

مثال: -

ما هي درجة كل من الاقترانات كثيرة الحدود التالية: -

1- $f(x) = 3$

2- $f(x) = 3x – 4$

3- $f(x) = x^2 - x + 1$

4- $f(x) = x^3 + x^7 + 5x – 7$

5- $f(x) = 2 – 3 x + x^3$

1- $f(x) = 3$

الدرجة الصفرية ويسمى أيضاً اقتران ثابت.

2- $f(x) = 3x – 4$

الدرجة الأولى ويسمى اقتران خطي.

3- $f(x) = x^2 - x + 1$

الدرجة الثانية أو اقتران تربيعي.

4- $f(x) = x^3 + x^7 + 5x – 7$

الدرجة السابعة.

5- $f(x) = 2 – 3 x + x^3$

الدرجة الثالثة أو اقتران تكعيبي.

العمليات الحسابية على كثيرات الحدود:

1- الجمع و الطرح: -

يتم جمع أو طرح كثيرات الحدود بجمع أو طرح معاملات المتغيرات المتشابهة الأسس.

مثال (1): -

1-$(3x^3 – 4x^2 + 6) + (x^4 – 2 x^3 – 4 x + 3)$

الحل: -

$$(3x^3 - 4x^2 + 6) + (x^4 - 2x^3 - 4x + 3) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 9$$

مثال (2): -

$$2\text{- } (6x^5 + 3x^3 - 4x + 5) - (3x^5 + x^4 - 2x^2 - 4x + 7)$$

الحل: -

$$(6x^5 + 3x^3 - 4x + 5) - (3x^5 + x^4 - 2x^2 - 4x + 7) = 3x^5 - x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 2$$

2- الضرب: -

يتم ضرب كثيري حدود $f(x)$، $h(x)$ بضرب كل حد من حدود $f(x)$ بكافة حدود $h(x)$.

مثال (1):

اذا كان $f(x) = (3x^2 - 5x + 4)$ ، وكان $h(x) = (x^2 + 2x - 1)$ فجد $(f.h)(x)$.

الحل: -

$$\begin{aligned}(f.h)(x) &= (3x^2 - 5x + 4)(x^2 + 2x - 1)\\ &= 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 5x^3 - 10x^2 + 5x + 4x^2 + 8x - 4\\ &= 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 13x - 4\end{aligned}$$

مثال (2):

إذا كان $f(x) = (2x^2 + 3x)$، وكان $h(x) = (x^3 + 5x - 8)$ فجد $(f.h)(x)$.

الحل: -

$$\begin{aligned}(f.h)(x) &= (x^3 + 5x - 8)(2x^2 + 3x)\\ &= 2x^5 + 10x^3 - 16x^2 + 3x^4 + 15x^2 - 24x\\ &= 2x^5 + 3x^4 + 10x^3 - x^2 - 24x\end{aligned}$$

3- القسمة: -

يتم قسمة كثيري حدود باستخدام خوارزمية القسمة الطويلة.

مثال (1):

اذا كان $f(x) = (x4 – 3 x2 + 5)$ ، وكان $h(x) = (x2 – 4)$ فجد $f(x) \div h(x)$.

الحل: -

$$\begin{array}{r|l} & X^2 + 1 \\ \hline X^2 - 4 & X^4 - 3X^2 + 5 \\ & -X^4 + 4X^2 \\ \cline{2-2} & X^2 + 5 \\ & -X^2 + 4 \\ \cline{2-2} & 9 \end{array}$$

ويكون ناتج القسمة x2 +1 وباقي القسمة 9.

مثال (2):

اذا كان $f(x) = (5x^5 + 10x^3)$ ، وكان $h(x) = (x^3)$ فجد $f(x) \div h(x)$.

الحل: -

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^2+10 \\
\hline
x^3 & 5x^5 + 10x^3 \\
 & 5x^5 \\
\cline{2-2}
 & 10x^3 \\
 & 10x^3 \\
\cline{2-2}
 & -
\end{array}
$$

ويكون ناتج القسمة $5x^2 + 10$ وباقي القسمة 0.

المحاضرة (٣): تابع الاقترانات

٢- الاقتران النسبي: -

الاقتران النسبي هو اقتران مكون من كثيري حدود على شكل بسط ومقام على الصورة كثير الحدود.

$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$, $h(x)\neq 0$, $g(x)$, $h(x)$ كثيري حدود

مثال: -

ما هو مجال كل من الاقترانات النسبية التالية: -

1- $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

2- $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

3- $f(x)=\frac{2x-3}{x^2-4}$

الحل: -

1- $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

يكون الاقتران النسبي معرف على الاعداد الحقيقية عدا اصفار المقام وفي هذ الاقتران لا يوجد عدد حقيقي يجعل المقام صفر إذاً مجال الاقتران R .

2- $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

نساوي المقام بالصفر فيكون (X-1 = 0) إذاً X=1 إذا المجال $R\setminus\{1\}$

3- $f(x)=\frac{2x-3}{x^2-4}$

نساوي المقام بالصفر فيكون ($X^2-4=0 \rightarrow X^2=4$) إذاً $X=\pm 2$ إذا المجال $R\setminus\{-2,2\}$.

العمليات الحسابية على الاقترانات النسبية: -

1- الجمع والطرح: -

توحد المقامات كما في الأعداد.

مثال (1): اوجد ناتج ما يلي:

- $\frac{X+1}{2X-5}+\frac{3X+1}{X-2}$

الحل: -

- $\frac{X+1}{2X-5}+\frac{3X+1}{X-2}=\frac{(X+1)(X-2)}{(2X-5)(X-2)}+\frac{(3X+1)(2X-5)}{(X-2)(2X-5)}$
$=\frac{(X^2-X-2)+(6X^2-13X-5)}{(X-2)(2X-5)}$
$=\frac{7X^2-14X-7}{2X^2-9X+10}$

مثال (2): اوجد ناتج ما يلي: -

- $\frac{X}{3X+2}+\frac{5X^2+2}{2X-2}$

الحل: -

- $\frac{X}{3X+2}+\frac{5X^2+2}{2X-2}=\frac{(X)(2X-2)}{(3X+2)(2X-2)}+\frac{(5X^2+2)(3X+2)}{(2X-2)(3X+2)}$
$=\frac{(2X^2-2X)+(15x^3+10X^2+6X+4)}{(3X+2)(2X-2)}$
$=\frac{15X^3+12X^2+4X+4}{6X^2-2X-4}$

2- الضرب :-

نضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

مثال (1):-

$$\frac{2X+3}{X+1}\times\frac{X-2}{3X+4}$$

الحل:-

$$\frac{2X+3}{X+1}\times\frac{X-2}{3X+4}=\frac{(2X+3)(X-2)}{(X+1)(3X+4)}=\frac{2X^3-X-6}{3X^2+7X+4}$$

مثال (2):-

$$\frac{X^2+10}{2X+5}\times\frac{3X-5}{X+2}$$

الحل:-

$$\frac{X^2+10}{2X+5}\times\frac{3X-5}{X+2}=\frac{(X^2+10)(3X-5)}{(2X+5)(X+2)}=\frac{3X^3-5X^2+30X-50}{2X^2+9X+10}$$

3- القسمة :-

نحول عملية القسمة إلى عملية ضرب بقلب الكسر الثاني.

مثال:-

$$\frac{3X+2}{X^2+1}\div\frac{X+5}{X^2}$$

الحل:-

$$\frac{3X+2}{X^2+1}\div\frac{X+5}{X^2}=\frac{3X+2}{X^2+1}\times\frac{X^2}{X+5}$$

$$=\frac{3X^3+2X^2}{X^3+5X^2+X+5}$$

٣- الاقتران الأسي: -

الاقتران الأسي هو اقتران مجاله الأعداد الحقيقية ومجاله المقابل الاعداد الحقيقية الموجبة، أي أن:

$$f: R\longrightarrow R^+$$

$$x\longmapsto f(x)=a^x$$

حيث a عدد حقيقي موجب. يسمى a: الأساس، x: الاس. ومن الأمثلة على الاقترانات الاسية:

- $f(x)=10^x$
- $f(x)=e^x$
- $f(x)=2^x$

-اذا كان الاساس e فان الاقتران يسمى اقتران الاس الطبيعي.

- اذا كان الاساس يساوي 10 فان الاقتران يسمى الاس العشري.

الحل: -

1) $\frac{(2^3)\sqrt[3]{4^7}}{(2^2)\sqrt[3]{4}}=\frac{(2^3)(4^{\frac{7}{3}})}{(2^2)(4^{\frac{1}{3}})}$

$=2^{3-2}.\ 4^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}}$

$=2^1.\ 4^{\frac{6}{3}}$

$=2\ .\ 4^2$

$=2.4^2$

$=2\times16$

$=32$

2) $\frac{2(\sqrt{3})(\sqrt{8})(3^4)}{9(\sqrt{6})((4^2)} = \frac{2.3^{\frac{1}{2}}.8^{\frac{1}{2}}.3^4}{9.6^{\frac{1}{2}}.4^2}$

$= \frac{2.3^{\frac{1}{2}}.(4.2)^{\frac{1}{2}}.3^4}{(3.3)(2.3)^{\frac{1}{2}}.4^2}$

$= \frac{2.3^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}}.4^{\frac{1}{2}}.3^4}{3^2.2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}}.4^2}$

$= \frac{2.2.3^4}{3^2.2^4} = 2^{2-4}.3^{4-2}$

$= 2^{-2}.3^2 = \frac{9}{4}$

3) $\frac{(e)(\sqrt{e})(e^{2x})}{(e^x)(e^x)^{-3}(e)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e.e^{\frac{1}{2}}.e^{2x}}{e^{-2x}.e^{\frac{2}{3}}}$

$= \frac{e^{\frac{3}{2}}.e^{2x}}{e^{-2x}.e^{\frac{3}{2}}}$

$= \frac{e^{2x}}{e^{-2x}}$

$= e^{2x+2x}$

$= e^{4x}$

مثال:(2) -

حل المعادلات الاسية التالية:

1) $3^{2x-1} = 243$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{16}$

الحل: -

1) $3^{2x-1} = 243 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^5$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = 5$

$\Longrightarrow 2x = 6$

$\Longrightarrow x = \frac{6}{2}$

$\Longrightarrow x = 3$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$

$\Rightarrow x = \pm 2$

المحاضرة (٤): المعادلات والمتباينات

أولاً: المعادلات: -

يحتل موضوع المعادلات مكانه كبيرة في علم الرياضيات وهو من أقدم المواضيع التي طرحت للبحث، وفي هذه الوحدة سنتطرق إلى حل المعادلات الخطية والتربيعية بالإضافة إلى حل انظمة المعادلات، نظام معادلتين بمجهولين، ويقصد بحل المعادلة هي ايجاد قيمة المتغير أو المتغيرات الموجودة في المعادلة.

أ – حل المعادلات الخطية: -

إن المعادلة الخطية هي معادلة في متغير واحد ومن الدرجة الاولى أي أن أكبر أس في المعادلة هو واحد والشكل العام للمعادلة الخطية هو: -

$$ax + b = 0$$

مثال: - حل المعادلة الخطية التالية:

$$2x - 3 = 0$$

الحل: -

$$2x - 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

ب – حل المعادلة التربيعية: -

والمعادلة التربيعية يكون أكبر أس فيها هو أثنين وتأخذ الصورة: -

$$ax^2 + bx + c = 0$$

وهناك العديد من الطرق لحل هذه المعادلة ولكننا سوف نعتمد على القانون العام للحل، حيث أنه من أسرع هذه الطرق وأكثرها دقة ويأخذ القانون العام الشكل التالي: -

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويسمى المقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ وهو ما أسفل الجذر بالمميز.

وهناك ثلاث حالات للحل بهذه الطريقة وهي:

1 – الحالة الأولى: اذا كان المميز $(\Delta > 0)$ فيوجد حلين للمعادلة.

$$\left(x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

2 – الحالة الثانية: اذا كان المميز $(\Delta = 0)$ فيوجد حل وحيد للمعادلة.

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3 – الحالة الثالثة: اذا كان المميز $(\Delta < 0)$ فلا يوجد حل حقيقي للمعادلة.

مثال: - حل المعادلات التربيعية التالية:

1) $x^2 + 2x - 3 = 0$

2) $3x^2 - 4x + 5 = 0$

3) $x^2 - 2x + 1 = 0$

4) $x^2 - 5x + 3 = 0$

الحل: -

1) $x^2 + \ 2x \ - 3 = 0$

$a = 1. \ \ b = 2. \ \ c = -3$

$\Delta = (2)^2 \ - 4 \ \times 1 \ \times -3 = 16 \ > 0$

∴ يوجد حلين للمعادلة هما:

■ $x_1 = \dfrac{-b \ - \ \sqrt{\Delta}}{2a} \ = \dfrac{-2 \ - \ \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3$

■ $x_2 = \dfrac{-b + \ \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 + \ \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$

2) $3x^2 \ - 4x + 5 = 0$

$a = 3. \ \ b = -4. \ \ c = 5$

$\Delta = (-4)^2 \ - 4 \ \times 3 \ \times 5 = -44 \ < 0$

∴ لا يوجد حل حقيقي للمعادلة.

3) $x^2 \ - 2x + 1 = 0$

$a = 1. \ \ b = -2. \ \ c = 1$

$\Delta = (-2)^2 \ - 4 \ \times 1 \ \times 1 = 4 - 4 = 0$

∴ يوجد حل وحيد للمعادلة هو:

■ $x = \frac{-b}{2a} = \frac{--2}{2\times1} = \frac{2}{2} = 1$

4) $x^2 \ - 5 \ x + 3 = 0$

$a = 1. \ \ b = -5. \ \ c = 3$

$\Delta = (-5)^2 \ - 4 \ \times 1 \ \times 3 = 13 > 0$

∴ يوجد حلين للمعادلة هما:

■ $x_1 = \dfrac{-b \ - \ \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5) \ - \ \sqrt{13}}{2 \times 1} = \dfrac{5 \ - \ \sqrt{13}}{2}$

■ $x_2 = \dfrac{-b + \ \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5) + \ \sqrt{13}}{2 \times 1} = \dfrac{5 + \ \sqrt{13}}{2}$

جـ - حل أنظمة المعادلات الخطية: -

يكون الشكل العام لنظام المعادلات الخطية كالآتي:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

حيث m تمثل عدد المعدلات، n عدد المتغيرات.

ستكون دراستنا في هذه الوحدة متعلقة بحل نظام معادلتين بمجهولين وبطريقة الحذف.

يكون نظام معدلتين بمجهولين على الصورة:

$$\begin{gathered} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{gathered}$$

يمكن حل هذا النوع من المعادلات باستخدام طريقة الحذف، حيث نجعل معاملات أحد المتغيرين في المعادلتين نفس القيمة ولكن بإشارتين مختلفتين ثم نجمع المعادلتين ونجد منها قيمة المتغير الآخر ثم نعوض قيمته في أحدي المعادلتين ونجد قيمة المتغير الأول.

مثال 1:-

حل النظام التالي من المعادلات:

$$2x+3y=7 \quad (1)$$
$$3x+2y=8 \quad (2)$$

الحل:- نضرب المعادلة الأولى في (-2) والثانية في (3) لحذف المتغير y فتصبح المعادلتين:

$$-4x-6y=-14$$
$$9x+6y=24 \qquad \text{نجمع}$$
$$5x \quad =10$$
$$\Longrightarrow x=2$$

نعوض بقيمة x في المعادلة الثانية:

$$\Longrightarrow 3\times(2)+2y=8 \Longrightarrow 6+2y=8 \Longrightarrow 2y=2 \Longrightarrow y=1$$

مثال 2:-

حل النظام التالي من المعادلات:

$$3x+4y=9 \quad (1)$$
$$2x+3y=7 \quad (2)$$

الحل:- نضرب المعادلة الأولى في (-2) والثانية في (3) لحذف المتغير x فتصبح المعادلتين:

$$-6x-8y=-18$$
$$6x+9y=21 \qquad \text{نجمع}$$
$$y=3$$
$$\Longrightarrow y=3$$

نعوض بقيمة y في المعادلة الأولى:

$$\Longrightarrow 3x+4\times(3)=9 \Longrightarrow 3x+12=9 \Longrightarrow 3x=-3 \Longrightarrow x=-1$$

ثانياً: المتباينات:-

المتباينة هي أي عبارتين جبريتين يربط بينهما احدى ادوات الربط التالية (>) أقل من (<) أكبر من، ($\leq$) أكبر من أو يساوي، ($\geq$) أقل من أو يساوي ومن الأمثلة على المتباينات:

$$x<2$$
$$x+1\leq -3$$
$$x^2+2x+5\geq 0$$

تعريف: تسمى مجموعة كل قيم (x) التي يمكن أن نعوضها في المتباينة بغض النظر عن صحتها **بمجموعة التعويض**، وهذه المجموعة تعطى في السؤال وتكون عادة إحدى مجموعات الاعداد وفي كل امثلتنا في هذه الوحدة ستكون مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الحقيقية "R".

تعريف: تسمى مجموعة قيم x التي تجعل المتباينة صحيحة (أي التي تكون حلاً للمتباينة) **مجموعة الحل للمتباينة**.

مجموعة الحل تكون مجموعة جزئية من مجموعة التعويض.

مثال:-

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات التالية:

1- $3x-2>x+1$

2- $x2-5x\geq -6$

3- $x^3 + 3x^2 + 2x \leq 0$

4- $\frac{2x-1}{x+1} < 0 \quad .x \neq -1$

<u>الحل: -</u>

مجموعة الحل لأي متباينة تكون مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

1- $3x - 2 > x + 1$

$3x - x > 1 + 2$

$2x > 3$

$x > \frac{3}{2}$

∴ تكون مجموعة الحل هي الفترة المفتوحة $(\frac{3}{2} . \infty)$.

2- $x^2 - 5x \geq -6$

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$

$(x-3)(x-2) \geq 0$

نبحث في اشارة الاقتران عن طريق خط الاعداد وتكون اشارة الاقتران التربيعي عكس اشارة x^2 ما بين الجذرين ونفس إشارة x^2 خارج الجذرين.

∴ تكون مجموعة الحل للمتباينة هي $(-\infty . 2] \cup [3 . \infty)$.

3- $x^3 + 3x^2 + 2x \leq 0$

نأخذ x عامل مشترك

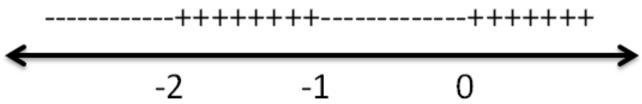
$x(x^2 + 3x + 2) \leq 0$

نحلل الدالة التربيعية داخل الاقواس

$x(x+2)(x+1) \leq 0$

فتكون جذور الاقتران هي {0 , -1 , -2}

نحدد اشارة الاقتران على خط الاعداد



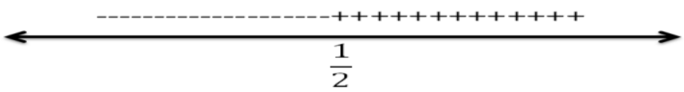
∴ تكون مجموعة الحل للمتباينة هي $(-\infty . -2] \cup [-1 . 0]$.

4- $\frac{2x-1}{x+1} < 0 \quad .x \neq -1$

في الاقترانات النسبية نحدد اشارة البسط واشارة المقام على خط الاعداد ثم نقسم الإشارات.

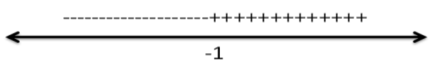
$2x - 1 < 0$ البسط

$x < \frac{1}{2}$



$x + 1 < 0$

$x < -1$ المقام



القسمة

تكون مجموعة الحل للمتباينة هي الفترة المفتوحة $(-1 , \frac{1}{2})$.

المحاضرة (٥): المتتاليات

المتتاليات: -

هي عبارة عن اقتران معرف من مجموعة الاعداد الطبيعية N إلى مجموعة الاعداد الحقيقية R وتكتب على الصورة:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1.\ a_2.\ a_3.\ ....\ a_n\ ...$$

وتسمى العناصر a_n .... $a_1.\ a_2.\ a_3$ بحدود المتتالية بينما يسمى الحد (a_n) الحد العام للمتتالية.

وتكتب المتتالية بدلالة حدها a_n.

مثال 1: -

اكتب الحدود الاربعة الأولى لكل من المتتاليات التالية:

1- $\left\{\frac{n^2}{2}\right\}$

2- $\{3n - n^3\}$

3- $\{2n + 4\}$

4- $\{2^n\}$

الحل: -

الحدود الاربعة الاولى هي $a_1 .\ a_2 .\ a_3 .\ a_4$

1- $a_1 = \frac{1}{2} .\ a_2 = 2 .\ a_3 = \frac{9}{2} .\ a_4 = 8$

2- $a_1 = 2,\ a_2 = -2, a_3 = -18.\ a_4 = -52$

3- $a_1 = 6,\ a_2 = 8,\ a_3 = 10.\ a_4 = 12$

4- $a_1 = 2,\ a_2 = 4, a_3 = 8.\ a_4 = 16$

مثال 2: -

أوجد الحد الخامس والحد الثامن للمتتالية:

$$\left\{\frac{n^2 + 1}{3n - 2}\right\}$$

الحل: -

الحد الخامس $a_5 = \frac{5^2+1}{3.5-2} = \frac{26}{13} = 2$

الحد الثامن $a_8 = \frac{8^2+1}{3.8-2} = \frac{65}{22}$

١- المتتالية الحسابية: -

المتتالية الحسابية هي المتتالية التي يكون الفرق بين أي حدين متتاليين فيها مقداراً ثابتاً يسمى أساس المتتالية ويرمز له بالرمز d.

أي إذا كانت $\{a_n\} = a_1.\ a_2.\ a_3.\ ...\ a_n$ متتالية حسابية فإن:

$$a_2 = a_1 + d \Rightarrow d = a_2 - a_1$$
$$a_3 = a_2 + d \Rightarrow d = a_3 - a_2$$
$$a_4 = a_3 + d \Rightarrow d = a_4 - a_3$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + d \Rightarrow d = a_n - a_{n-1}$$

مثال: -

أي المتتاليات التالية حسابية وإذا كانت فما هو اساسها:

1- $2.\ 4.\ 8.\ 16.\ \ldots$

2- $1.\ 4.\ 7.\ 10.\ \ldots$

3- $1.\ 4.\ 9.16.\ 25.\ldots$

4- $5.\ 3.\ 1.\ -1.\ \ldots$

5- $6.\ 6.\ 6.\ 6.\ 6.\ldots$

6- $1.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{3}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{5}.\ \ldots$

الحل: -

1- 2, 4, 8, 16,... (4 – 2 = 2, 8 – 4 = 4, الفرق ليس ثابت)

∴ ليست متتالية حسابية.

2- 1, 4, 7, 10,... (4 – 1 = 3, 7 – 4 = 3, الفرق ثابت)

∴ متتالية حسابية وأساسها يساوي 3.

3- 1, 4, 9, 16, 25,... (4 – 1 = 3, 9 – 4 = 5 , الفرق ليس ثابت)

∴ ليست متتالية حسابية.

4- $5.\ 3.\ 1.\ -1.\ \ldots \Rightarrow (3-5=-2.\ 1-3=-2.$ ثابت الفرق)

∴ متتالية حسابية وأساسها يساوي -2 .

5- $6.\ 6.\ 6.\ 6.\ 6.\ldots \Rightarrow (6-6=0.\ 6-6=0.$ ثابت الفرق)

∴ متتالية حسابية وأساسها يساوي 0 .

6- $1.\frac{1}{2}.\ \frac{1}{3}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{5}.\ \ldots \Rightarrow (\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}.$ ثابت ليس الفرق)

∴ ليست متتالية حسابية.

الحد العام للمتتالية الحسابية: -

اذا كانت (a_n) متتالية حسابية حدها الأول a_1 واساسها d فإن:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_1 + 4\,d$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

∴ الحد العام للمتتالية الحسابية هو:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مثال 1: -

أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول (2) وأساسها (5) ثم أوجد الحد الخامس عشر للمتتالية.

الحل: -

$$a_1 = 2$$
$$d = 5$$

∴ يكون الحد العام هو:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$= 2 + (n-1)(5)$$
$$\Rightarrow a_n = 5n - 3$$

الحد الخامس عشر:

$$\Rightarrow a_{15} = 5(15) - 3$$
$$= 75 - 3$$
$$= 72$$

مثال 2: -

أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول (-5) وأساسها (3) ثم أوجد الحد العاشر للمتتالية.

الحل: -

$$a_1 = -5$$
$$d = 3$$

∴ يكون الحد العام هو:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$= -5 + (n-1)(3)$$
$$\Rightarrow a_n = 3n - 8$$

الحد العاشر:

$$\Rightarrow a_{10} = 3(10) - 8$$
$$= 30 - 8$$
$$= 22$$

مثال 3: -

إذا علمت أن الحد الحادي عشر من متتالية حسابية يساوي 35 والحد الاول يساوي 5 أوجد أساس هذه المتتالية؟

الحل: -

$$a_1 = 5$$
$$d = ?$$
$$a_{11} = 35$$

∴ يكون الحد العام هو:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$\Rightarrow 35 = 5 + (11-1)d$$
$$\Rightarrow 30 = 10d$$
$$\Rightarrow d = \frac{30}{10} = 3$$

مثال 4: -

إذا علمت أن الحد السادس عشر من متتالية حسابية يساوي 85 وأساس هذه المتتالية يساوي 5 أوجد الحد الأول لهذ المتتالية ؟

الحل: -

$$a_1 = ?$$
$$d = 5$$
$$a_{16} = 85$$

∴ يكون الحد العام هو:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$\Rightarrow 85 = a_1 + (16-1)(5)$$
$$\Rightarrow 85 = 75 + a_1$$
$$\Rightarrow a_1 = 85 - 75$$
$$= 10$$

مثال 5: -

أوجد الحد العام لكل من المتتاليات الحسابية التالية:

1- $3.\ 6.\ 9.\ 12.\ \ldots$

2- $10.\ 8.\ 6.\ 4.\ \ldots$

3- $1,\frac{3}{2}\ .\ 2.\frac{5}{2}.\ 3\ .\ \ldots$

الحل: -

نجد في البداية الحد الأول والأساسي للمتتالية ثم نعوض في قانون الحد العام.

1- $a_1 = 3.\ \ d = 3$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + (\,n\, - 1\,)d$$

$$= 3 + (n - 1\,)(3)$$
$$= 3 + \ 3n\, - 3$$
$$= 3n$$

2- $a_1 = 10.\ \ d = -2$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + (n\, - 1)d$$

$$= 10 + (n - 1)(-2)$$
$$= 10 - 2n + 2$$
$$= 12 - 2n$$

نجد في البداية الحد الأول والأساسي للمتتالية ثم نعوض في قانون الحد العام.

3- $a_1 = 1\ .\ \ d = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + (\,n\, - 1\,)d$$

$$= 1 + (n - 1\,)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= 1 + \ \frac{1}{2}n\, - \frac{1}{2}$$
$$= \ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n$$
$$= \ \frac{n+1}{2}$$

مجموع أول n حد من الحدود للمتتالية الحسابية: -

أول n حد من حدود هو:

$a_1\ .\ a_2\ .\ \ldots\ldots\ldots.\ a_n$

ومجموعها هو:

$$S_n = \ a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots\ldots\ldots + a_n$$

$$\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + a_3\ \ + \ \ldots\ldots + a_n$$
$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \ \ldots\ldots + (a_1 + (n - 1)d)$$
$$= na_1 + d + 2d\ \ + 3d \ldots\ldots + (n - 1)d$$
$$= na_1 + d\big(1 + 2\ \ + 3 + \ \ \ldots\ldots + (n - 1)\big)$$
$$= \ na_1 + d\frac{n(n-1)}{2}$$
$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2\,a_1 + (n - 1)d)$$
$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + \ (n - 1)d)$$
$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال 1: -

متتالية حسابية حدها الأول يساوي (-3)، واساسها (4) أوجد مجموع أول (20) حد منها.

الحل:-

$$a_1 = -3 \,.\ \ d = 4$$
$$S_n = \frac{n}{2}(2\,a_1 + (n-1)d)$$
$$\Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}\,(2(-3) + (19)(4))$$

= 10 (-6 + 76)

= (10) (70)

= 700

مثال 2: -

متتالية حسابية عدد حدودها (16) حدها الأول (3) وحدها الأخير (39) احسب مجموعها.

الحل: -

$$a_1 = 3 \ \ .\ \ a_{16} = 39 \ \ .\ \ n = 16$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$\Rightarrow S_{16} = \frac{16}{2}\,(3 + 39)$$
$$= (8)\,(42)$$
$$\Rightarrow S_{16} = 336$$

مثال 3: -

أوجد المجموع التالي:

$$\sum_{n=1}^{12}(5n - 1)$$

الحل:-

هذا المجموع يمثل مجموع متتالية حسابية عدد حدودها (12) حدها الأول (4) واساسها (5).

$$\Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}\big(2(4) + 11(5)\big) = 378$$

مثال 4: -

متتالية حسابية حدها الأول (6) وحدها الأخير (66) ومجموع حدودها 252 أوجد عدد حدودها.

الحل: -

نطبق القانون

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(6 + 66) = 252$$
$$\frac{n}{2}(72) = 252$$
$$n(36) = 252$$
$$\Rightarrow n = 7$$

المحاضرة (٦): تابع المتتاليات

٢- المتتالية الهندسية: -

المتتالية الهندسية هي المتتالية التي تكون فيها النسبة بين أي حدين متتالين ثابتة تسمى اساس المتتالية ويرمز لها بالرمز r.

أي: إذا كانت $\{a_n\} = a_1 \,.\, a_2 .\, a_3 \,.\, \ldots\ldots\ldots .\, a_n$

متتالية هندسية فإن:

$$a_2 = a_1\, r \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{a_2}{a_1}$$
$$a_3 = a_2\, r \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{a_3}{a_2}$$
$$a_4 = a_3\, r \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{a_4}{a_3}$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1}\, r \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

مثال:-

أي من المتتاليات التالية هندسية وإذا كانت ما هو أساسها.

1 - 1, 4, 9, 16, 25, ...

2 - 2, 4, 8, 16, 32, ...

3 - 2, 4, 6, 8, 10, ...

4 - $1, \frac{1}{3} .\ \frac{1}{9} .\ \frac{1}{27} .\ \frac{1}{8}\ .\ \ldots$

5 - 1, -1, 1, -1, 1, -1. ...

الحل: -

1 - 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , ...

$$\frac{4}{1} = 4 \quad . \quad \frac{9}{4} = 2.25$$

∴ ليست متتالية هندسية.

2 - 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ...

$$\frac{4}{2} = 2 \ .\ \frac{8}{4} = 2 \ .\ \frac{16}{8} = 2$$

∴ متتالية هندسية واساسها 2.

3 - 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ...

$$\frac{4}{2} = 2 \ .\ \frac{6}{4} = 1.5$$

∴ ليست متتالية هندسية.

4 - $1, \frac{1}{3} .\ \frac{1}{9} , \frac{1}{27} . \frac{1}{8}\ .\ \ldots$

$$\frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} \quad . \quad \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \ .\ \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

∴ متتالية هندسية واساسها $\frac{1}{3}$.

5 - 1, -1, 1, -1, 1, -1 . ....

$$-\frac{1}{1} = -1 \ .\ \frac{1}{-1} = -1 \ .\ -\frac{1}{1} = -1$$

∴ متتالية هندسية واساسها -1.

إذا كانت ... $\{a_n\} = a_1 \,.\, a_2 \,.\, \ldots .\, a_n$ ... متتالية هندسية حدها الأول (a_1) واساسها r فإن:

$$a_2 = a_1\, r$$
$$a_3 = a_2\, r = a_1\, r^2$$
$$a_4 = a_3\, r = a_1\, r^3$$
$$a_5 = a_1\, r^4$$
$$\vdots$$

الحد العام للمتتالية:

$$\boxed{a_n = a_1\, r^{n-1}}$$

مثال 1:-

متتالية هندسية حدها الأول (1) واساسها (2) أوجد حدها العام.

الحل: -

$$a_n = 1 \,.\; r = 2$$
$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$
$$= (1)(2)^{n-1}$$
$$\Rightarrow a_n = 2^{n-1}$$

مثال 2: -

أوجد الحد العام لكل من المتتاليات الهندسية التالية:

1- 4 , 16 , 64 , 256 , ...

2- $1 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{4} \,.\, \frac{1}{8} \,.\, \frac{1}{16} \;.\; \ldots$

3- -1 , 1 , -1 , 1 , -1 ,...

الحل: -

1- 4 , 16 , 64 , 256 , ...

$$a_1 = 4.\;\; r = 4$$
$$\Rightarrow a_n = a_1\, r^{n-1}$$
$$= (4)(4)^{n-1}$$
$$\Rightarrow a_n = 4^n$$

2- $1 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{4} \,.\, \frac{1}{8} \,.\, \frac{1}{16} \;.\; \ldots$

$$a_1 = 1.\;\; r = \frac{1}{2} \;\; \Rightarrow a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$= (1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

3- $-1 , 1 , -1 , 1 , -1$,...

$$a_1 = -1 \;.\; r = -1 \Rightarrow a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$= (-1)(-1)^{n-1}$$
$$\Rightarrow a_n = (-1)^n$$

مثال 3: -

متتالية هندسية حدها الرابع (5)، وحدها السابع $\left(\frac{1}{25}\right)$ أوجد حدها الأول والاساس.

الحل: - الحد العام للمتتالية الهندسية هو:

$$a_n = a_1\, r^{n-1},\ a_4 = a_1\, r^3 = 5,\ a_7 = a_1 r^6 = \frac{1}{25}$$

بالقسمة $\frac{a_7}{a_4} \Leftarrow \frac{\left(\frac{1}{25}\right)}{5}$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} \Rightarrow r = \frac{1}{5}$$

نعوض في معادلة a_4 لإيجاد a_1

$$a_1\, r^3 = 5 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 5 \Rightarrow a_1\left(\frac{1}{125}\right) = 5 \Rightarrow a_1 = 625$$

مثال 4: - متتالية هندسية حدها السادس 1215، وحدها العاشر 98415 أوجد حدها الأول والاساس.

الحل: -

الحد العام للمتتالية الهندسية هو:

$$a_n = a_1\, r^{n-1},\ a_6 = a_1\, r^5 = 1215,\ a_{10} = a_1 r^9 = 98415$$

بالقسمة $\frac{a_{10}}{a_6} \Leftarrow = \frac{98415}{1215} \frac{a_1 r^9}{a_1 r^5}$

$$\Rightarrow r^4 = 81 \Rightarrow r = \sqrt[4]{81} \Rightarrow r = 3$$

نعوض في معادلة a_6 لإيجاد a_1

$$a_1\, r^5 = 1215 \Rightarrow a_1 (3)^5 = 1215 \Rightarrow a_1\, 243 = 1215$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1215}{243} = 5$$

مثال 5:-

متتالية هندسية حدها الأول (2) وحدها الأخير (486) واساسها (3) أوجد عدد حدودها.

الحل: -

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$\Rightarrow 486 = (2)(3)^{n-1}$$
$$\Rightarrow (3)^{n-1} = \frac{486}{2}$$
$$\Rightarrow (3)^{n-1} = 243$$
$$\Rightarrow (3)^{n-1} = (3)^5$$
$$\Rightarrow n - 1 = 5$$
$$\therefore n = 6$$

مثال 6:- متتالية هندسية حدها الأول (4) وحدها الأخير (2048) واساسها (2) أوجد عدد حدودها.

الحل: -

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$\Rightarrow 2048 = (4)(2)^{n-1}$$
$$\Rightarrow (2)^{n-1} = \frac{2048}{4} = 512$$
$$\Rightarrow (2)^{n-1} = (2)^9$$
$$\Rightarrow n - 1 = 9$$
$$\therefore n = 10$$

مجموع أول (n) حد من حدود المتتالية الهندسية: -

مجموع أول n حد من المتتالية الهندسية التي حدها الأول a_1 وأساسها r هو:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$
$$\Rightarrow S_n = \ a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} \ldots (1)$$

بالضرب في r تصبح

$$r\, S_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بالطرح (1) من (2) تصبح

$$r\, S_n - S_n \ = (a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^n)$$
$$-(a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots \quad + a_1 r^{n-1})$$

نختصر الحدود المتشابهة تصبح

$$r\, S_n \ - S_n = a_1 r^n \ \ a_1 \Rightarrow S_n\,(r-1) = a_1\,(r^n - 1)$$

∴ مجموع أول n حد هو:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(\,r^n \ - 1\,)}{r-1}}$$

مثال 1:-

متتالية هندسية حدها الأول (8) وأساسها (2) احسب مجموع أول خمسة حدود منها.

الحل: -

$$a_1 = 8\ .\ \ r = 2$$
$$\Rightarrow S_5 = \frac{a_1(r^5 - 1)}{r-1}$$
$$= \frac{(8)(2^5-1)}{r-1}$$
$$= 8(32 - 1)$$
$$= 248$$

مثال 2:-

متتالية هندسية حدها الأول (10) وأساسها (5) احسب مجموع أول ثمانية حدود منها.

الحل:-

$$a_1 = 10\ ,\ \ r = 5$$
$$\Rightarrow S_8 = \frac{a_1(r^8 - 1)}{r-1}$$
$$= \frac{(10)(5^8-1)}{5-1}$$
$$= \frac{(10)(390625-1)}{4}$$
$$= 976560$$

مثال 3: -

أوجد المجموع التالي:

$$\sum_{n=1}^{7} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

الحل: -

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (1) واساسها $\left(\frac{1}{4}\right)$ والمطلوب ايجاد مجموع أول سبعة حدود.

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$
$$S_7 = \frac{1\left(\left(\frac{1}{4}\right)^7 - 1\right)}{\frac{1}{4}-1} = \left(\frac{1}{4^7} - 1\right)\left(\frac{4}{-3}\right) = \left(\frac{1}{16384} - 1\right)\left(\frac{4}{-3}\right) = -\frac{16383}{16384} \times \frac{4}{-3}$$
$$S_7 = -\frac{10922}{8192}$$

مثال 4: -

أوجد المجموع التالي:

$$\sum_{n=1}^{10}(5)^{n-1}$$

الحل: -

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (1) واساسها (5) والمطلوب ايجاد مجموع أول عشر حدود.

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$
$$S_{10} = \frac{1((5)^{10} - 1)}{5-1}$$
$$= 2441406$$

تطبيقات المتتالية في حساب الفائدة البسيطة والفائدة المركبة: -

يكون جملة المبلغ على حساب الفائدة البسيطة في نهاية المدة على شكل متتالية حسابية وتحسب بالقانون.

$$a_n = a_1 + (n)d$$

حيث أن:

المبلغ في بداية المدة = a_1

عدد السنوات= n

الفائدة السنوية على المبلغ= d

نسبة الفائدة $\times\ a_1$ = d

مثال 1: -

أودع شخص مبلغ (10000) ريال لمدة (8) سنوات بفائدة بسيطة 7.5% سنوياً، أحسب جملة المبلغ في نهاية المدة.

الحل: -

$$a_1 = 10000$$
$$n = 8$$
$$\Rightarrow d = \frac{7.5}{100} \times 10000 = 750$$

المبلغ في نهاية السنة الثامنة = a_8

$$\Rightarrow a_8 = 10000 + (8)(750)$$
$$= 10000 + 6000 = 16000\, SAR$$

مثال 2: -

أودع شخص مبلغ ما لمدة (4.75) سنة بفائدة بسيطة 2% ربع سنوي، فوجد أن جملة ما له في نهاية المدة قد بلغ (5520) ريال أحسب أصل المبلغ.

الحل: -

$a_1 = ?$
$n = 4.75$
$d = \frac{8}{100} \times a_1 = 0.08\, a_1$

المبلغ في نهاية المدة = $a_{4.75}$

$a_{4.75} = a_1 + (4.75)(0.08\, a_1) = 5520$
$\Longrightarrow a_1(1+4.75\times 0.08) = 5520$
$\Longrightarrow a_1(1.38) = 5520$
$\Longrightarrow a_1 = \frac{5520}{1.38} = 4000\ SAR$

مثال 3: -

أودع شخص مبلغ (1000) ريال لمدة ما بفائدة بسيطة 10% سنوياً، فوجد أن جملة ما له في نهاية المدة قد بلغ (1250) ريال أحسب مدة الاستثمار.

الحل: -

$a_1 = 1000$
$n = ?$
$d = \frac{10}{100} \times 1000 = 100$

المبلغ في نهاية المدة = $a_?$

$a_? = 1000 + (n)(100) = 1250$
$\Longrightarrow 1250 - 1000 = n.100$
$\Longrightarrow 250 = n.100$
$\Longrightarrow n = \frac{250}{100} = 2.5$

أما الفائدة المركبة فتحسب على أساس المتتالية الهندسية حيث تحسب بالقانون:

$$a_n = a_1\, r^n$$

حيث أن:

جملة المبلغ في نهاية المدة $=a_n$

المبلغ في بداية المدة $=a_1$

نسبة الفائدة + 1 = r

مثال 1: -

ادخر شخص مبلغ(8000) ريال بفائدة مركبة 9% لمدة خمس سنوات، فما هي جملة المبلغ في نهاية المدة.

الحل: -

$$a_1 = 8000$$
$$r = 1 + 0.09 = 1.09$$
$$n = 5$$
$$\Longrightarrow a_5 = 8000(1.09)^5 = 12308.9\ SAR$$

مثال 2: -

ادخر شخص مبلغ(10000) ريال بفائدة مركبة 5% نصف سنوي لمدة 3.5 سنة، فما هي جملة المبلغ في نهاية المدة.

الحل: -

$$a_1 = 10000$$
$$r = 1 + 0.10 = 1.1$$
$$n = 3.5$$
$$\Rightarrow a_{3.5} = 10000(1.1)^{3.5} = 13959.65\ SAR$$

مثال 3: -

ادخر شخص مبلغ ما بفائدة مركبة 4% نصف سنوي لمدة 6 سنوات، فوجد أن جملة المبلغ في نهاية المدة (15868.74322) ريال أوجد أصل المبلغ.

الحل: -

$$a_1 = ?$$
$$r = 1 + 0.08 = 1.08$$
$$n = 6$$
$$\Rightarrow a_6 = a_1(1.08)^6$$
$$\Rightarrow 15868.74322 = a_1(1.08)^6$$
$$\Rightarrow a_1 = \frac{15868.74322}{1.08^6} = 10000\ SAR$$

المحاضرة (٧): المصفوفات

١ – المصفوفات: -

المصفوفة: هي عدد من العناصر موضوعة على شكل صفوف وأعمدة ويرمز لها بأحد الحروف الهجائية الكبيرة A,B,C،...، ومن الأمثلة على المصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 12 & 3 \\ -5 & 5 & -6 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 2 \\ 0 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

رتبة المصفوفة: -

رتبة المصفوفة تساوي عدد الصفوف×عدد الاعمدة.

مثال:

رتبة المصفوفة A هي 3×4 وتكتب على الصورة $A_{3\times4}$.

رتبة المصفوفة B هي 4×2 وتكتب على الصورة $B_{4\times2}$.

رتبة العنصر: -

رتبة العنصر a هي موقعه في الصف والعمود أي العنصر في الصف i والعمود j = a_{ij}

مثال: -

في المصفوفة A السابقة أوجد العناصر a_{24}, a_{32}, a_{21}.

الحل: -

العنصر a_{21}: العنصر في الصف الثاني العمود الأول $a_{21}=-5$

العنصر a_{32}: العنصر في الصف الثالث العمود الثاني $a_{32}=-6$

العنصر a_{24}: العنصر في الصف الثاني العمود الرابع $a_{24}=7$

أنواع المصفوفات: -

1- المصفوفة الصفرية:

المصفوفة التي يكون جميع عناصرها أصفار.

مثال:-

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{2\times3}$$

← مصفوفة صفرية رتبتها 2×3

٢- المصفوفة المربعة:

المصفوفة المربعة هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف = عدد الاعمدة.

مثال:-

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}_{2\times2} \quad . \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{-8} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

المصفوفة A مصفوفة مربعة من الرتبة 2×2 (أي من الرتبة الثانية).

المصفوفة B مصفوفة مربعة من الرتبة 3×3 (أي من الرتبة الثالثة).

٣- المصفوفة القطرية:

المصفوفة المربعة التي يكون جميع العناصر فيها غير القطر الرئيسي أصفار.

مثال: -

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4- المصفوفة المحايدة:

المصفوفة القطرية التي يكون عناصر القطر الرئيسي تساوي واحد ويرمز لها بالرمز I_n حيث n تمثل عدد صفوف المصفوفة (رتبتها).

مثال: -

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5- المصفوفة المثلثية:

وتنقسم إلى قسمين:

أ – المصفوفة المثلثية العليا:

المصفوفة التي يكون فيها جميع العناصر تحت القطر الرئيسي أصفار.

مثال: -

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

ب – المصفوفة المثلثية السفلى:

المصفوفة التي يكون فيها جميع العناصر فوق القطر الرئيسي أصفار.

مثال: -

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

6- المصفوفة المبدلة (Transpose of matrix):

منقول المصفوفة أو مبدل المصفوفة هي تبديل الصفوف بالأعمدة والاعمدة بالصفوف ويرمز لها بالرمز A^T.

مثال: -

أوجد منقول كل من المصفوفات التالية:

$$1/\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3} \qquad 2/\ B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

الحل: -

$$1/\ A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times2} \qquad 2/\ B^T = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

7- المصفوفة المتماثلة (Symatric matrix) :

تكون المصفوفة متماثلة إذا كانت $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$.

مثال: -

اي من المصفوفات التالية متماثلة:

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad 2)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

الحل:-

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} . \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} . \ A \neq A^T$$

$\therefore$ A ليست متماثلة

$$2)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} . \ B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} . \ B = B^T$$

$\therefore$ B متماثلة

العمليات على المصفوفات: -

1- الجمع والطرح:

عند جمع أو طرح مصفوفتين يجب أن تكونا من نفس الرتبة ونجمع أو نطرح العناصر المتناظرة.

مثال: -

أوجد ناتج ما يلي:

$$1/\ A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$2/\ A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3} - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

الحل

$$1\text{-}\ A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 11 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$2\text{-}\ A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3} - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

2- الضرب بعدد ثابت:

عند ضرب مصفوفة بعدد ثابت فإننا نضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بالعدد.

مثال: -

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} . \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

أوجد ما يلي:

$3A$

$2B$

$3A - 2B$

الحل: -

$$3A = 3 \times \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times4 & 3\times9 \\ 3\times6 & 3\times4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 \\ 18 & 9 \end{bmatrix}$$

$$2B = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times1 & 2\times1 \\ 2\times2 & 2\times5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{bmatrix} 12 & 27 \\ 18 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 14 & -1 \end{bmatrix}$$

3- ضرب المصفوفات:

عند ضرب مصفوفتين يجب أن تكون عدد أعمدة الاولى يساوي عدد صفوف الثانية وعند الضرب نضرب الصف i في المصفوفة الاولى بالعمود j في المصفوفة الثانية لينتج العنصر aij في المصفوفة الناتجة.

ويتم الضرب: صف (صف من المصفوفة الأولى) في عمود (عمود من المصفوفة الثانية).

مثال: -

إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4\times3} \quad . \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

احسب:

1) AB

2) BA

الحل: -

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\times2+4\times3\pm1\times-1) & (1\times0+4\times1\pm1\times4) \\ (5\times2+6\times3+2\times-1) & (5\times0+6\times1+2\times4) \\ (2\times2+1\times3+7\times-1) & (2\times0+1\times1+7\times4) \\ (3\times2+0\times3+4\times-1) & (3\times0+0\times1+4\times4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+12+1 & 0+4-4 \\ 10+18-2 & 0+6+8 \\ 4+3-7 & 0+1+28 \\ 6+0-4 & 0+0+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 26 & 14 \\ 0 & 29 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}_{4\times2}$$

2) BA

لا تجوز عملية الضرب لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى لا تساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية.

ملاحظة:

1- اذا كانت $A_{m\times n}$ وكانت $B_{n\times k}$ فإن $(AB)_{m\times k}$.

مثال 1:-

اذا كانت $B_{5\times6}$ ، $A_{3\times5}$ فأوجد رتبة AB.

الحل: -

$$A_{m\times n} \times B_{n\times k} = AB_{m\times k}$$
$$A_{3\times5} \times B_{5\times6} = AB_{3\times6}$$

ونستنتج من هذا المثال أن:

$$AB \neq BA$$

مثال 2:-

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ فأوجد A^2

الحل: -

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (2 \times 2 + 4 \times 6) & (2 \times 4 + 4 \times 5) \\ (6 \times 2 + 5 \times 6) & (6 \times 4 + 5 \times 5) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 28 & 28 \\ 42 & 49 \end{bmatrix}$$

مثال 3:-

إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix} . \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

وكانت $, D = BAC = AB$

فأوجد ما يلي:

$$\mathbf{c_{12} . c_{33} . d_{21} . d_{13}}$$

الحل: -

1) حاصل ضرب الصف الأول من المصفوفة Aبالعمود الثاني من المصفوفة $\mathbf{B} = \mathbf{c_{12}}$.

$$\Rightarrow \mathbf{c_{12}} = 3 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times 5 = 3 + 8 + 25 = 36$$
$$\mathbf{c_{33}} = 6 \times -1 + 4 \times 6 + 7 \times 0 = -6 + 24 + 0 = 18$$
$$\mathbf{d_{21}} = 4 \times 3 + 2 \times 2 + 6 \times 6 = 12 + 4 + 36 = 52$$
$$\mathbf{d_{13}} = 1 \times 5 + 1 \times 0 + -1 \times 7 = \ = 5 + 0 - 7 = -2$$

المحاضرة (٨): تابع المصفوفات

عمليات الصف البسيط: -

هي مجموعة من العمليات تقام على الصفوف وهذه العمليات تتكون من ثلاثة عمليات فقط هي:

1- ضرب صف بعدد ثابت.

2- ضرب صف بعدد ثابت وجمعه الى صف آخر.

3- تبديل صف مكان صف.

مثال: -

في المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

نفذ العمليات التالية على المصفوفة على الترتيب.

1- أضرب الصف الثاني بالعدد 2.

2- اضرب الصف الاول بالعدد (1-) واجمعة الى الصف الثالث.

3- بدل الصف الثاني مع الصف الثالث.

$$2r_2 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 12 & 6 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-1r_1 + r_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 12 & 6 & 4 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$r_2 \leftrightarrow r_3 \;\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -5 \\ 12 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة (مقلوب المصفوفة): -

سوف نعتمد على عملية الصف البسيط في ايجاد معكوس المصفوفة وسوف نرمز الي معكوس المصفوفة بالرمز A^{-1} .

مثال 1: -

أوجد معكوس المصفوفة التالية باستخدام عمليات الصف البسيط

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل: -

لإيجاد معكوس المصفوفة نستخدم العلاقة السابقة بحيث نضع المصفوفة ومعها المصفوفة المحايدة I_2 وباستخدام عمليات الصف البسيط تتحول A إلى I_2 وتتحول I_2 إلى A^{-1} .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \frac{1}{3}r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow -6r_1 + r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow -\frac{1}{3}r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \rightarrow -\frac{4}{3}r_2 + r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\therefore \;\; A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

للتحقق من الحل: $AA^{-1} = I$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{9}+\frac{8}{3} & \frac{12}{9}-\frac{4}{3} \\ -\frac{30}{9}+\frac{10}{3} & \frac{24}{9}+\frac{-5}{3} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -\frac{15}{9}+\frac{24}{9} & \frac{12}{9}-\frac{12}{9} \\ -\frac{30}{9}+\frac{30}{9} & \frac{24}{9}+\frac{-15}{9} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام عمليات الصف البسيط: -

إذا كان لدينا النظام التالي من المعادلات الخطية:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

نعرف المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \ . \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ . \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

حيث تسمى A مصفوفة المعاملات X مصفوفة المتغيرات، B مصفوفة الثوابت، وبالتالي يمكن التعبير عن نظام المعادلات باستخدام المصفوفات كالآتي:

$$AX = B$$

ولحل هذا النظام باستخدام عمليات الصف البسيط نستخدم الخطوات التالية:

1- نضع المصفوفة $[A|B]$.

2- نطبق عليها عمليات الصف البسيط.

3- ينتج $[I|C]$ حيث C تمثل مصفوفة الحل وتكون $CX =$.

مثال 1: -

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام عمليات الصف البسيط.

$$3\,x + 2\,y = 7$$
$$4\,x - y = 2$$

الحل: -

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right] \to \frac{1}{3}r_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 3 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right]$$
$$\to -4r_1 + r_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{22}{3} \end{array}\right] \to -\frac{3}{11}r_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$
$$\to -\frac{2}{3}r_2 + r_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow x = 1 \ , y = 2$$

مثال 2: -

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام عمليات الصف البسيط.

$$5x + 2y = 23$$
$$6x + 10y = 58$$

الحل: -

$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} 23 \\ 58 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 23 \\ 6 & 10 & 58 \end{array}\right] \to \frac{1}{5}r_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 6 & 10 & 58 \end{array}\right]$$

$$\to -6r_1 + r_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 0 & \frac{38}{5} & \frac{152}{5} \end{array}\right] \to \frac{5}{38}r_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\to -\frac{2}{5}r_2 + r_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow x = 3 \ , y = 4$$

التطبيقات التجارية للمصفوفات: -

مثال 1: -

تنتج شركة النجاح نوعين من الدفاتر المدرسية النوع الأول (دفتر 60 ورقة) ويباع بسعر 2 ريال ويحتاج إلى 3 ساعات عمل في قسم القص و 2 ساعة عمل في قسم التجميع، والنوع الثاني (دفتر 120 ورقة) يباع بسعر 3 ريال ويحتاج إلى 2 ساعة عمل في قسم القص و 4 ساعات عمل في قسم التجميع، فإذا علمت أن الساعات المتاحة في قسم القص هي 35 ساعة، و 50 ساعة في قسم التجميع، المطلوب باستخدام اسلوب المصفوفات أوجد الكمية المثلى من الانتاج والتي تحقق أعلى ربح ممكن.

الحل: -

1- جدول تمهيد الحل:

المنتج / اقسام التشغيل	قسم القص	قسم التجميع	ثمن البيع .
دفتر 60 ورقة (x)	3	2	2
دفتر 120 ورقة (y)	2	4	3
ساعات العمل المتاحة لكل قسم	35	50	-

2- صياغة المشكلة رياضياً:

أ- دالة الهدف (الربح / ثمن البيع): $p = 2x + 3y$

ب- القيود:

$$3x + 2y = 35$$
$$2x + 4y = 50$$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} 35 \\ 50 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 35 \\ 2 & 4 & 50 \end{array}\right] \rightarrow \frac{1}{3}r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{35}{3} \\ 2 & 4 & 50 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow -2r_1 + r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{35}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{80}{3} \end{array}\right] \rightarrow \frac{3}{8}r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{35}{3} \\ 0 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow -\frac{2}{3}r_2 + r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 5 \ , y = 10$$

ربح النموذج:

$$\Rightarrow p = 2x + 3y = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40\ SAR$$

مثال 2: -

تنتج شركة الفهد نوعين من المنتجات$(x\ .\ \ y)$ وتستخدم نوعين من المواد الخام الخشب والحديد فإذا علمت أن النوع الأول من المنتجات يتطلب 8م^2 من الخشب و 2 كغ من الحديد والنوع الثاني من المنتجات يتطلب 10م^2 من الخشب و 4 كغ من الحديد.

ويبلغ ربح الوحدة من النوع الأول 100 ريال والنوع الثاني 150 ريال، فإذا علمت أن كمية الخشب المتوافرة في المخزن هي 280م^2 من الخشب و 100 كغ من الحديد.

المطلوب: باستخدام اسلوب المصفوفات، أوجد الكمية المثلى من الانتاج والتي تحقق أعلى ربح ممكن.

الحل: -

1- جدول تمهيد الحل:

المنتجات / المواد الخام	الخشب	الحديد	الربح
x	8	2	100
y	10	4	150
كمية المواد الخام المتاحة	280	100	-

2- صياغة المشكلة رياضياً:

أ- دالة الهدف (الربح / ثمن البيع): $p = 100x + 150y$

ب- القيود:

$$8x + 10y = 280$$
$$2x + 4y = 100$$

$A = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (مصفوفة المعاملات)

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (مصفوفة المتغيرات)

$B = \begin{bmatrix} 280 \\ 100 \end{bmatrix}$ (مصفوفة الثوابت)

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 8 & 10 & 280 \\ 2 & 4 & 100 \end{array}\right] \rightarrow \frac{1}{8}r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{10}{8} & \frac{280}{8} \\ 2 & 4 & 100 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow -2r_1 + r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{10}{8} & \frac{280}{8} \\ 0 & \frac{12}{8} & \frac{240}{8} \end{array}\right] \rightarrow \frac{8}{12}r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{10}{8} & \frac{280}{8} \\ 0 & 1 & 20 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow -\frac{10}{8}r_2 + r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 20 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 10 \ , y = 20$$

ربح النموذج:

$$\Longrightarrow p = 100x + 150y = 100 \times 10 + 150 \times 20 = 4000\ SAR$$

مثال ٣: -

تنتج شركة الأحلام للثلاجات نوعين من الثلاجات هما ثلاجة ١٠ قدم وثلاجة ١٢ قدم فإذا علمت أن كل نوع من هذه الثلاجات يمر بمرحلتين إنتاجيتين هما مرحلة التصنيع ومرحلة التشطيب. فإذا فرض أن الثلاجة ١٠ قدم تحتاج ٤ ساعات عمل في مرحلة التصنيع وساعتين في مرحلة التشطيب، وأن الثلاجة ١٢ قدم تحتاج إلى ٥ ساعات عمل في مرحلة التصنيع و٣ ساعات في مرحلة التشطيب. مع العلم بأن عدد الساعات المتاحة لهذا المصنع هي ٢٤٠٠ ساعة لمرحلة التصنيع، ١٣٠٠ ساعة لمرحلة التشطيب فإذا كانت سياسة الإنتاج في المصنع هي استخدام كافة الطاقات المتاحة فالمطلوب تحديد عدد الوحدات المنتجة من كل نوع.

الحل: -

1- جدول تمهيد الحل:

النوع / مرحلة الانتاج	التصنيع	التشطيب
(x) قدم10	4	2
(y) قدم12	5	3
الساعات المتاحة	2400	1300

نفرض أن:

x = عدد الوحدات المنتجة من الثلاجة 10قدم.

y = عدد الوحدات المنتجة من الثلاجة 12قدم.

← ومن ثم يمكن صياغة المشكلة الرياضية السابقة كنظام للمعادلات كما يلي:

$$4x + 5y = 2400$$
$$2x + 3y = 1300$$

$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (مصفوفة المعاملات)

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (مصفوفة المتغيرات)

$B = \begin{bmatrix} 2400 \\ 1300 \end{bmatrix}$ (مصفوفة الثوابت)

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 2400 \\ 2 & 3 & 1300 \end{array}\right] \to \frac{1}{4}r_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{4} & 600 \\ 2 & 3 & 1300 \end{array}\right]$$

$$\to -2r_1 + r_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{4} & 600 \\ 0 & \frac{1}{2} & 100 \end{array}\right] \to 2r_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{4} & 600 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right]$$

$$\to -\frac{5}{4}r_2 + r_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 350 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 350 \\ 200 \end{bmatrix} \Longrightarrow x = 350\ , y = 200$$

المحاضرة (٩): المحددات

محدد المصفوفة من الرتبة الثانية:-

مُحَدِّد المصفوفة هي القيمة الرقمية للمصفوفة ويرمز لها بأحد الرموز التالية:

$$\boldsymbol{Det\ A}\ .\ \Delta A\ .\ |A|$$

1- محدد المصفوفة من الرتبة الثانية 2×2:

المصفوفة من الرتبة 2×2 تكون على الصورة

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

وتكون محددتها هي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال: -

أوجد قيمة المحددات التالية:

1) $\Delta A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

2) $\Delta B = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

3) $\Delta C = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$

الحل: -

1- $\Delta A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$$\Delta A = 5 \times 4 - 2 \times 3 = 20 - 6 = 14$$

2- $\Delta B = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

$$\Delta B = 1 \times 2 - 3 \times 5 = 2 - 15 = -13$$

3- $\Delta C = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$

$$\Delta C = 2 \times 9 - 3 \times 6 = 18 - 18 = 0$$

ملاحظة: اذا كانت $\Delta A = 0$ فإن A تسمى مصفوفة مفردة (Singular matrix).

2- محدد المصفوفة من الرتبة الثالثة:

المصفوفة من الرتبة الثالثة تكون على الصورة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ولإيجاد محدد المصفوفة A نستخدم واحدة من الطريقتين:

أ- طريقة الأسهم.

ب- طريقة المحددات الصغرى.

أ- طريقة الأسهم (سايروس):

في هذه الطريقة نكرر العمود الأول والثاني، ثم نجد حاصل ضرب الأقطار الرئيسية ونطرح منها حاصل ضرب الاقطار المرافقة كالاتي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} detA &= (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}) \\ &\quad -(a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{13}a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

مثال 1: -

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:-

$$\Delta A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta A &= (1\times 4\times 3+2\times 6\times(-1)+3\times 5\times 7) \\ &\quad -(2\times 5\times 3+1\times 6\times 7+3\times 4\times(-1)) \\ &=(12-12+105)-(30+42-12) \\ &=105-60 \\ &=45 \end{aligned}$$

مثال 2: -

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل: -

$$\Delta A=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta A &= (3\times 8\times 4+1\times 9\times 6+2\times 7\times 2)-(1\times 7\times 4+3\times 9\times 2+2\times 8\times 6) \\ &=(96+54+28)-(28+54+96) \\ &=178-178 \\ &=0 \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ A مصفوفة مفردة.

ب- طريقة المحددات الصغرى:

نجد المحدد بالنسبة لأي صف أو عمود فإذا كانت

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فإن محدد A بالنسبة للصف الأول هي:

$$\Delta A=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ثم نجد محددات المصفوفات الثنائية.

ونستطيع ايجاد المحدد بالنسبة لأي صف أو أي عمود وتكون اشارات المصفوفة كالآتي:

$$A=\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

مثال 1: -

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

الحل: -

$$\Delta A = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 3(10-21) - 0(-5-7) + 4(-3-2)$$
$$= -53$$

مثال 2: -

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

الحل: -

$$\Delta A = 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - (5)\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 4(7-0) - 5(42-0) - 2(18-8)$$
$$= -202$$

خواص المحددات:-

1- اذا كانت عناصر أحد الصفوف أو الأعمدة أصفار فإن قيمة المحدد تساوي صفر.

مثال: -

أحسب قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل: -

حيث أن الصف الثاني أصفار فإن $\Delta A = 0$

2- اذا تساوت عناصر صفين أو عمودين في المصفوفة فإن قيمة المحدد تساوي صفر.

مثال: -

احسب قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ 9 & 1 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

الحل: -

حيث أن عناصر العمود الأول والثالث متساوية فإن $\Delta A = 0$

3- اذا ضرب أحد الصفوف أو أحد الأعمدة بعدد ثابت فإن قيمة المحدد تضرب في نفس العدد.

مثال: - إذا كانت قيمة المحدد التالي تساوي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad . \quad \Delta A = 5$$

فأوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل: -

نلاحظ أن المصفوفة B هي المصفوفة A مضروب الصف الثالث فيها بالعدد (3).

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times \Delta A$$

$$\Longrightarrow \Delta B = 3\Delta A = (3)(5) = 15$$

4- اذا كانت $A_{n\times n}$ مصفوفة مربعة وكان k أي عدد حقيقي فإن:

$$Det(kA) = k^n \, Det(A)$$

مثال: -

إذا كانت $\Delta(A_{2\times2}) = 5$ فأوجد قيمة المحدد $\Delta(3A)$.

الحل: -

$$\Delta(3A) = 3^2(\Delta A) = (9)(5) = 45$$

5- اذا بدلنا صف مكان صف أو عمود مكان عمود في المحدد فإن قيمة المحدد تنعكس اشارتها.

مثال: -

إذا كانت

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \quad . \quad \Delta A = -2$$

فأوجد قيمة المحدد

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل: -

المصفوفة B هي ناتج تبديل الصف الأول بالصف الثاني في المصفوفة A

$$\Longrightarrow \Delta B = -(-2) = 2$$

6- اذا كان أحد الصفوف مضاعف لصف آخر أو أحد الأعمدة مضاعف للآخر فإن قيمة المحدد تساوي صفر.

مثال: -

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

الحل: -

لأن الصف الثالث من مضاعفات الصف الثاني فإن $\Delta A = 0$

$$7- \quad \Delta(AB) = (\Delta A)\,(\Delta B)$$

مثال:-

إذا كانت A ، B مصفوفتان من الرتبة 3×3 وكانت:

$(\Delta A) = 2$. $(\Delta B) = 5$. فأوجد $\Delta(AB)$

الحل: -

$$\Delta(\mathrm{AB}) = (\Delta \mathrm{A})\,(\Delta \mathrm{B}) = (2) \times (5) = 10$$

$$8- \quad \Delta \mathrm{A} = \Delta \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$$

مثال:-

إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل: -

$$\Delta A = 10 - 6 = 4$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \Delta A^T = 10 - 6 = 4$$

$$\therefore \quad \Delta A = \Delta A^T$$

9- محدد المصفوفة القطرية = حاصل ضرب القطر

مثال: -

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

الحل: -

$$\Delta \mathbf{A} = (2)(1)(-3)(-4) = 24$$

10- محدد المصفوفة المحايدة = 1

أي $det(I_n) = 1$

مثال: -

أوجد قيمة محدد المصفوفة $\mathbf{I}_5$

الحل: -

$$\Delta\, \mathbf{I}_5 = 1$$

11- قيمة محدد المصفوفة المثلثية = حاصل ضرب القطر

مثال:-

أوجد قيمة المحدد التالي

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل: -

$$\Delta \mathbf{A} = (2)(3)(4) = 24$$

مثال:-

أوجد قيمة المحدد التالي

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل: -

$$\Delta \mathbf{A} = (1)(1)(3) = 3$$

المحاضرة (١٠): تابع المحددات

استخدام المحددات في ايجاد معكوس المصفوفة:-

أ- إذا كانت A مصفوفة من الرتبة 2×2 أي:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

فنجد معكوس المصفوفة بالخطوات التالية:

1- نجد قيمة محدد المصفوفة $det\ A$.

2- يكون معكوس المصفوفة A^{-1} هو:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

<u>مثال:1 -</u>

أوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>الحل: -</u>

$$\Rightarrow \det(A) = 8 - 3 = 5$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

<u>مثال 2: -</u>

أوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

<u>الحل: -</u>

$$\Rightarrow \det(A) = 12 - 12 = 0$$

∴ لا يوجد معكوس للمصفوفة A .

<u>ملاحظة 1:</u>

إذا كانت قيمة محدد المصفوفة = صفر فإن المصفوفة لا يوجد لها معكوس.

<u>ملاحظة 2:</u>

معكوس المصفوفة المحايدة هو نفس المصفوفة.

أي إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ب- اذا كانت A مصفوفة من الرتبة 3×3 بحيث $(detA \neq 0)$

أي

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فنجد معكوس المصفوفة A باستخدام المحددات كالاتي:

1- نجد محدد المصفوفة: $\det(A)$.

2- نجد محدد المرافقات لكل عنصر من عناصر المصفوفة ونضعها في مصفوفة ونرمز لها بالرمز A^{ι} .

$$A^{\iota} = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

حيث A_{11} هي محدد المرافقات للعنصر a_{11} وتكون:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3- نجد المصفوفة المرافقة (Adjoint Matrix): $adjA = (A^{\iota})^T$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

4- يكون معكوس المصفوفة هو:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\ adj\ A$$

<u>مثال 1: -</u>

أوجد معكوس المصفوفة A.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>الحل: -</u>

نجد في البداية محدد A

$$det\ A = 5\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 5(9+0) - 2(12-0) + 6(-8-3)$$
$$= 5 \times 9 - 2 \times 12 + 6 \times -11 = -45$$

ثم نجد محددات المرافقات للعناصر:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{المصفوفة الاصلية}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = A^{\iota} = \begin{bmatrix} 9 & -18 & -18 \\ -12 & 9 & 24 \\ -11 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 9 & -12 & -11 \\ -18 & 9 & 12 \\ -18 & 24 & 7 \end{bmatrix} \qquad \therefore A^{-1} = \frac{1}{-45}\begin{bmatrix} 9 & -12 & -11 \\ -18 & 9 & 12 \\ -18 & 24 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{-45} & -\frac{12}{-45} & -\frac{11}{-45} \\ -\frac{18}{-45} & \frac{9}{-45} & \frac{12}{-45} \\ -\frac{18}{-45} & \frac{24}{-45} & \frac{7}{-45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{4}{15} & \frac{11}{45} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{15} \\ \frac{2}{5} & -\frac{8}{15} & -\frac{7}{45} \end{bmatrix}$$

<u>مثال 2: -</u>

أوجد معكوس المصفوفة A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>الحل: -</u>

$$det\ A = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2 \times -2 + 0 = 6$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{مصفوفة المرافقات} \;,\quad adj\,A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} \\ \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

أ- حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصفوفة:

مثال 1:-

حل النظام التالي من المعدلات باستخدام معكوس المصفوفة، ثم تأكد من الحل:

$$2x + 3y = 1$$
$$3x - y = 7$$

الحل: -

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ مصفوفة المعاملات}$$
$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ مصفوفة الثوابت}$$

نجد أولاً معكوس A حيث

$$det\,A = -2 - 9 = -11$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

ويكون حل النموذج هو:

$$X = A^{-1}\,B$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} + \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} - \frac{14}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{22}{11} \\ -\frac{11}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 2\;.\;\; y = -1$$

للتأكد نعوض عن قيم x و y في المعادلة الأولى:

$$2x + 3y = 1$$

$2(2) + 3(-1) = 1$ **(الحل صحيح)**

مثال 2:-

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام معكوس المصفوفة:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$3\,x_1 + 2\,x_2 = 5$$
$$x_1 - 4\,x_3 = -3$$

الحل: -

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \;,\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

معكوس A:

$$\Rightarrow det\,A = 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times -8 - 3 \times -4 + 1 \times 2 = 6$$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ المصفوفة الاصلية

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = A^{\iota}$$ مصفوفة المرافقات

$A^{\iota} = \begin{bmatrix} -8 & 12 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ مصفوفة المرافقات , $adj\ A = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{6} & \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{12}{6} & -\frac{3}{6} & -\frac{3}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

ب- حل انظمة المعادلات الخطية باستخدام المحددات (طريقة كرامر):

مثال 1:-

أوجد حل النظام التالي من المعادلات باستخدام المحددات:

$$x + y = 1$$
$$2x + 3y = 5$$

الحل: -

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$
$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 5 = -2$$
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 2 = 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{2}{1} = -2 \ .\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3$$

ملاحظة: إذا كانت محدد المصفوفة Δ تساوي صفر فإن النظام لا يوجد له حل.

مثال 2:-

أوجد حل النظام التالي من المعادلات:

$$2x + y + 3z = 3$$
$$x + 2y + 2z = 5$$
$$5x + 3y + 6z = 7$$

الحل: -

$$1)\ \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \times (12 - 6) - 1 \times (6 - 9) + 5(2 - 6)$$
$$= 12 + 3 - 20$$
$$= -5$$

$$2)\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \times (12 - 6) - 5 \times (6 - 9) + 7(2 - 6)$$
$$= 18 + 15 - 28$$
$$= 5$$

$$3)\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (30 - 14) - 1 \times (18 - 21) + 5(6 - 15)$$
$$= 32 + 3 - 45$$
$$= -10$$

$$4)\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (14 - 15) - 1 \times (7 - 9) + 5(5 - 6)$$
$$= -2 + 2 - 5$$
$$= -5$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{-5} = -1$$
$$\Longrightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2$$
$$\Longrightarrow z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1$$

مثال 3: -

أوجد حل النظام التالي من المعادلات:

$$x + 2y + 6z = 7$$
$$3x + y + 3z = 7$$
$$4y + 12z = 10$$

الحل: -

$$1)\ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (12 - 12) - 3 \times (24 - 24) + 0(6 - 6)$$
$$= 0 + 0 + 0$$
$$= 0$$

$\Longleftarrow$ بما أن $\Delta A = 0$ فإن النظام لا يوجد له حل.

المحاضرة (١١): التفاضل وتطبيقاته التجارية

مقدمة: -

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير.
- يهتم حساب التفاضل بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلا:

إذا كان الربح مثلا يتغير بتغير كمية الإنتاج والطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة لسعر.

قواعد التفاضل: -

يطلق على عملية التفاضل في بعض الأحيان إيجاد المشتقة الأولى للدالة أو المعامل التفاضلي الأول.

ودائما تكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع وهو y والآخر متغير مستقل وهو x ويكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة.

المعطى: دالة أو معادلة $\quad y = 5x + 9$

المطلوب: المشتقة الأولى للدالة $\quad \frac{dy}{dx} = ???$

1- تفاضل المقدار الثابت:

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائما صفر فمثلا إذا كانت الدالة على شكل:

$$y = 15$$

فإن المتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائما مهما تغير المتغير المستقل x وعلى ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يؤثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضيا كما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

2- تفاضل المتغير x المرفوع إلى أس (x^n):

يتم تنزيل الاس والطرح منه واحد فعلى سبيل المثال

1- $y = x^5$

$\frac{dy}{dx} = 5x^4$

2- $y = 15x^4$

$\frac{dy}{dx} = 60x^3$

3- $y = 10x$

$\frac{dy}{dx} = 10$

3- تفاضل الدوال كثيرات الحدود:

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة.

مثال: -

1- $y = 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 3x$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 20x^3 + 18x^2 + 16x + 3$

2- $y = 20x^5 + 10x^3 - 5x^2 + 15x + 30$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 100x^4 + 30x^2 - 10x + 15$

4- مشتقة حاصل ضارب دالتين:

مشتقة حاصل ضارب دالتين يساوي الدالة الأولى كما هي ضارب مشتقة الدالة الثانية زائد الدالة الثانية كما هي ضارب مشتقة الدالة الأولى.

مثال :-

1- $y = (3x + 1)\,(x2 - 7x)$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = (3x + 1)\,(2x - 7) + (x2 - 7x)\,(3)$

2- $y = (10x3 - 12)\,(5x2 + 2x)$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = (10x3 - 12)\,(10x + 2) + (30x2)\,(5x2 + 2x)$

5- مشتقة حاصل قسمة دالتين:

مشتقة حاصل قسمة دلتين يساوي المقام ضارب مشتقة البسط ناقص البسط ضارب مشتقة المقام على المقام تربيع.

$$\frac{\text{المقام} \times \text{البسط مشتقة} - \text{البسط} \times \text{المقام مشتقة}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال :-

$y = \frac{4x+2}{3x}$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4)-(x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x-3x-6}{9x^2} = \frac{9x-6}{9x^2}$

6- مشتقة القوس المرفوع لأس:

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله.

مثال :-

1- $y = (15x^2 + 20)^3$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 3\,(15x^2 + 20)^2\,(30x)$

2- $y = (10x^3 - 12x^2 + 5)^5$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 5(10x^3 - 12x^2 + 5)^4\,(30x^2 - 24x)$

7- المشتقات العليا للدالة:

مثال :- أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية:

$y = 15x^4 + 12x^3 + 20x^2 - 5x + 12$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 60x^3 + 36x^2 + 40x - 5$ (المشتقة الاولى)

$\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 180x^2 + 72x + 40$ (المشتقة الثانية)

$\rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = 360x + 72$ (المشتقة الثالثة)

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل: -

1 – المرونة

2 – النهايات العظمى والصغرى

3 – الاستهلاك والادخار

4 – الربح الحدي

مرونة الطلب: -

أ- تعريف مرونة الطلب السعرية:

تعرف مرونة الطلب السعرية على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في السعر.

ب- تعريف مرونة الطلب الدخلية:

تعرف مرونة الطلب الدخلية على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل.

ج - قيس مرونة الطلب:

مرونة الطلب باستخدام التفاضل هي: $\text{م} = \text{المشتقة الأولى لدالة الطلبب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

ملاحظة:

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

د- حالات المرونة السعرية (م):

- القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة).
- القيمة المطلقة للمرونة < واحد (طلب قليل المرونة أو غير مرن).
- القيمة المطلقة للمرونة = واحد (طلب متكافئ المرونة).
- القيمة المطلقة للمرونة > واحد (طلب مرن).
- القيمة المطلقة للمرونة = ما لا نهاية (طلب لا نهائي المرونة).

مثال 1:-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $D = 80 - 6x$ أوجد معامل المرونة إذا كانت الكمية المطلوبة 100 وحدة عند سعر يساوي 10 ريال.

الحل:-

- أولا نوجد المشتقة الأولى لدالة الطلب: $D^{\prime} = -6$

- ثانيا التعويض في القانون: م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}$

$$\text{م} = (-6) \times \frac{10}{100} = -0.6$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي النتائج بقطع النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا الطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن.

مثال 2:-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $D = 200 - 10x$ أوجد معامل المرونة إذا كانت الكمية المطلوبة 200 وحدة عند سعر يساوي 20 ريال.

الحل:-

- أولا نوجد المشتقة الأولى لدالة الطلب: $D^{\prime} = -10$

- ثانيا التعويض في القانون: م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}$

$$\text{م} = (-10) \times \frac{20}{200} = -1$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي النتائج بقطع النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا الطلب في هذه الحالة متكافئ المرونة.

مثال 3:-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $D = 15x - 20$ أوجد معامل المرونة إذا كانت الكمية المطلوبة 1000 وحدة عند سعر يساوي 100 ريال.

الحل:-

- أولا نوجد المشتقة الأولى لدالة الطلب: $D' = 15$

- ثانيا التعويض في القانون: م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

$$\text{م} = (15) \times \frac{100}{1000} = 1.5$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي النتائج بقطع النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا الطلب في هذه الحالة مرن.

تمرين واجب :-

مثال 3:-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $D = 1.5x + 20$ أوجد معامل المرونة إذا كانت الكمية المطلوبة 600 وحدة عند سعر يساوي 200 ريال.

النهايات العظمى والصغرى: -

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى:

1- يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة.

2- يتم إيجاد المشتقة الثانية.

3- تحديد نوع النهاية (عظمى – صغرى).

← إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة فهذا يدل على وجود نهاية عظمى.

← إذا كانت إشارة المشتقة الثانية موجبة فهذا يدل على وجود نهاية صغرى.

مثال 1:-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل

$$P = -0.4x^2 + 300x - 2000$$

حدد إذا ما كانت هذه الدالة تمثل نهاية كبرى أو صغرى ؟

الحل:-

- المشتقة الأولى للدالة:

$$P' = -0.8x + 300$$

- المشتقة الثانية للدالة:

$$P'' = -0.8$$

← نجد أن المشتقة الثانية للدالة سالبة وبالتالي فهي تحقق نهاية عظمى.

مثال 2:-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل

$$P= 500-0.2x +0.1x^{2}$$

حدد إذا ما كانت هذه الدالة تمثل نهاية كبرى أو صغرى؟

الحل:-

- المشتقة الأولى للدالة:

$$P^{/} = -0.2 + 0.2x$$

- المشتقة الثانية للدالة:

$$P^{//} = 0.2$$

← نجد أن المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي تحقق نهاية صغرى.

المحاضرة (١٢): تابع التفاضل وتطبيقاته التجارية

الاستهلاك والادخار: -

الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك K حيث الاستهلاك دالة في الدخل.

قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة لكن أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب).

2- الميل الحدي للادخار= المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل.

قيمة الميل الحدي للاستهلاك أو للادخار تكون موجبة لكن أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب).

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = 1

مثال 1:-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي: $(K = 15 + 0.6x - 0.02x^2)$، المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك والميل الحدي للادخار.

الحل:-

- دالة الاستهلاك الحدي هي المشتقة الأولى للاستهلاك:

$$K' = 0.6 - 0.04x$$

- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي واحد ريال هو:

$$K'(1) = 0.6 - 0.04 \times 1 = 0.6 - 0.4 = 0.56$$

- الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي واحد ريال هو:

= 1 – الميل الحدي للاستهلاك = 1– 0.56 = 0.44

مثال 2:-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي: $(K = 18 + 0.8x - 0.15x^2)$، المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك والميل الحدي للادخار.

الحل:-

- دالة الاستهلاك الحدي هي المشتقة الأولى للاستهلاك:

$$K' = 0.8 - 0.3x$$

- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي واحد ريال هو:

$$K'(1) = 0.8 - 0.3 \times 1 = 0.8 - 0.3 = 0.5$$

- الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي واحد ريال هو:

= 1 – الميل الحدي للاستهلاك = 1– 0.5 = 0.5

الربح الحدي: -

1- الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة.

2- الربح الكلي = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية.

3- الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي.

4- التكلفة الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية.

5- الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي.

6- الربح الحدي = الإيراد الحدي – التكلفة الحدية.

مثال 1:-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية:

$$R = 12x^3 + 20x^2 - 10x + 30$$

أوجد الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات؟

الحل:-

- دالة الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي:

$$R' = 36x^2 + 40x - 10$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذا $x = 10$.

$$R' = 36 \times 10^2 + 40 \times 10 - 10 = 3990\ S.R.$$

مثال 2:-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة الواحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية:

$$r = 4x^2 + 6x + 5 \ (\text{سعر بيع الوحدة})$$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة.

المطلوب:

إيجاد الإيراد الحدي عند بيع وإنتاج 15 وحدة؟

الحل:-

- دالة الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$$R = x \times r = x(4x^2 + 6x + 5) = 4x^3 + 6x^2 + 5x$$

- دالة الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي:

$$R' = 12x^2 + 12x + 5$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 15 وحدة إذا $x = 15$.

$$R' = 12 \times 15^2 + 12 \times 15 + 5 = 2885\ S.R.$$

مثال 3:-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة الواحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية:

$$r = 10x^3 - 11x^2 + 5x - 20 \ (\text{سعر بيع الوحدة})$$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة.

المطلوب:

إيجاد الإيراد الحدي عند بيع وإنتاج 5 وحدة؟

الحل:-

- دالة الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$$R = x \times r = x(10x^3 - 11x^2 + 5x - 20) = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x$$

- دالة الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي:

$$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 15 وحدة إذا $x = 15$.

$$R' = 40 \times 5^3 - 33 \times 5^2 + 10 \times 5 - 20 = 4205\ S.R.$$

مثال 4:-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ شكل:

$$C = 10x^2 - 12x + 15$$

أوجد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 10 وحدات؟

الحل:-

- دالة التكاليف الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكاليف الكلية:

$$C' = 20x - 12$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذا $x = 10$.

$$C' = 20 \times 10 - 12 = 188\ S.\ R.$$

مثال 5:-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ شكل:

$$C = (5x^2 - 3x + 15)^2$$

أوجد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة؟

الحل:-

- دالة التكاليف الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكاليف الكلية:

$$C' = 3(5x^2 - 3x + 15)(10x - 3)$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذا $x = 20$.

$$C' = 3 \times (5 \times 20^2 - 3 \times 20 + 15)^2(10 \times 20 - 3) \ = 1155405\ S.\ R.$$

مثال 6:-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات هي:

$$R = 2x^3 - 6x^2 + 10x - 15$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل

$$C = 15x^2 + 9x - 17$$

المطلوب:

اوجد حجم الأرباح الحدية عند إنتاج وبيع 30 وحدة.

الحل:-

- الربح الكلي = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

$$\begin{aligned} P &= R - C \\ &= (2x^3 - 6x^2 + 10x - 15) - (15x^2 + 9x - 17) \\ &= 2x^3 - 21x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

- دالة الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي:

$$P' = 6x^2 - 42x + 1$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 30 وحدة إذا $x = 30$.

$$P' = 6x^2 - 42x + 1 = 6 \times 30^2 - 42 \times 30 + 1 = 4141\ \text{S.R.}$$

مثال 7:-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات هي:

$$R = 12x^3 + 5x^2 - 2x + 100$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل

$$C = 10x^2 + 3x + 20$$

المطلوب:

اوجد حجم الأرباح الحدية عند إنتاج وبيع 25 وحدة.

الحل:-

- الربح الكلي = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

$$\begin{aligned} P &= R - C \\ &= (12x^3 + 5x^2 - 2x + 100) - (10x^2 + 3x + 20) \\ &= 12x^3 - 5x^2 - 5x + 80 \end{aligned}$$

- دالة الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي:

$$P' = 36x^2 - 10x - 5$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 30 وحدة إذا $x = 30$.

$$P' = 36x^2 - 10x - 5 = 36 \times 25^2 - 10 \times 25 - 5 = 22245 \text{ S.R.}$$

تمرين شامل:-

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية والإرادات الكلية وتأخذ هذه الدوال الشكل التالي:

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

المطلوب:

1- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات.

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة.

3- دالة الربح الكلي.

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات.

الحل:-

1- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات:

$$\begin{aligned} &R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15 \\ &\Rightarrow R' = 120x^3 + 24x - 6 \end{aligned}$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذا $x = 10$.

$$R' = 120 \times 10^3 + 24 \times 10 - 6 = 120234 \text{ S.R.}$$

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة :

$$\begin{aligned} &C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20 \\ &\Rightarrow C' = 39x^2 - 10x + 3 \end{aligned}$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدات إذا $x = 12$.

$$C' = 39 \times 12^2 - 10 \times 12 + 3 = 5499 \text{ S.R.}$$

3- دالة الربح الكلي :

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$
$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

$$\Rightarrow P = R - C$$
$$= (30x^4 + 12x^2 - 6x + 15) - (13x^3 - 5x^2 + 3x - 20)$$
$$= 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35$$

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات:

$$P = 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35$$
$$\Rightarrow P' = 120x^3 - 39x^2 + 34x - 9$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذا $x = 5$.

$$P' = 120 \times 5^3 - 39 \times 5^2 + 34 \times 5 - 9 = 14186 \text{ S.R.}$$

المحاضرة (١٣): التكامل وتطبيقاته التجارية

التكامل: -

يعتبر التكامل عملية عكسية للتفاضل حيث يتم إيجاد قيمة y. ويرمز للتكامل بالرمز $\int$ وعلى ذلك فإذا كانت دالة على الشكل $f(x)$ ونرغب في إجراء عملية التكامل على هذه الدالة فسوف نكتب:

$$\int f(x).dx$$

أي تكامل الدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x.

قواعد التكامل: -

1 - تكامل x المرفوعة إلى أس:

يتم إضافة العدد واحد إلى الأس ونقسم على الأس الجديد.

$\int x^n . dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$

$\int k . dx = kx + c$

$\int dx = x + c$

مثال 1: -

1- $\int x^3 . dx = \frac{1}{4} x^4 + c$

2- $\int x^5 . dx = \frac{1}{6} x^6 + c$

3- $\int 6 . dx = 6x + c$

4- $\int 3x^4 . dx = \frac{3}{5} x^5 + c$

مثال 2: -

أوجد:

$$\int (x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3x + 8) . dx$$

الحل: -

$y = \frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 8x + c$

$y = \frac{1}{6}x^6 + x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 8x + c$

مثال 3: -

أوجد:

$$\int (4x^3 - 30x^2 + 20x + 3) . dx$$

الحل: -

$y = \frac{4}{4}x^4 - \frac{30}{3}x^3 + \frac{20}{2}x^2 + 3x + c$

$y = x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 3x + c$

2 - تكامل e^x :

$\int e^x . dx = e^x + c$

3 - تكامل e^{kx} :

$\int e^{kx} . dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$

4 - إيجاد قيمة c :

مثال 1 :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int (9x^2 - 10x + 15).dx$$

إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (4.1) أوجد قيمة c.

الحل :-

$y = \frac{9}{3}x^3 - \frac{10}{2}x^2 + 15x + c$

$y = 3x^3 - 5x^2 + 15x + c$

حيث أن قيمة $x = 4$ وقيمة $y = 1$ فإن:

$1 = 3(4)^3 - 5(4)^2 + 15 \times 4 + c$

$1 = 3 \times 64 - 5 \times 16 + 60 + c$

$1 = 172 + c$

$\rightarrow c = -171$

مثال 2:-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int (\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 7).dx$$

إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (2.3) أوجد قيمة c.

الحل: -

$y = \frac{1}{2\times4}x^4 - \frac{1}{4\times3}x^3 - 7x + c$

$y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{12}x^3 - 7x + c$

حيث أن قيمة $x = 2$ وقيمة $y = 3$ فإن:

$3 = \frac{1}{8}(2)^4 - \frac{1}{12}(2)^3 - 7 \times 2 + c$

$3 = \frac{1}{8} \times 16 - \frac{1}{12} \times 8 - 14 + c$

$3 = -\frac{38}{3} + c$

$\rightarrow c = \frac{47}{3}$

التطبيقات التجارية للتكامل: -

1- الإيراد الكلي = تكامل دالة الإيراد الحدي.

2- التكلفة الكلية = تكامل دالة التكلفة الحدية.

3- الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي.

4- الربح الكلي = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية.

مثال 1:-

إذا علمت أن دالة الإيراد الحدي تأخذ شكل:

$$R' = 3x^2 + 6x - 10$$

أوجد حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع 5 وحدات؟

الحل:-

- إيجاد دالة الإيراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الإيراد الحدي:

$$R = \frac{3}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - 10x$$
$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

← حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع 5 وحدات $(x = 5)$ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة الإيراد الكلي كما يلي:

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$
$$R = (5)^3 + 3 \times (5)^2 - 10 \times 5 = 150\ S.\ R.$$

مثال 2:-

إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية تأخذ شكل:

$$C' = 12x^3 - 60x^2 + 8x - 40$$

أوجد حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 10 وحدات؟

الحل:-

- إيجاد دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية:

$$C = \frac{12}{4}x^4 - \frac{60}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 - 40x$$
$$C = 3x^4 - 20x^3 + 4x^2 - 40x$$

← حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 10 وحدات $(x = 10)$ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة التكاليف الكلية كما يلي:

$$C = 3 \times (10)^4 - 20 \times (10)^3 + 4 \times (10)^2 - 40 \times (10)$$
$$C = 30000 - 20000 + 400 - 400 = 10000\ \text{S. R.}$$

مثال 3:-

إذا علمت أن دالة الإيراد الحدي تأخذ شكل:

$$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$$

ودالة التكاليف الحدية تأخذ شكل:

$$C' = 36x^2 + 40x - 10$$

المطلوب:

1- حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع 20 وحدة.

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة.

3- دالة الربح الحدي.

4- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين.

5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات.

الحل:-

1- حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع 20 وحدة حيث أن دالة الإيراد الحدي هي:

$$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$$

- يمكن الوصول إلى دالة الإيراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الإيراد الحدي كما يلي:

$$R=\frac{8}{4}x^4+\frac{24}{3}x^3-\frac{12}{2}x^2+20x$$
$$R=2x^4+8x^3-6x^2+20x$$

← حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع 20 وحدة $(x=20)$ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة الإيراد الكلي كما يلي:

$$R=2\times(20)^4+8\times(20)^3-6\times(20)^2+20\times(20)$$
$$R=320000+64000-2400+400=382000\ \text{S. R.}$$

-2 حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة حيث أن دالة التكاليف الحدية هي:

$$C'=36x^2+40x-10$$

- يمكن الوصول إلى دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية كما يلي :

$$C=\frac{36}{3}x^3+\frac{40}{2}x^2-10x$$
$$C=12x^3+20x^2-10x$$

← حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة $(x=25)$ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة التكاليف الكلية كما يلي:

$$C=12\times(25)^3+20\times(25)^2-10\times(25)$$
$$C=187500+12500-250=199750\ \text{S. R.}$$

-3 دالة الربح الحدي :

الربح الحدي = الإيراد الحدي – التكاليف الحدية

$$P'=R'-C'$$
$$=(8x^3+24x^2-12x+20)-(36x^2+40x-10)$$
$$=8x^3-12x^2-52x+30$$

-4 <u>الطريقة الأولى:</u> الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي

$$P'=8x^3-12x^2-52x+30$$
$$P=\frac{8}{4}x^4-\frac{12}{3}x^3-\frac{52}{2}x^2+30x$$
$$=2x^4-4x^3-26x^2+30x$$

- <u>الطريقة الثانية:</u> الربح الكلي = الإيراد الكلي – التكاليف الكلية

$$P=R-C$$
$$=(2x^4+8x^3-6x^2+20x)-(12x^3+20x^2-10x)$$
$$=2x^4-4x^3-26x^2+30x$$

-5 حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات:

- دالة الربح الكلي هي:

$$P=2x^4-4x^3-26x^2+30x$$

← وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة $(x=10)$ في المعادلة السابقة كما يلي:

$$P=2\times(10)^4-4\times(10)^3-26\times(10)^2+30\times(10)$$
$$=20000-4000-2600+300=13700\ \text{S. R.}$$

<u>مثال 4:-</u>

إذا علمت أن دالة الإيراد الحدي تأخذ شكل:

$$R'=(2x+1)(5+3x^2)$$

ودالة التكاليف الحدية تأخذ شكل:

$$C'=(3x+1)^2$$

المطلوب:

1- حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات.

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 20 وحدة.

3- دالة الربح الحدي.

4- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين.

5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 30 وحدة.

1- حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدة حيث أن دالة الإيراد الحدي هي:

$$R' = (2x+1)(5+3x^2) = 6x^3 + 3x^2 + 10x + 5$$

- يمكن الوصول إلى دالة الإيراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الإيراد الحدي كما يلي:

$$R = \frac{6}{4}x^4 + \frac{3}{3}x^3 + \frac{10}{2}x^2 + 5x$$
$$R = 1.5x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x$$

←حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدة $(x = 10)$ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة الإيراد الكلي كما يلي:

$$R = 1.5 \times (10)^4 + (10)^3 + 5 \times (10)^2 + 5 \times (10)$$
$$R = 15000 + 1000 + 500 + 50 = 16550 \text{ S. R.}$$

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 20 وحدة حيث أن دالة التكاليف الحدية هي:

$$C' = (3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

- يمكن الوصول إلى دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية كما يلي:

$$C = \frac{9}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 + x$$
$$C = 3x^3 + 3x^2 + x$$

← حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 20 وحدة $(x = 20)$ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة التكاليف الكلية كما يلي:

$$C = 3 \times (20)^3 + 3 \times (20)^2 + (20)$$
$$C = 24000 + 1200 + 20 = 25220 \text{ S. R.}$$

3- دالة الربح الحدي :

الربح الحدي = الإيراد الحدي – التكاليف الحدية

$$P' = R' - C'$$
$$= (6x^3 + 3x^2 + 10x + 5) - (9x^2 + 6x + 1)$$
$$= 6x^3 - 6x^2 + 4x + 4$$

4- الطريقة الأولى : الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي

$$P' = 6x^3 - 6x^2 + 4x + 4$$
$$P = \frac{6}{4}x^4 - \frac{6}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 + 4x$$
$$= 1.5x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$$

- الطريقة الثانية: الربح الكلي = الإيراد الكلي – التكاليف الكلية

$$P = R - C$$
$$= (1.5x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x) - (3x^3 + 3x^2 + x)$$
$$= 1.5x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$$

5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 30 وحدات :

- دالة الربح الكلي هي:

$$P = 1.5x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$$

← وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة $(x = 30)$ في المعادلة السابقة كما يلي:

$$P = 1.5 \times (30)^4 - 2 \times (30)^3 + 2 \times (30)^2 + 4 \times (30)$$
$$= 1215000 - 54000 + 1800 + 120 = 1162920 \text{ S. R.}$$

المحاضرة (١٤): مراجعة شاملة

المجموعات :-

1- أي من المجموعات التالية تم كتابتها بطريقة القاعدة:

(a) $A = \{1.\ 2.\ 3.\ \ldots.\ 100\}$

(b) $B = \{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ \ldots\}$

(c) $C = \{a.\ \ b.\ \ c.\ f\}$

(d) $D = \{x$: بعد عن والتعليم الالكتروني التعلم بنظام طالب $x\}$

2- إذا كانت المجموعة $A=\{8, 15, 90\}$ والمجموعة $B=\{k, f, r\}$ ففي هذه الحالة فإن العلاقة بين كل من المجموعتين تأخذ أي من الأشكال التالية:

(a) $A = B$

(b) $A \equiv B$

(c) $A \subset B$

(d) $B \subset A$

3- إذا كانت المجموعة الكلية $U=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ و $A=\{-3 , -2 , -1\}$ فإن $\overline{A}$ تساوي:

(a) $\{1 , 2 , 3\}$

(b) $\{-3 , -2 , -1 , 0\}$

(c) $\{0 , 1 , 2 , 3\}$

(d) $\emptyset$

4- إذا كان $A=\{4 , 6 , 9 , 15\}$ و $B=\{2 , 4 , 11\}$ فإن $A \cap B$ تساوي:

(a) $\{2 , 4 , 6 , 9 , 11 , 15\}$

(b) $\{4\}$

(c) $\{12 , 11 , 15\}$

(d) $\emptyset$

5- إذا كانت $A=\{4, 7, 9, 11\}$ و $B=\{2 ,4 ,5 ,7\}$ فإن $A - B$ تساوي:

(a) $\{2, 5\}$

(b) $\{9, 11\}$

(c) $\{2, 4\}$

(d) $\emptyset$

6- إذا كانت المجموعة $S = \{2.5.8\}$ فإن مجموعة المجموعات $P(S)$ تساوي:

(a) $\{\{2\}.\ \ \{5\}.\ \ \{8\}\}$

(b) $\{\{2.\ \ 5\}.\ \ \{2.\ \ 8\}.\ \ \{5.\ \ 8\}\}$

(c) $\{\{2\}.\ \ \{5\}.\ \ \{8\}.\{2.\ \ 5\}.\ \ \{2.\ \ 8\}.\ \ \{5.\ \ 8\}\}$

(d) $\{\{2\}.\ \ \{5\}.\ \ \{8\}.\{2.\ \ 5\}.\ \ \{2.\ \ 8\}.\ \ \{5.\ \ 8\}.\{2.\ \ 5.\ \ 8\}.\ \emptyset\}$

7- إذا احتوت المجموعة S على 3 من العناصر، فإن عدد عناصر مجموعة المجموعات $P(S)$ هو:

(a) 4

(b) 8

(c) 16

(d) 32

8- إذا كانت الفترات $A=[1,4]$ و $B=[-2,3)$ فإن $A\cup B$ تساوي:

(a) $[1,3)$

(b) $[-2,4]$

(c) $[3,4]$

(d) $[-2,1)$

الاقترانات :-

9- إذا كانت $f(x)=x^3+5x-8$ و $h(x)=2x^2+3x$ فإن $f(x)\times h(x)$ يساوي:

(a) $10x^3-x^2-24x$

(b) $x^5-3x^4+10x^3-x^2+24x$

(c) $2x^4+3x^3-10x^2-x-24$

(d) $2x^5+3x^4+10x^3-x^2-24x$

10- إذا كان $f(x)=x^4-3x^2+5$ ، وكان $h(x)=x^2-4$ فإن $f(x)\div h(x)$ يساوي:

(a) x^2-1

(b) $x+1$

(c) x^2+1

(d) $x-1$

11- إذا كانت $f(x)=\frac{-2x+1}{x-9}$ ، فإن مجال هذا الاقتران هو:

(a) R

(b) $R\backslash\{-9\}$

(c) $R\backslash(9)$

(d) $R\backslash\{0\}$

12- إذا كانت $f(x)=\frac{x}{3x+2}$ و $h(x)=\frac{5x^2+2}{2x-2}$ فإن $f(x)\div h(x)$ يساوي:

(a) $\frac{15x^3+12x^2+4x+4}{6x^2-2x-4}$

(b) $\frac{5x^3+2x}{6x^2-x-4}$

(c) $\frac{2x^2-2x}{15x^3+10x^2+6x+4}$

(d) $\frac{6x^2-x-4}{15x^3+10x^2+6x+4}$

13- إذا كانت المعادلة $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} = \frac{1}{81}$ فإن x يساوي :

(a) ± 2

(b) ± 3

(c) ± 4

(a) لا شيء مما سبق.

14- إن أبسط صورة يمكن أن يكتب عليها المقدار $\frac{e^6 . \sqrt[4]{e^{14}} . \sqrt[10]{e^6}}{e^{10} . \sqrt[10]{e}}$ هي:

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

المعادلات والمتباينات :-

15- إذا كانت المعادلة $2x - 3 = -3$ فإن:

(a) $x = 0$

(b) $x = 3$

(c) $x = -3$

(a) لا شيء مما سبق.

16- إذا كانت المعادلة $x^2 + 2x - 3 = 0$ فإن:

(a) $x_1 = 0.\ \ x_2 = -1$

(b) $x_1 = 3.\ \ x_2 = -1$

(c) $x_1 = -3.\ \ x_2 = 1$

(a) لا يوجد حل حقيقي للمعادلة.

17- إذا كان النظام التالي:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 & (1) \\ 3x + 2y = 8 & (2) \end{cases}$$

فإن حل هذا النظام يساوي:

(a) $x = 1.\ \ y = 2$

(b) $x = -2.\ \ y = -2$

(c) $x = -1.\ \ y = -2$

(d) $x = 2.\ \ y = 1$

18- إذا كانت المتباينة $x+5\geq 6$ فإن مجموعة الحل للمتباينة هي:

(a) $(1\ .\ +\infty)$

(b) $[1\ .\ +\infty)$

(c) $(-\infty\ .\ 1]$

(d) $(-\infty .\ 1)$

المتتاليات :-

19- المتتالية:

$$\frac{1}{4}.\ \frac{1}{2}.\ \frac{3}{4}.\ 1.\ \frac{5}{4}.\ \frac{3}{2}.\ \ldots$$

(a) حسابية وأساسها 4.

(b) هندسية وأساسها $\frac{1}{4}$.

(c) حسابية وأساسها $\frac{1}{4}$.

(d) ليست حسابية ولا هندسية.

20- المتتالية:

$$\frac{1}{4}.\ -\frac{3}{4}.\ \frac{9}{4}.\ -\frac{27}{4}.\ \frac{81}{4}.\ \ldots$$

(a) هندسية وأساسها -3.

(b) حسابية وأساسها $\frac{1}{2}$.

(c) هندسية وأساسها 3.

(d) ليست حسابية ولا هندسية.

21- إذا كان لدينا متتالية حسابية حدها الأول 10 وأساسها 0.5، فإن حدها العام هو:

(a) $10.5+0.5n$

(b) $9.5+0.5n$

(c) $0.5+0.5n$

(d) لا شيء مما سبق.

22- متتالية هندسية حدها الأول 5 وأساسها $6-$، فإن قيمة الحد الرابع من هذه المتتالية تساوي:

(a) 192

(b) -1458

(c) -1080

(d) لا شيء مما سبق.

23- متتالية حسابية حدها الأول 10 وأساسها 12، فإن مجموع أول عشرة حدود من هذه المتتالية يساوي:

(a) 540

(b) 640

(c) 740

(d) لا شيء مما سبق.

24- متتالية هندسية مجموع أول عشرة حدودها فيها يساوي ٢٠٤٦ وأساسها يساوي٢ ، فإن حدها الأول يساوي:

(a) 2

(b) 3

(c) 4

(d) لا شيء مما سبق.

25- قيمة المقدار $\sum_{n=4}^{10}(3n-8)$ تساوي:

(a) -91

(b) 546

(c) 91

(d) لا شيء مما سبق.

26- قيمة المقدار $\sum_{n=1}^{10}(2^{n-1})$ تساوي:

(a) 1022

(b) 1023

(c) 1024

(d) لا شيء مما سبق.

27- أودع شخص مبلغ 1500 ريال في أحد البنوك ليستثمر بمعدل فائدة بسيطة 12% سنويا، فإن جملة المبلغ المتكون له في نهاية 10 سنوات يساوي:

(a) 3300

(b) 3000

(c) 1500

(d) لا شيء مما سبق.

28- أودع شخص مبلغ 2000 ريال في أحد البنوك التجارية لكي يستثمر بمعدل فائدة مركبة 12% سنويا، فإن جملة المبلغ المتكون له في نهاية ثلاثة سنوات يساوي:

(a) 2800

(b) 2809.856

(c) 2231

(d) لا شيء مما سبق.

المصفوفات :-

29- يمكن تصنيف المصفوفة A التالية على أنها مصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 9 \\ -8 & 8 & 22 \end{bmatrix}$$

(a) مربعة ولست قطرية.

(b) مربعة وقطرية في نفس الوقت.

(c) مربعة ومحايدة في نفس الوقت.

(d) ليست مربعة ولا قطرية ولا محايدة.

30- حاصل جمع المصفوفتين A و B هو:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} ,B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(a) مصفوفة رتبتها 2×2.

(b) مصفوفة رتبتها 3×3.

(c) مصفوفة رتبتها 2×3.

(d) لا يمكن جمع هاتين المصفوفتين.

31- حاصل ضرب المصفوفتين A وB هو:

$$A_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} B_{3\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} ,$$

(a) مصفوفة رتبتها 2×2.

(b) مصفوفة رتبتها 3×3.

(c) مصفوفة رتبتها 2×3.

(d) لا يمكن ضرب هاتين المصفوفتين.

32- إذا علمت أن:

$$C = \begin{bmatrix} 50 & 3 & 90 \\ 6 & -5 & -8 \end{bmatrix} . \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad A = \begin{bmatrix} 50 & 6 \\ 3 & -5 \\ 90 & -8 \end{bmatrix}$$

فإن ناتج ضرب المصفوفتين A و B هو:

(a) A

(b) B

(c) C

(d) لا شيء مما سبق

33- إذا علمت أن:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن منقول المصفوفة A هو:

(a) B

(b) C

(c) D

(d) لا شيء مما سبق

34- إذا علمت أن:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن معكوس المصفوفة A هو:

(a) B

(b) C

(c) D

(d) لا شيء مما سبق

المحددات :-

35- قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 50 & 6 \\ 3 & -5 \\ 90 & -8 \end{vmatrix}$ تساوي:

(a) -123

(b) 123

(c) 0

(d) هذا المحدد غير معرف.

36- قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 9 \\ -9 & 3 & -6 \\ 4 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ تساوي:

(a) -63

(b) 63

(c) 0

(d) هذا المحدد غير معرف.

37- قيمة المحدد $\begin{vmatrix} -8 & 12 \\ -1 & -7 \end{vmatrix}$ تساوي:

(a) -24

(b) 2

(c) 68

(d) هذا المحدد غير معرف.

38- قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ تساوي:

(a) 6

(b) 2

(c) 0

(d) هذا المحدد غير معرف.

39- قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ تساوي :

(a) 0

(b) 10

(c) 20

(d) 24

40- إذا علمت نظام المعادلات التالي :

$$30x + 7y = 405$$
$$12x - 19y = -165$$

فإن قيمة Δ_x تساوي:

(a) -560

(b) -420

(c) -6540

(d) لا شيء مما سبق

التفاضل :-

41- إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما تمثل بالدالة $(D = 20 - 2x)$ فيمكن وصف الطلب على هذه السلعة عند سعر 100ريال والكمية المطلوبة 50 وحدة على أنه طلب:

(a) عديم المرونة.

(b) متكافئ المرونة.

(c) مرن.

(d) لا نهائي المرونة

42- إذا علمت أن دالة الربح الكلي هي $(P = 50 + 2x - x^2)$ فإن نوع نهاية هذه الدالة هي نهاية:

(a) صغرى.

(b) عظمى.

(c) صغرى وعظمى في نفس الوقت.

(d) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن الإيراد الكلي لإحدى الشركات تأخذ الشكل $(R = 4x^3 - 10x^2 + 8x + 20)$ ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل $(C = 15x^2 - 2x + 36)$ فإن :

43- حجم الإيراد الحدي R' عند إنتاج وبيع 5 وحدات يساوي:

(a) 208

(b) 192

(c) 200

(d) لا شيء مما سبق.

44- حجم التكاليف الحدية C' عند إنتاج وبيع 20 وحدة يساوي:

(a) 600

(b) 200

(c) 14925

(d) لا شيء مما سبق.

45- دالة الربح الحدي P' هي:

(a) $4x^3 - 25x^2 + 10x - 16$

(b) $10x^3 - x^2 - 16x - 20$

(c) $12x^2 - 50x + 10$

(d) لا شيء مما سبق.

46- حجم الربح الحدي P' عند إنتاج وبيع 10 وحدات يساوي:

(a) 199

(b) 198

(c) 710

(d) لا شيء مما سبق.

التكامل :-

إذا علمت أن دالة الإيراد الحدي لإحدى الشركات تأخذ الشكل $(R' = 60x^2 + 20x - 25)$ ودالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل $(C' = 20x + 40)$ فإن :

47- حجم الكلي الحدي R عند إنتاج وبيع 10 وحدات يساوي:

(a) 20750

(b) 20000

(c) 21750

(d) لا شيء مما سبق.

48- حجم التكاليف الكلية C عند إنتاج وبيع 10 وحدة يساوي:

(a) 400

(b) 1400

(c) 1000

(d) لا شيء مما سبق.

49- دالة الربح الكلي P هي:

(a) $60x^3 + 20x^2 + 10x$

(b) $20x^3 - 20x^2 - 65x$

(c) $20x^3 - 65x$

(d) لا شيء مما سبق.

50- حجم الربح الكلي P عند إنتاج وبيع 10 وحدات يساوي:

(a) 18350

(b) 19350

(c) 20350

(d) لا شيء مما سبق.

دعواتي لكم بالتوفيق

لا تنسوني من دعواتكم

أختكم/أم حنان