جامعة الملك فيصل

١٣٩٥ ١٩٧٥

KING FAISAL UNIVERSITY

مقرر

الرياضيات 1

د. حسين عرفه

تم اعداده من قبل

qabor

2019-1440

المحاضرة الأولى

مجموعة الأعداد الطبيعية والتي يمكن عرضها كما يلي: ... , 5 ,4 , 3 , 2 , 1
وهذه الأعداد تستخدم في العد وتبدأ بالعدد 1 ثم يلي ذلك مضاعفته إلى مالا نهاية من الأعداد.
مجموعة الأعداد الصحيحة وهي التي تتكون من نسخة موجبة للأعداد الطبيعية وأخرى سالبة بالإضافة للعدد 0، كما يلي:
... , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 , 0 ,1- , 2- , 3- , 4- , 5- , ...
ومن مميزات المجموعتين السابقتين أن حاصل جمع أي عددين ينتميان لهاتين المجموعتين سوف ينتمي إلى **المجموعة الأصلية**. فعلى سبيل المثال عند جمع العدد 2 إلى العدد 3 وهما عددان طبيعيان وصحيحان في آن واحد فإن حاصل جمعها وهو العدد 5 هو عدد طبيعي وصحيح. في **حين أن حاصل طرح** العدد 2 من العدد 3 هو 1- وهو عدد صحيح ولكنه ليس عددا طبيعيا .... **وكذلك الحال بنسبة الى الضرب والقسمة الضرب مثل الجمع والقسمة مثل الطرح**
مجموعة الأعداد النسبية وهي عبارة عن جميع الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة **كسر** بحيث أن a وb عددان صحيحان والعدد b ≠ 0. ومن بعض الأمثلة على هذه الأعداد: 2/3 ، 1/2- ، 7/12.
ومن ميزات الأعداد النسبية أن **حاصل جمع أو طرح** أي عددين نسبيين هو **عدد نسبي وكذلك حاصل ضرب أو القسمة** أي عددين نسبيين هو عدد نسبي
الأعداد الحقيقية هي مجموعة جميع الأعداد سواء **الطبيعية** و**الصحيحة** و**النسبية** و**غير النسبية**. ويرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية بالرمز R
المتباينات:
اذا ضربنا او قسمنا او جمعنا او طرحنا طرفين المتباينة فان المتباينة تبقى صحيحة مثال .....1*6>1*5 - 1+6>1+5
في حال ضربنا او قسمنا طرفي المتبانية بعدد سالب فان إشارة المتبانية تعكس من اكبر من الى اصغر من والعكس.
الكسور:
هو **العدد النسبي** الذي يكتب على شكل ½ بحيث يكون كلاهما عدد صحيح بشرط ان لا يكون المقام يساوي صفر
عمليات على الكسور
1- اختصار الكسر: مثال 21/15 هي عبارة عن 5*3/7*3 يختصر الكسر بحذف كل من الأرقام المتشابه ليصبح الكسر 7/5
2- عمليات الجمع والطرح: وذلك بتوحيد المقامات وتكون بعد **تبسيط الكسور** لأبسط صورة: مثال 5/2+5/4 = 5/2+4 = 5/6
3- في حال اختلفت المقامات نقوم بضرب البسط على مقام الاخر ومن ثم نجمع الناتج لكلا البسطين وضرب المقام بالمقام الاخر فقط.
5/2 * 3/4 = 3*2 و 5*4 = 5/6 * 3/20 =20+6/ 3*5 = 15/26
3- عمليات الضرب الكسور: نضرب البسط مع البسط والمقام مع المقام ومن ثم **نقوم** بتبسيط الكسر
4- قسمة الكسور: عند قسمة كسر على كسر نقوم بتحويل العملية القسمة الى عملية ضرب بجعل البسط مكان المقام والعكس للكسر الثاني. مثال 4/2 تقسيم 1/8 نقوم بتحويل العملية الى ضرب ليصبح 4/2 * 8/1.
الأسس:
1- اذا كان العدد الحقيقي لا يساوي صفر واسه 0 مثال: $5^0 = 1$
2- اذا كان الاس سالب 5^{-3} فالحل إضافة بسط ومقام $1/5^3$
3- في حال ضرب الأعداد لرقم مكرر واحد والأسس مختلف: $a^n X a^m = a^{n\,x\,m}$
4- في حال قسمة اعداد مكرره واحده والأسس مختلف نطرح الاس من بعضه: $a^n / a^m = a^{n-m}$
5- في حال كان للعدد اس داخل القوس و خارج القوس $(2^3)^2$ نقوم بضرب الاس الداخل بالخارج: $2^{2*6} = 2^{12}$
6- في حال كان أكثر من عدد داخل القوس واس واحد نجعل الاس لكل عدد ونخرجه من القوس $(2x3)^2 = 2^3 * 3^2$

نهاية المحاضرة الأولى

المحاضرة الثانية

المجموعات: نرمز لأسم المجموعات بحرف الكبير A ونرمز لعناصر المجموعة بحرف صغير a. يشترط للمجموعات ان تكون عناصرها محددة.

طريقة كتابة المجموعات: أ- طريقة السرد: نكتب جميع العناصر ونجعل بينها فاصلة شرط ان يذكر نفس العنصر المكرر مره واحدة فقط.

ب- طريقة القاعدة / الصفة المميزة: A={x: 3<x<1} شرح (:) تعني حيث انه – وبعد النقطتين تسمى القاعدة.

أنواع المجموعات: أ- المجموعة الخالية: ونرمز لها برمز الفاي Φ او نكتب قوسين فارغين.

ب- المجموعة الكلية: او الشاملة تتكون من عدة مجموعات جزئية. نرمز لها برمز U مثال أسماء طلاب ومعلمين جامعة الملك فيصل بحيث ان أسماء الطلاب والمعلمين مجموعتين منفصلتين.

ج-المجموعة الجزئية: بحيث تكون المجموعة الأولى جزء من المجموعة الثانية ونرمز لها برمز C.

ملاحظة: اذا كانت المجموعتين متساويتين فيمكن القول بان المجموعة الأولى جزء من الثانية و الثانية جزء من الأولى.

علامة المتكافئ ≡ ومعناها بان المجموعتين متكافئتين بالعدد فقط. وعلامة = تعني بان المجموعتين متساويتين بنفس العناصر والعدد.

د- المجموعة المتممة: متمم المجموعة A هو باقي العناصر الموجودة في المجموعة الكلية U ولم تذكر في المجموعة A يرمز لها بحرف المجموع ونضع فوقها شرطة.

العمليات على المجموعات:

الاتحاد -هو كل العناصر الموجودة في A وB بشرط عدم تكرار أي عنصر.

التقاطع – هو كل العناصر المشتركة بين المجموعتين أي العناصر المتكررة في المجموعة AوB.عكس الاتحاد

الفرق – وتشبه عملية الطرح بمعنى ماهي العناصر الموجودة في A وغير موجودة في B بمعنى أخر نطرح كل عنصر مشترك بين المجموعتين ونكتب الباقي. وتكتب بطريقة هذه A-B.

مجموعة المجموعات: نرمز لها برمز P(s)

مثال انشاء مجموعة المجموعات للمجموع { Φ .{2.5},{5},{2} } =P(s) = s={2,5}

نهاية المحاضرة الثانية

المحاضرة الثالثة

تعريف الاقتران

يعرف الاقتران f بأنه قاعدة (rule) تعطي قيمة وحيدة كنتيجة لتعويض قيمة المتغير x فيه وتمثل هذه القيمة أو النتيجة قيمة y المقابلة لقيمة x المستخدمة بالتعويض. أي أن:

$x \rightarrow y = f(x)$

$: A \rightarrow B\ f$

ملاحظة: إذا كان f اقتران من A إلى B فإن A يسمى **مجال** الاقتران ويسمى B **بالمجال المقابل** كما تسمى مجموعة الصور **بالمدى**.

حتى يكون f اقتران لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال صورة وصورة واحدة فقط في المجال المقابل.

اقتران كثير الحدود :

الاقتران على الصورة :-

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. + a_1 x + a$

و تكون درجة كثير الحدود بقيمة أعلى أس لـ (x) في الاقتران.

مثال :-

ما هي درجة كل من الاقترانات كثيرة الحدود التالية :-

1) $f(x) = 3$

2) $f(x) = 3x - 4$

3) $f(x) = x^2 - x + 1$

4) $f(x) = x^3 + x^7 + 5x - 7$

5) $f(x) = 2 - 3x + x^3$

الحل:-

1) الدرجة الصفرية ويسمى أيضا بالاقتران الثابت.

2) الدرجة الأولى ويسمى أيضا بالاقتران الخطي.

3) الدرجة الثانية ويسمى أيضا بالاقتران التربيعي.

4) الدرجة السابعة.

5) الدرجة الثالثة ويسمى أيضا بالاقتران التكعيبي.

العمليات الحسابية على الاقترانات النسبية:

1- الجمع و الطرح :-

يتم الجمع أو طرح كثيرات الحدود بجمع أو طرح معاملات المتغيرات المتشابهة الأسس.

مثال (1) :

جد ناتج ما يلي:

1/ $(3x^3 - 4x^2 + 6) + (x^4 - 2x^3 - 4x + 3)$

الحل :- ***نضع المعادلة فوق بعضها مع مراعاة الاس الكبر ليسهل عملية الحل***

ملاحظة من الشرح: سالب ضرب سالب = سالب , سالب ضرب موجب = موجب , موجب ضرب موجب = موجب.

$(\quad 3x^3 - 4x^2 \qquad + 6)$

$+$

$(x^4 - 2x^3 \qquad - 4x + 3)$

$=$

$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 9$

مثال (2) :

جد ناتج ما يلي:

2/ $(6x^5 + 3x^3 - 4x + 5) - (3x^5 + x^4 - 2x^2 - 4x + 7)$

الحل :-

$(6x^5 + 3x^3 - 4x + 5) - (3x^5 + x^4 - 2x^2 - 4x + 7) = 3x^5 - x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 2$

2- الضرب :-

يتم ضرب كثيري حدود $f(x)$، $h(x)$ بضرب كل حد من حدود $f(x)$ بكافة حدود $h(x)$.

بعد إتمام علمية الضرب يتم جمع المتشابه ونبدأ بالاس الأكبر. في حالة الضرب يتم جمع الأسس.

مثال (1):

اذا كان $f(x) = (3x^2 - 5x + 4)$ ، وكان $h(x) = (x^2 + 2x - 1)$ فجد $(f.h)(x)$.

الحل :-

$(f.h)(x) = (3x^2 - 5x + 4)(x^2 + 2x - 1)$

$= 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 5x^3 - 10x^2 + 5x + 4x^2 + 8x - 4$

$= 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 13x - 4$

نقوم بضرب الحد الأول في جميع حدود الطرف الثاني ثم الحد الثاني في الطرف الأول في جميع حدود الطرف الثاني .... ثم نقوم بالجمع على أساس الاس الأكبر

مثال (2):

اذا كان $f(x) = (2x^2 + 3x)$ ، وكان $h(x) = (x^3 + 5x - 8)$ فجد $(f.h)(x)$.

الحل :-

$(f.h)(x) = (x^3 + 5x - 8)(2x^2 + 3x)$

$= 2x^5 + 10x^3 - 16x^2 + 3x^4 + 15x^2 - 24x$

$= 2x^5 + 3x^4 + 10x^3 - x^2 - 24x$

3- القسمة:-

يتم قسمة كثيري حدود باستخدام خوارزمية القسمة الطويلة.

مثال (1):

اذا كان $f(x) = (x^4 - 3x^2 + 5)$ ، وكان $h(x) = (x^2 - 4)$ فجد $f(x) \div h(x)$.

الحل :-

ويكون ناتج القسمة $x^2 + 1$ وباقي القسمة 9.

$$
\begin{array}{r|l}
 & X^2 + 1 \\
\hline
X^2 - 4 & X^4 - 3X^2 + 5 \\
 & -X^4 + 4X^2 \\
\cline{2-2}
 & X^2 + 5 \\
 & -X^2 + 4 \\
\cline{2-2}
 & 9
\end{array}
$$

الاقتران النسبي:

الاقتران النسبي هو اقتران مكون من كثيري حدود على شكل بسط ومقام على الصورة كثير الحدود.

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, $h(x) \neq 0$, $g(x)$, $h(x)$ كثيري حدود

مجال الإقتران: هو جميع الأعداد الحقيقية التي يعرف عليها الأقتران، بمعنى أنه جميع الأعداد الحقيقية التي يمكن ان نعوض بها في المتغير X بدون ان يصبح المقام مساوياً للصفر.

ولتحديد مجال الاقتران يتم مساواة المقام بالصفر لمعرفة ما هي القيم التي لا تصلح ان تكون مجالا للاقتران ومن ثم تصبح جميع الأعداد الحقيقية R مجالا للاقتران ما عدا القيم التي تجعل المقام مساوياً للصفر

مثال (1):- بسيط لا يحتاج حل بالة الحاسبة

ما هو مجال كل من الاقترانات النسبية التالية :

1- $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

2- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

3- $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-4}}$

الحل :-

1- $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

يكون الاقتران النسبي معرف على الاعداد الحقيقية عدا اصفار المقام وفي هذ الاقتران لا يوجد عدد حقيقي يجعل المقام صفر، إذاً مجال الاقتران يساوي R.

2- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

نساوي المقام بالصفر فيكون x-1 = 0 ← x = 1 ، إذا المجال $R\backslash\{1\}$.

3- $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-4}}$

يكون الاقتران معرف عندما يكون $x^2 - 4 > 0$ ، ولإيجاد مجال الاقتران نجعل $x^2 - 4 = 0$ و نبحث في اشارة الاقتران $x^2 = 4$ x = ± 2 ، ويكون مجال الاقتران موجب على $R\backslash[-2, 2]$، وهذا هو مجال الاقتران النسبي.

ملاحظة من الشرح : اذا اردنا التخلص من الجذر نقوم بربيعه.

العمليات الحسابية على الاقترانات النسبية:

1- الجمع والطرح :-

توحد المقامات كما في الأعداد.

مثال (1):

اوجد ناتج ما يلي :

- $\frac{X+1}{2X-5} + \frac{3X+1}{X-2}$

الحل :-

- $\frac{X+1}{2X-5} + \frac{3X+1}{X-2} = \frac{(X+1)(X-2)}{(2X-5)(X-2)} + \frac{(3X+1)(2X-5)}{(X-2)(2X-5)}$

$= \frac{(X^2-X-2)+(6X^2-13X-5)}{(X-2)(2X-5)}$

$= \frac{7X^2-14X-7}{2X^2-9X+10}$

مثال (2): اوجد ناتج ما يلي :-

■ $\frac{X}{3X+2}+\frac{5X^2+2}{2X-2}$

الحل :-

■ $\frac{X}{3X+2}+\frac{5X^2+2}{2X-2}=\frac{(X)(2X-2)}{(3X+2)(2X-2)}+\frac{(5X^2+2)(3X+2)}{(2X-2)(3X+2)}$

$=\frac{(2X^2-2X)+(15x^3+10X^2+6X+4)}{(3X+2)(2X-2)}$

$=\frac{15X^3+12X^2+4X+4}{6X^2-2X-4}$

2- الضرب :-

نضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

مثال (1):-

■ $\frac{2X+3}{X+1}\times\frac{X-2}{3X+4}$

الحل:-

■ $\frac{2X+3}{X+1}\times\frac{X-2}{3X+4}=\frac{(2X+3)(X-2)}{(X+1)(3X+4)}=\frac{2X^3-X-6}{3X^2+7X+4}$

مثال (2):-

■ $\frac{X^2+10}{2X+5}\times\frac{3X-5}{X+2}$

الحل:-

■ $\frac{X^2+10}{2X+5}\times\frac{3X-5}{X+2}=\frac{(X^2+10)(3X-5)}{(2X+5)(X+2)}=\frac{3X^3-5X^2+30X-50}{2X^2+9X+10}$

3- القسمة :-

نحول عملية القسمة إلى عملية ضرب بقلب الكسر الثاني فقط البسط بدل المقام والعكس.

مثال:-

■ $\frac{3X+2}{X^2+1}\div\frac{X+5}{X^2}$

الحل:-

■ $\frac{3X+2}{X^2+1}\div\frac{X+5}{X^2}=\frac{3X+2}{X^2+1}\times\frac{X^2}{X+5}$

$=\frac{3X^3+2X^2}{X^3+5X^2+X+5}$

الاقتران الاسي:

الاقتران الأسي هو اقتران مجاله الأعداد الحقيقية ومجاله المقابل الاعداد الحقيقية الموجبة، أي أن:

$$f: R \longrightarrow R^+$$

$$x \longmapsto f(x) = a^x$$

حيث a عدد حقيقي موجب. يسمى a: الأساس، x الاس. ومن الأمثلة على الاقترانات الاسية:

- $f(x) = 10^x$ *يسمى الاقتران العشري*
- $f(x) = e^x$ *يسمى الاقتران الطبيعي*
- $f(x) = 2^x$ *يسمى اقتران اسي*

-اذا كان الاساس e فان الاقتران يسمى اقتران الاس الطبيعي.

- اذا كان الاساس يساوي 10 فان الاقتران يسمى الاس العشري.

قوانين الأسس:

1- $a^x . a^y = a^{x+y}$

2- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

3- $(a^x)^y = a^{xy}$

4- $a^x . b^x = (ab)^x$

5- $a^0 = 1$

6- $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

7- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

قاعدة : عند الضرب نجمع الأسس و عند القسمة نطرح الأسس.

- أي رقم اسه صفر = واحد
- اذا كان الجذر

- $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$
- $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}$
- $\sqrt[4]{x} = \frac{1}{4}$
- $\sqrt[3]{x^4} = \frac{4}{3}$

مثال (1):-

بسط المقادير التالية إلى أبسط صورة:

1) $\frac{(x^2y^7)(x^2y)}{x^3y^{-1}}$

2) $\frac{(10^2 \times 6^4)^2}{10^3 \times 6^7}$

حل المعادلات الأسية:

تعتمد فكرة حل المعادلة الأسية (إيجاد قيمة المتغير فيها) على التحليل إلى العوامل الأولية واختصار الحدود الأسية إلى أبسط صورة باستخدام قواعد الأسس المختلفة وكذلك الاستفادة من القاعدة التالية إذا تساوت الأساسات في الحدود الأسية المتساوية تتساوى الأسس.

$$10^{x} = 10^{7}$$

أي أن:

$$x = 7$$

مثال (2):-

حل المعادلات الاسية التالية:

1) $3^{2x-1} = 243$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{16}$

الحل:- ***لحل المعادلة نخرج قيمة الاس في المعادلة***

1) $3^{2x-1} = 243 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^{5}$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 5$$

$$\Rightarrow 2x = 6$$

$$\Rightarrow x = \frac{6}{2}$$

$$\Rightarrow x = 3$$

1- نضرب 3 في أسس من 1 حتى يعطينا الناتج أي 3^1 =3 .. و 3^2=.. وهكذا حتى يعطيني الناتج 243 وهو ناتج 3^5.
2- $2x-1 = 5$ أي انه الاس يساوي 5
3- لتخلص من السالب نقوم بتحويلة الى بعد علامة = ليصبح موجب
4- نقوم بجمع 1+5 ليعطيني الناتي 6.
5- نعوض بشكل بسط و مقام مع الاخذ في الاعتبار قيمة x في المقام.

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4}$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$

نهاية المحاضرة الثالثة

المحاضرة الرابعة

المعادلات :

يحتل موضوع المعادلات مكانه كبيرة في علم الرياضيات وهو من أقدم المواضيع التي طرحت للبحث، وفي هذه الوحدة سنتطرق إلى حل المعادلات الخطية والتربيعية بالإضافة إلى حل انظمة المعادلات، نظام معادلتين بمجهولين، ويقصد بحل المعادلة هي ايجاد قيمة المتغير أو المتغيرات الموجودة في المعادلة

إن المعادلة الخطية هي معادلة في متغير واحد ومن الدرجة الاولى أي أن أكبر أس في المعادلة هو واحد والشكل العام للمعادلة الخطية هو :- ax + b = 0 ..

طريقة الحل على الالة الحاسبة بكتابة المعادلة بشكل مباشر على الالة.

مثال :-

حل المعادلة الخطية التالية :-

2x – 3 = 0 ***أي رقم بعد الاكس ينقل الى الطرف الاخر مع اختلاف العلامة***

الحل :- *: يمكن الحل عن طريق الالة الحاسبة*

$2x - 3 = 0 \quad \_ \quad 2x = 3 \quad \_ \quad x = \frac{3}{2}$

مثال: حل المعادلات الخطية التالية: : *يمكن الحل عن طريق الالة الحاسبة*

1- $5x \ - 7 = 8$
2- $9x \ + 25 = 43$

الحل :-

$5x \ - 7 = 8 \quad \_ \quad 5x = 8 + 7 \quad \_ \quad 5x = 15 \quad \_ \quad \frac{x}{5} = \frac{15}{5} = 3$

المثال الثاني: *يمكن الحل عن طريق الالة الحاسبة*

$9x \ + 25 = 43 \quad \_ \quad 9x = 43 - 25 \quad \_ \quad 9x = 18 \quad \frac{x}{9} = \frac{18}{9} = 2$

المعادلة التربيعية : *يكون أكبر أس فيها هو أثنين وتأخذ الصورة:* $ax^2 + bx + c = 0$

وهناك العديد من الطرق لحل هذه المعادلة ولكننا سوف نعتمد على طريقتين هما:

1- *طريقة الفرق بين مربعين*
2- *طريقة القانون العام للحل ويأخذ القانون العام الشكل التالي:*

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويسمى المقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ *هو ما أسفل الجذر بالمميز.*

1- الفرق بين مربعين:

ويكون الحل بهذه الطريقة لحالة خاصة من المعادلات التربيعية التي تكون على الصورة

$$x^2 - a^2 = 0$$

ويكون حلها على الصورة:

$$(x-a)(x+a) = 0$$

$$x = a\,,\ x = -a$$

مثال: حل المعادلات التربيعية التالية يمكن الحل عن طريق الالة الحاسبة (كتابتها بشكل مباشر)

1- $x^2 - 4 = 0$
2- $9x^2 - 25 = 0$

الحل

- نقوم بتحويل المعادلة الى شكل المعادلة التربيعية عن طريق تطبيق قواعد الأسس.
- 9= $3^2x^2 = (3^2)^2 = 3^3$

1- $(x-2)(x+2) = 0$

$x = 2\,,\ x = -2$

2- $(3x-5)(3x+5) = 0$

$3x = 5 \ \rightarrow x = \frac{5}{3}\,,\ 3x = -5 \ \rightarrow x = \frac{-5}{3}$

<u>القانون العام للحل:</u> ويستخدم لحل جميع المعادلات التربيعية

طريقة الحل على الالة الحاسبة Mode – 5- 3

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

و هناك ثلاث حالات للحل بهذه الطريقة و هي : وقد تغني عن استخدام القانون .

<u>1 – الحالة الأولى :</u> اذا كان المميز $(\Delta > 0)$ فيوجد حلين للمعادلة.

$$\left(x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

<u>2 – الحالة الثانية :</u> اذا كان المميز $(\Delta = 0)$ فيوجد حل وحيد للمعادلة. $x = \frac{-b}{2a}$

<u>3 – الحالة الثالثة :</u> اذا كان المميز $(\Delta < 0)$ فلا يوجد حل حقيقي للمعادلة. لا يوجد في الرياضيات جذر للسالب.

<u>مثال :-</u> حل المعادلات التربيعية التالية : يمكن الحل عن طريق الالة الحاسبة.

1) $x^2 + 2x - 3 = 0$
2) $3x^2 - 4x + 5 = 0$
3) $x^2 - 2x + 1 = 0$

A^2 + **B + C = 0**

1-	A = 1	B = 2	C = -3
2-	A = 3	B = -4	C = 5
3-	A = 1	B = -2	C= 1

الحل :-

نستخدم معادلة المميز B^2 -4ac

1) $\underline{x^2 + \ 2x \ - 3 = 0}$

a = 1 , b = 2 , c = -3

$\Delta = (2)^2 \ - 4 \ \times 1 \ \times -3 = 16 \ > 0$

∴ يوجد حلين للمعادلة هما :

■ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \ = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2\times 1} = -3$ ■ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2\times 1} = 1$

مثال :- *يمكن الحل عن طريق الالة الحاسبة*

2) $\underline{3x^2 \ - 4x + 5 = 0}$

a = 3 , b = -4 , c = 5

$\Delta = (-4)^2 \ - 4 \ \times 3 \ \times 5 = -44 \ < 0$

∴ *لا يوجد حل حقيقي للمعادلة.*

مثال :- *يمكن الحل عن طريق الالة الحاسبة*

3) $\underline{x^2 \ - 2x + 1 = 0}$

a = 1 , b = -2 , c = 1

$\Delta = (-2)^2 \ - 4 \ \times 1 \ \times 1 = 4 - 4 = 0$

∴ *يوجد حل وحيد للمعادلة هو :*

■ $x = \frac{-b}{2a} = \frac{--2}{2\times 1} = \frac{2}{2} = 1$

امثلة :- *حل المعادلات التربيعية التالية : يمكن الحل عن طريق الالة الحاسبة*

1) $4x^2 + \ 5x = -6$

2) $5x^2 \ - 2x = 0$

3) $3x^2 \ - 6x = -3$

الحل :- *يمكن الحل عن طريق الالة الحاسبة*

1) $\underline{4x^2 + \ 5x + 6 = 0}$

a = 4 , b = 5 , c = 6

$\Delta = (5)^2 \ - 4 \ \times 4 \ \times 6 = -71 \ < 0$

∴ *لا يوجد حل حقيقي للمعادلة.*

حل المثال:- يمكن الحل عن طريق الالة الحاسبة

2) $5x^2 - 2x = 0$

a = 5 , b = -2 , c = 0

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 \times 0 = 4 > 0$

∴ يوجد حلين للمعادلة هما :-

■ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{4}}{2\times 5} = \frac{2 - \sqrt{4}}{10} = 0$

■ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{4}}{2 \times 5} = \frac{2 + \sqrt{4}}{10} = 0.4$

حل المثال:- يمكن الحل عن طريق الالة الحاسبة

3) $3x^2 - 6x + 3 = 0$

a = 3 , b = -6 , c = 3

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0$

∴ يوجد حل وحيد للمعادلة هو :

■ $x = \frac{-b}{2a} = \frac{--6}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$

أنظمة المعادلات الخطية:

يكون الشكل العام لنظام المعادلات الخطية كالآتي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

حيث m تمثل عدد المعدلات، n عدد المتغيرات.

ستكون دراستنا في هذه الوحدة متعلقة بحل نظام معادلتين بمجهولين بطريقتين الحذف والتعويض.

يكون نظام معدلتين بمجهولين على الصورة :

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

طريقة الحل على الالة الحاسبة طريقة الحل : ALPHA – MODE – 5 – 1

ندخل المعادلة الأولى والثاني ثم = تظهر نتيجة x ثم = تظهر نتيجة y

أ- حل النظام بطريقة الحذف:

يمكن حل هذا النوع من المعادلات باستخدام طريقة الحذف، حيث نجعل معاملات أحد المتغيرين في المعادلتين نفس القيمة ولكن بإشارتين مختلفتين ثم نجمع المعادلتين ونجد منها قيمة المتغير الآخر ثم نعوض قيمته في أحدى المعادلتين ونجد قيمة المتغير الأول.

مثال 1:- يمكن الحل عن طريق الالة الحاسبة

حل النظام التالي من المعادلات بطريقة الحذف:

$$2x + 3y = 7$$

$$3x + 2y = 8$$

الحل :-

نضرب المعادلة الأولى في (-2) و الثانية في (3) لحذف المتغير y فتصبح المعادلتين:

$$-4x - 6y = -14$$

$$\underline{9x + 6y = 24} \qquad \text{نجمع}$$

$$5x = 10$$

$$\Longrightarrow x = 2$$

نعوض بقيمة x في المعادلة الثانية :

$$\Longrightarrow 3\times(2) + 2y = 8 \Longrightarrow 6 + 2y = 8 \Longrightarrow 2y = 2 \Longrightarrow y = 1$$

ب - حل النظام بطريقة التعويض:

يتم وضع متغير بدلالة الآخر من إحدى المعادلتين ثم التعويض في المعادلة الأخرى.

مثال 2:- يمكن الحل عن طريق الالة الحاسبة

حل النظام التالي من المعادلات بطريقة التعويض:

$$x + 3y = 2 \qquad (1)$$

$$2x + 5y = 3 \qquad (2)$$

الحل :-

نضع x بدلالة y من المعادلة الأولى لتصبح:

$$x = 2 - 3y \qquad (3)$$

نعوضها في المعادلة الثانية:

$$2(2 - 3y) + 5y = 3 \Longrightarrow 4 - 6y + 5y = 3 \Longrightarrow -y = -1 \Longrightarrow y = 1$$

نعوض قيمة y في المعادلة الثالثة لإيجاد قيمة x.

$$x = 2 - 3(1) = -1$$

مثال 2:- يمكن الحل عن طريق الالة الحاسبة

حل النظام التالي من المعادلات بطريقتين:

$3x + 4y = 9 \quad (1)$

$2x + 3y = 7 \quad (2)$

الحل بطريقة الحذف:

نضرب المعادلة الأولى في (-2) و الثانية في (3) لحذف المتغير y فتصبح المعادلتين:

$-6x - 8y = -18$

$\underline{6x + 9y = 21}$ نجمع

$y = 3$

نعوض في المعادلة الأولى:

$\Longrightarrow 3x + 4(3) = 9 \Longrightarrow 3x + 12 = 9 \Longrightarrow 3x = -3 \Longrightarrow x = -1$

الحل بطريقة التعويض:

نضع x بدلالة y من المعادلة الأولى لتصبح:

$3x = 9 - 4y$

$\Longrightarrow x = 3 - \frac{4}{3}y$

نعوضها في المعادلة الثانية:

$2(3 - \frac{4}{3}y) + 3y = 7 \Longrightarrow 6 - \frac{8}{3}y + 3y = 7 \Longrightarrow \frac{1}{3}y = 1 \Longrightarrow y = 3$

نعوض قيمة y في المعادلة الثالثة لإيجاد قيمة x.

$x = 3 - \frac{4}{3}(3) = 3 - 4 = -1$

تمرين:-

حل النظام التالي من المعادلات بطريقتين:

$3x + 2y = 2 \quad (1)$

$5x - y = 12 \quad (2)$

خلاصة الدرس .. طرق استخدام الالة الحاسبة:

المعادلات الخطية : تكتب بشكل مباشر في الالة الحاسبة.

المعادلات التربيعية : Mode – 5- 3

معادلتين بمجهولين : : ALPHA – MODE – 5 – 1

نهاية المحاضرة الرابعة

المحاضرة الخامسة

(المتباينات والمتتاليات)

المتباينة هي أي عبارتين جبريتين يربط بينهما احدى ادوات الربط التالية (<) أقل من (>) أكبر من ، (≤) أكبر من أو يساوي ، (≥ أقل من أو يساوي ومن الأمثلة على المتباينات:

$x < 2$

$x + 1 \leq -3$

$x^2 + 2x + 5 \geq 0$

تعريف: تسمى مجموعة كل قيم *(x)* التي يمكن أن نعوضها في المتباينة بغض النظر عن صحتها بمجموعة التعويض، وهذه المجموعة تعطى في السؤال وتكون عادة إحدى مجموعات الاعداد وفي كل امثلتنا في هذه الوحدة ستكون مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الحقيقية ***"R"***.

تعريف: تسمى مجموعة قيم *x* التي تجعل المتباينة صحيحة (أي التي تكون حلاً للمتباينة) مجموعة الحل للمتباينة.

مجموعة الحل تكون مجموعة جزئية من مجموعة التعويض.

مثال 1:

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات التالية:

1- $3x - 2 > x + 1$

2- $x^2 - 5x \geq -6$

3- $x^3 + 3x^2 + 2x \leq 0$

الحل :-

مجموعة الحل لأي متباينة تكون مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

1- $3x - 2 > x + 1$

$3x - x > 1 + 2$

$2x > 3$

$x > \frac{3}{2}$

∴ تكون مجموعة الحل هي الفترة المفتوحة $(\frac{3}{2} , \infty)$.

2- $x^2 - 5x \geq -6$

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$

يتم حل المتباينة كأنها معادلة تربيعية بطريقة القانون العام كما يلي:

$a = 1 , b = -5 , c = 6$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$$

∴ يوجد حلين للمعادلة هما :

$$\blacksquare\ x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2$$

$$\blacksquare\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 3$$

نبحث في اشارة الاقتران عن طريق خط الاعداد وتكون اشارة الاقتران التربيعي عكس اشارة x^2 ما بين الجذرين و نفس إشارة x^2 خارج الجذرين.

ثم تكون مجموعة الحل على حسب إشارة المتباينة كما يلي:

∴ تكون مجموعة الحل للمتباينة هي $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$.

3- $x^3 + 3x^2 + 2x \leq 0$

نأخذ x عامل مشترك

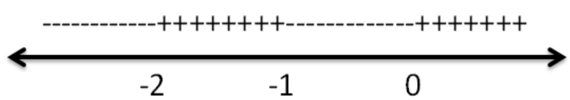
$x(x^2 + 3x + 2) \leq 0$

نحل الدالة التربيعية بطريقة القانون العام كما سبق دراسته

فتكون جذور الاقتران هي $\{-2, -1, 0\}$ وتم إضافة $x=0$ نظراً لوجود المتغير x خارج المعادلة التربيعية

نحدد اشارة الاقتران على خط الاعداد

∴ تكون مجموعة الحل للمتباينة هي $(-\infty, -2] \cup [-1, 0]$.



<u>مثال 2:</u> أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات التالية:

1- $6x - 5 > x + 3$

2- $2x^2 - 10x \geq -12$

3- $4x^3 + 12x^2 + 8x \leq 0$

<u>الحل :-</u> مجموعة الحل لأي متباينة تكون مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

1- $6x - 5 > x + 3$

$6X - x > 3 + 5$

$5x > 8$

$x > \frac{8}{5}$

∴ تكون مجموعة الحل هي الفترة المفتوحة $\left(\frac{8}{5}\,,\,\infty\right)$.

2- $2x^2 - 10x \geq -12$

$2x^2 - 10x + 12 \geq 0$

نحل الدالة التربيعية بطريقة القانون العام كما سبق دراسته

فتكون جذور الاقتران هي $\{2, 3\}$

نبحث في اشارة الاقتران عن طريق خط الاعداد وتكون اشارة الاقتران التربيعي عكس اشارة x^2 ما بين الجذرين و نفس إشارة x^2 خارج الجذرين.

+++++++++++---------------++++++++++

2 3

∴ تكون مجموعة الحل للمتباينة هي $(-\infty, 2] \cup [3\,,\,\infty)$.

3- $4x^3 + 12x^2 + 8x \leq 0$

نأخذ x عامل مشترك

$x(4x^2 + 12x + 8) \leq 0$

نحلل الدالة التربيعية داخل الاقواس

$x(2x+4)(2x+2) \leq 0$

فتكون جذور الاقتران هي $\{0\,,\,-1\,,\,-2\}$

نحدد اشارة الاقتران على خط الاعداد

-----------++++++++------------+++++++

-2 -1 0

∴ تكون مجموعة الحل للمتباينة هي $(-\infty, -2] \cup [-1\,,\,0]$

المتتاليات:

هي عبارة عن اقتران معرف من مجموعة الاعداد الطبيعية N إلى مجموعة الاعداد الحقيقية R وتكتب على الصورة:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n \ldots$$

وتسمى العناصر $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n$ بحدود المتتالية بينما يسمى الحد (a_n) الحد العام للمتتالية.

وتكتب المتتالية بدلالة حدها العام a_n.

مثال 1:-

اكتب الحدود الاربعة الأولى لكل من المتتاليات التالية:

1- $\left\{\frac{n^2}{2}\right\}$

2- $\{\, 3n \; - n^3\}$

3- $\{\, 2n + 4 \,\}$

4- $\{2^n\}$

الحل :-

الحدود الاربعة الاولى هي a_1 , a_2 , a_3 , a_4

1- $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 2$, $a_3 = \frac{9}{2}$, $a_4 = 8$

2- $a_1 = 2$, $a_2 = -2$, $a_3 = -18$, $a_4 = -52$

3- $a_1 = 6$, $a_2 = 8$, $a_3 = 10$, $a_4 = 12$

4- $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 16$

مثال 2:-

أوجد الحد الخامس و الحد الثامن للمتتالية:

$$\left\{\frac{n^2 + 1}{3n - 2}\right\}$$

الحل :-

الحد الخامس $a_5 = \frac{5^2+1}{3.5-2} = \frac{26}{13} = 2$

الحد الثامن $a_8 = \frac{8^2+1}{3.8-2} = \frac{65}{22}$

المتتالية الحسابية هي المتتالية التي يكون الفرق بين أي حدين متتاليين فيها مقداراً ثابتاً يسمى أساس المتتالية ويرمز له بالرمز d، أي اذا كانت $\{a_n\} = a_1,\ a_2,\ a_3, \dots a_n$ متتالية حسابية فإن:

$$a_2 = a_1 + d \Rightarrow d = a_2 - a_1$$

$$a_3 = a_2 + d \Rightarrow d = a_3 - a_2$$

$$a_4 = a_3 + d \Rightarrow d = a_4 - a_3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + d \Rightarrow d = a_n - a_{n-1}$$

مثال :-

أي المتتاليات التالية حسابية واذا كانت فما هو اساسها:

1- $2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots$

2- $1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \ldots$

3- $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25, \ldots$

4- $5,\ 3,\ 1,\ -1,\ \ldots$

5- $6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6, \ldots$

6- $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots$

الحل :-

1- 2, 4, 8, 16,… (4 – 2 = 2, 8 – 4 = 4, الفرق ليس ثابت*)*

∴ ليست متتالية حسابية.

2- 1, 4, 7, 10,… (4 – 1 = 3, 7 – 4 = 3, الفرق ثابت*)*

∴ متتالية حسابية وأساسها يساوي *3*.

3- 1, 4, 9, 16, 25,… (4 – 1 = 3, 9 – 4 = 5 , الفرق ليس ثابت*)*

∴ ليست متتالية حسابية.

الحل :-

4- $5,\ 3,\ 1,\ -1,\ \ldots \Longrightarrow (3-5=-2,\ 1-3=-2,$ ثابت الفرق)

∴ متتالية حسابية و أساسها يساوي-2 .

5- $6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6, \ldots \Longrightarrow (6-6=0,\ 6-6=0,$ ثابت الفرق)

∴ متتالية حسابية و أساسها يساوي0 .

6- $1, \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots \Longrightarrow (\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6},$ ثابت ليس الفرق)

∴ ليست متتالية حسابية.

نهاية المحاضرة الخامسة

المحاضرة السادسة

(المتتاليات)

اذا كانت (a_n) متتالية حسابية حدها الأول a_1 واساسها d فإن:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_1 + 4\,d$$

$$\vdots$$

$$a_n = \ a_1 + (\,n - 1\,)d$$

∴ الحد العام للمتتالية الحسابية هو:

$$a_n = \ a_1 + (\,n - 1\,)d$$

مثال 1:- *اوجد قيمة* a_n

أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول *(2)* و أساسها *(5)* ثم أوجد الحد الخامس عشر للمتتالية.

الحل :- *يمكن حلها بالحاسبة عن طريق التعويض المباشر في القانون* 2+(15-1)*5 = 72

$$a_1 = 2 \ \ , \ d = 5$$

∴ يكون الحد العام هو: *نقوم بضرب 5 مرة في n ومرة في 1-*

$$a_n = \ a_1 + (\,n - 1\,)d \quad \Rightarrow \quad = 2 + (\,n - 1\,)\,(5) \ \Rightarrow \ a_n = 5n\ - 3$$

شرح المثال 1

نقوم باستخراج قيمة a_n عن طريقة التعويض المباشر من القانون .

الحد الخامس عشر:

$$\Longrightarrow a_{15}\ = 5(15) - 3 \Rightarrow = 75 - 3 \Rightarrow = 72$$

مثال 2:- *نفس المثال السابق*

أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول *(-5)* و أساسها *(3)* ثم أوجد الحد العاشر للمتتالية.

الحل:-

$$a_1 = -5 \ , d = 3$$

∴ يكون الحد العام هو:

$$a_n = \ a_1 + (\,n - 1)d \Rightarrow \ = \ \ -5 + (\,n - 1)(3) \ \Rightarrow a_n = 3n\ - 8$$

الحد العاشر:

$$\Longrightarrow a_{10}\ = 3(10) - 8 \Rightarrow = 30 - 8 \Rightarrow = 22$$

مثال 3:- اوجد قيمة d .. يمكن استخدام هذا القانون $d=a_n-a_1 / (n-1)$

إذا علمت أن الحد الحادي عشر من متتالية حسابية يساوي 35 والحد الاول يساوي 5 أوجد أساس هذه المتتالية؟

الحل:-

$$a_1 = 5 \quad , d = \ ? \quad , a_{11} = 35$$

شرح المثال 2 بطريقة سهله

$a_n - a_1 \div (n-1)$

(35-5)/(11-1) =

30/10 = 3

∴ يكون الحد العام هو: نقوم بنقل 5 الى قبل = ونغير الإشارة أي 5-35 =30 , نخرج قيمة d عن طريق التقسيم

$$a_n = \ a_1 + (\ n-1\ )d \rightarrow 35 = \ 5 + (\ 11-1\ )d \rightarrow 30 = 10\ d \rightarrow d = \frac{30}{10} = 3$$

مثال 4:- اوجد قيمة a_1 ... يمكن استخدام هذا القانون $a_1=a_n-(n-1)xd$

إذا علمت أن الحد السادس عشر من متتالية حسابية يساوي 85 و أساس هذه المتتالية يساوي 5 أوجد الحد الأول لهذ المتتالية ؟

شرح المثال 3 بطريقة سهلة

$(n-1)Xd - a_n$

85-(15)X5 = 10

الحل:-

$$a_1 = \ ? \quad , d = 5\ , a_{16} = 85$$

∴ يكون الحد العام هو:

$$a_n = \ a_1 + (\ n-1\ )d \rightarrow 85 = \ a_1 + (\ 16-1\ )(5)$$

$$\rightarrow 85 = 75 + \ a_1 \rightarrow a_1 = 85 - 75 \rightarrow = 10$$

مثال 5:-

أوجد الحد العام لكل من المتتاليات الحسابية التالية:

1- $3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \ldots$

2- $10,\ 8,\ 6,\ 4,\ \ldots$

الحل :-

نجد في البداية الحد الأول والأساسي للمتتالية ثم نعوض في قانون الحد العام.

1- $a_1 = 3,\ d = 3 \rightarrow a_n = a_1 + (\ n\ - 1\ )d$

$= 3 + (n - 1\ )(3)$

$= 3 + \ 3n\ - 3$ $3-+3=0$ $\rightarrow =3n$

$= 3n$

2- $a_1 = 10,\ d = -2 \rightarrow a_n = a_1 + (n\ - 1)d$

$= 10 + (n - 1)(-2)$

$= 10 - 2n + 2$ $-1x-2= (+2)$

$= 12 - 2n$ $10+2 =12 \ldots 2n \ldots .-2n+12$

حساب مجموع الحدود

$a_1 , a_2 , \ \dots\dots.., a_n$

و مجموعها هو:

$S_n = \ a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots\dots\dots + a_n$

$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \ \dots\dots + (a_1 + (n-1)d)$

$= na_1 + d + 2d \ + 3d \dots\dots + (n-1)d$

$= na_1 + d\big(1 + 2 \ + 3 + \ \dots\dots + (n-1)\big)$

$= \ na_1 + d\frac{n(n-1)}{2}$

$\Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}(2\,a_1 + (n-1)d)$ *قانون المجموع إذا توفرت المعطيات الحد الأول والاساس*

$\Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ *قانون المجموع إذا توفرت المعطيات الحد الأول والأخير فقط*

<u>مثال 1:-</u>

متتالية حسابية حدها الأول = 3-، واساسها (4) أوجد مجموع أول (20) حد منها .

<u>الحل:-</u>

$a_1 = -3 \, , \ d = 4$

$S_n = \frac{n}{2}(2\,a_1 + (n-1)d)$

$\Longrightarrow S_{20} = \frac{20}{2}\ (2(-3) + (19)(4))$

= 10 (-6 + 76)

= (10)(70)

= 700

يمكن حله عن طريق الاله الحاسبة بتعويض المباشر على القانون.

20/2(2*-3+(20-1)*4)

او

$\frac{20}{2}\ (2 * 3 + (20-1) * 4)$

<u>مثال 2:-</u>

متتالية حسابية عدد حدودها (16) حدها الأول (3) وحدها الأخير (39) احسب مجموعها.

<u>الحل:-</u>

$a_1 = 3 \ , \ \ a_{16} = 39 \ , \ \ n = 16$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$\Longrightarrow S_{16} = \frac{16}{2}\ (3 + 39)$

$= \ (8)(42)$

$\Longrightarrow S_{16} = \ 336$

يمكن حله عن طريق الاله الحاسبة عن طريق ادخال التالي:

16/2*(3+39) = 336

مثال 3:-

متتالية حسابية حدها الأول (6) وحدها الأخير (66) ومجموع حدودها 252 أوجد عدد حدودها.

الحل:-

نطبق القانون

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\Longrightarrow \frac{n}{2}(6+66) = 252$$

$$\frac{n}{2}(72) = 252$$

$$n(36) = 252$$ *نقوم بتقسيم المجموع على الناتج*

$$\Longrightarrow n = 7$$

يمكن حله عن طريق الاله الحاسبة عن طريق ادخال التالي:

252 / (6+66)/2

المتتالية الهندسية هي المتتالية التي تكون فيها النسبة بين أي حدين متتالين ثابتة تسمى اساس المتتالية ويرمز لها بالرمز r.

أي : اذا كانت $\{a_n\} = a_1\,,\ a_2,\ a_3\,,\ \dots\dots\dots,\ a_n$

متتالية هندسية فإن:

$$a_2 = a_1\, r \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{a_2}{a_1}$$

$$a_3 = a_2\, r \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{a_3}{a_2}$$

$$a_4 = a_3\, r \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{a_4}{a_3}$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1}\, r \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

مثال:-

أي من المتتاليات التالية هندسية واذا كانت ما هو أساسها.

1 - *1, 4, 9, 16, 25, …*

2 - *2, 4, 8, 16, 32, …*

3 - *2, 4, 6, 8, 10, …*

4 - $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{8}, \dots$

5 - *1, -1, 1, -1, 1, -1, …*

الحل:- نقوم بتقسيم الرقم التالي على السابق ..

1 - $1 , 4 , 9 , 16 , 25 , \dots$

$$\frac{4}{1} = 4 \quad , \quad \frac{9}{4} = 2.25$$

$\therefore$ ليست متتالية هندسية.

2 - $2 , 4 , 8 , 16 , 32 , \dots$

$$\frac{4}{2} = 2 \quad , \quad \frac{8}{4} = 2 \; , \; \frac{16}{8} = 2$$

$\therefore$ متتالية هندسية واساسها 2.

3 - $2 , 4 , 6 , 8 , 10 , \dots$

$$\frac{4}{2} = 2 \; , \; \frac{6}{4} = 1.5$$

$\therefore$ ليست متتالية هندسية.

4 - $1 , \frac{1}{3} , \frac{1}{9} , \frac{1}{27} , \frac{1}{8} \; , \; \dots$

$$\frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} \quad , \; \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \; , \; \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ متتالية هندسية واساسها $\frac{1}{3}$.

5 - $1 , -1 , 1 , -1 , 1 , -1 \; , \dots.$

$$-\frac{1}{1} = -1 \; , \; \frac{1}{-1} = -1 \; , \; -\frac{1}{1} = -1$$

$\therefore$ متتالية هندسية واساسها -1 .

نهاية المحاضرة السادسة

المحاضرة السابعة

(تابع المتتاليات)

اذا كانت ... $\{a_n\} = a_1 , a_2 , \ \ \ldots , a_n$ متتالية هندسية حدها الأول (a_1) واساسها r فإن:

$a_2 = a_1 \, r$

$a_3 = a_2 \, r = a_1 \, r^2$

$a_4 = a_3 \, r = a_1 \, r^3$

$a_5 = a_1 \, r^4$

$\vdots$

الحد العام للمتتالية: $\boldsymbol{a_n = a_1 \, r^{n-1}}$

مثال 1:-

متتالية هندسية حدها الأول (1) و اساسها (2) أوجد حدها العام.

الحل:-

$$a_n = 1 \quad , \quad r = 2$$

$$a_n = a_1 \, r^{n-1} \ \Rightarrow \ = (1)(2)^{n-1} \Rightarrow a_n = 2^{n-1}$$

مثال 2:-

أوجد الحد العام لكل من المتتاليات الهندسية التالية:

1- 4 , 16 , 64 , 256 , ...

2- -1 , 1 , -1 , 1 , -1 ,...

الحل:- هي عبارة عن رقم ثابت واس متغير كما في الرقم (1) $4=4^1$, $16=4^2$, $64=4^3$, $256=4^4$ .....

1- 4 , 16 , 64 , 256 , ... ➔ $a_1 = 4, \ r = 4$ ➔ $a_n = a_1 \, r^{n-1}$ ➔ $= (4)(4)^{n-1}$ ➔ $a_n = 4^n$

2- $-1 , 1 , -1 , 1 , -1 ,\ldots$ ➔ $a_1 = -1 \ , \ r = -1 \Rightarrow a_n = a_1 r^{n-1}$ ➔ $= (-1)(-1)^{n-1}$

$\Rightarrow a_n = (-1)^n$

ملاحظة: إذا كان الأساس واحد مثل 4*4 او -1*-1 نجمع الأسس.. كما في المثال السابق.

مثال 3:-

متتالية هندسية حدها السادس *1215*، وحدها الثامن *10935* أوجد حدها الأول والاساس.

الحل:-

الحد العام للمتتالية الهندسية هو:

$$a_n = a_1\, r^{n-1},$$

$$a_6 = a_1\, r^5 = 1215,$$

$$a_8 = a_1 r^7 = 10935$$

بالقسمة $\frac{a_8}{a_6} \Longleftarrow = \frac{10935}{1215}\ \frac{a_1 r^7}{a_1 r^5}$

$$\Longrightarrow r^2 = 9 \Longrightarrow r = \sqrt{9} \Longrightarrow r = 3$$

نعوض في معادلة a_6 لإيجاد a_1

$$a_1\, r^5 = 1215 \Longrightarrow a_1(3)^5 = \ 1215 \Longrightarrow a_1\ 243 = 1215$$

$$\Longrightarrow a_1 = \frac{1215}{243} = 5$$

الخطوة الأولى:

نقسم 10935 على 1215 , a_6/a_8 = 9

الخطوة الثانية:

نطرح الأسس r^7-r^5 = r2

الخطوة الثالثة:

نستخرج الجذر الثاني (لان r اس 2) لـ 9 (ناتج الخطوة1) = 3

الخطوة الرابعة:

نقوم بتعويض في المعادلة

..$a_6=a_1r^5$ ➔ $1215=a_1x3^5$

الخطوة الأخيرة:

نقسم قيمة a_6 على قيمة r^5

$1215 / 3^5=5$

مثال 4:-

متتالية هندسية حدها الأول (*2*) وحدها الأخير (*486*) واساسها (*3*) أوجد عدد حدودها.

الحل:

$a_n = a_1 r^{n-1}$ ➔ $486 = (2)(3)^{n-1}$

$(3)^{n-1} = \frac{486}{2}$ ➔ $(3)^{n-1} = 243$

الان نحن بحاجة الى استخراج قيمة n وذلك باستخدام الناتج 243 وأساس المتتالية 3 بمعنى أخرى 3 اس كم يعطيني الناتج 243

$(3)^{n-1} = (3)^5$ *=243 =3^5* ➔ $n - 1 = 5$ ➔ $\therefore n = 6$

مجموع أول n حد من المتتالية الهندسية التي حدها الأول a_1 واساسها r هو:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$\Longrightarrow S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} \ldots (1)$$

بالضرب في r تصبح

$$r\, S_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بالطرح (1) من (2) تصبح

$$r\, S_n - S_n = (a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^n) - (a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1})$$

نختصر الحدود المتشابهة تصبح

$$r\, S_n - S_n = a_1 r^n \;\; a_1 \Longrightarrow S_n\,(r-1) = a_1\,(r^n - 1)$$

∴ مجموع أول n حد هو:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}}$$

مثال 1:-

متتالية هندسية حدها الأول (8) واساسها (2) احسب مجموع أول خمسة حدود منها.

الحل:-

$$a_1 = 8 \quad , \quad r = 2$$

$$S_5 = \frac{a_1(r^5-1)}{r-1} \Rightarrow = \frac{(8)(2^5-1)}{r-1} \Rightarrow = \frac{(8)(32-1)}{5-1} \Rightarrow = 248$$

مثال 2:-

متتالية هندسية حدها الأول (10) واساسها (5) احسب مجموع أول ثمانية حدود منها.

الحل:-

$$a_1 = 10 \;,\;\; r = 5$$

$$S_8 = \frac{a_1(r^8-1)}{r-1} \Rightarrow = \frac{(10)(5^8-1)}{5-1} \Rightarrow = \frac{(10)(390625-1)}{4} \Rightarrow = 976560$$

يكون جملة المبلغ على حساب الفائدة البسيطة في نهاية المدة على شكل متتالية حسابية وتحسب بالقانون. $a_n = a_1 + (n)d$

حيث أن:

المبلغ في بداية المدة = a_1

عدد السنوات =n

الفائدة السنوية على المبلغ =d

نسبة الفائدة × $d = a_1$

مثال 1:-

أودع شخص مبلغ (10000) ريال لمدة (8) سنوات بفائدة بسيطة 7.5% سنوياً، أحسب جملة المبلغ في نهاية المدة.

الحل:-

$a_1 = 10000$

$n = 8$

$\Longrightarrow d = \frac{7.5}{100} \times 10000 = 750$

المبلغ في نهاية السنة الثامنة = a_8

$\Longrightarrow a_8 = 10000 + (8)(750)$

$= 10000 + 6000 = 16000\ SAR$

مثال 2:-

أودع شخص مبلغ ما لمدة (5) سنة بفائدة بسيطة 8% سنوي، فوجد أن جملة ما له في نهاية المدة قد بلغ (7000) ريال أحسب أصل المبلغ.

الحل :-

$a_1 = ?$

$n = 5$

$d = \frac{8}{100} \times a_1 = 0.08\, a_1$

المبلغ في نهاية المدة = $a_{4.75}$

$$a_{4.75} = a_1 + (5)(0.08\, a_1) = 7000$$

$\Longrightarrow a_1(1+(5 \times 0.08)) = 7000$

$\Longrightarrow a_1(1.4) = 7000$

$\Longrightarrow a_1 = \frac{7000}{1.4} = 5000\ SAR$

أما الفائدة المركبة فتحسب على أساس المتتالية الهندسية حيث تحسب بالقانون:

$$a_n = a_1\, r^n$$

حيث أن:

جملة المبلغ في نهاية المدة = a_n

المبلغ في بداية المدة = a_1

نسبة الفائدة + 1 = r

مثال 1:-

ادخر شخص مبلغ(8000) ريال بفائدة مركبة 9% لمدة خمس سنوات، فما هي جملة المبلغ في نهاية المدة.

الحل:-

$$a_1 = 8000$$

$$r = 1 + 0.09 = 1.09$$

$$n = 5$$

$$\Longrightarrow a_5 = 8000(1.09)^5 = 12308.9\ SAR$$

مثال 2:-

ادخر شخص مبلغ(10000) ريال بفائدة مركبة 5% نصف سنوي لمدة 3.5 سنة، فما هي جملة المبلغ في نهاية المدة.

الحل:-

$$a_1 = 10000$$

$$r = 1 + 0.05 = 1.05$$

$$n = 3.5 \times 2 = 7 \text{ فترات}$$

$$\Longrightarrow a_7 = 10000(1.05)^7 = 14071\ SAR$$

نهاية المحاضرة السابعة

المحاضرة الثامنة

(المصفوفات والمحددات)

المصفوفة: هي عدد من العناصر موضوعة على شكل صفوف واعمدة ويرمز لها بأحد الحروف الهجائية الكبيرة $A,B,C,\ldots,$ ومن الأمثلة على المصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 12 & 3 \\ -5 & 5 & -6 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 2 \\ 0 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

رتبة المصفوفة:-

رتبة المصفوفة تساوي عدد الصفوف×عدد الاعمدة.

مثال:

رتبة المصفوفة A هي 3×4 وتكتب على الصورة $A_{3\times4}$.

رتبة المصفوفة B هي 4×2 وتكتب على الصورة $B_{4\times2}$.

رتبة العنصر:-

رتبة العنصر a هي موقعه في الصف والعمود أي العنصر في الصف i والعمود j = a_{ij}

مثال:-

في المصفوفة A السابقة أوجد العناصر a_{21} , a_{32} , a_{24}

الحل:-

العنصر a_{21} : العنصر في الصف الثاني العمود الأول $a_{21}=-5$

العنصر a_{32} : العنصر في الصف الثالث العمود الثاني $a_{32}=-6$

العنصر a_{24} : العنصر في الصف الثاني العمود الرابع $a_{24}=7$

1- المصفوفة الصفرية:

المصفوفة التي يكون جميع عناصرها أصفار.

مثال:-

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

← مصفوفة صفرية رتبتها 2×3

2- المصفوفة المربعة:

المصفوفة المربعة هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف = عدد الاعمدة.

مثال:-

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{2\times2} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & -2 & -8 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

المصفوفة A مصفوفة مربعة من الرتبة 2×2 (أي من الرتبة الثانية).

المصفوفة B مصفوفة مربعة من الرتبة 3×3 (أي من الرتبة الثالثة).

3- المصفوفة القطرية: لابد ان تكون هذه المصفوفة مربعة:

المصفوفة المربعة التي يكون جميع العناصر فيها غير القطر الرئيسي (تبدا من اليسار الى اليمين) أصفار.

مثال:-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4- المصفوفة المحايدة:

المصفوفة القطرية التي يكون عناصر القطر الرئيسي تساوي واحد ويرمز لها بالرمز I_n حيث n تمثل عدد صفوف المصفوفة (رتبتها).

مثال:-

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5- المصفوفة المثلثية:

وتنقسم إلى قسمين :

أ – المصفوفة المثلثية العليا: الأرقام تكون في الأعلى.

المصفوفة التي يكون فيها جميع العناصر تحت القطر الرئيسي أصفار .

مثال:-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

ب – المصفوفة المثلثية السفلى: الأرقام تكون في الأسفل.

المصفوفة التي يكون فيها جميع العناصر فوق القطر الرئيسي أصفار .

مثال:-

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

6- المصفوفة المبدلة *(Transpose of matrix)*:

منقول المصفوفة أو مبدل المصفوفة هي تبديل الصفوف بالأعمدة والاعمدة بالصفوف ويرمز لها بالرمز A^T.

مثال:-

أوجد منقول كل من المصفوفات التالية :

$1/\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3} \qquad 2/\ B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3}$

الحل:- *العمود الأول نجعله في الصف الأول...حتى النهاية.*

$1/\ A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times2} \qquad 2/\ B^T = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3}$

7- المصفوفة المتماثلة (Symatric matrix):

تكون المصفوفة متماثلة اذا كانت $A = A^T$. *تكون المصفوفة تساوي المبدلة.*

مثال:-

اي من المصفوفات التالية متماثلة:

$1)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad 2)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

الحل:-

$1)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \ A \neq A^T$ $\qquad \therefore$ A ليست متماثلة

$2)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}, \ B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = B^T$ $\qquad \therefore$ B متماثلة

1- الجمع والطرح:

عند جمع أو طرح مصفوفتين يجب أن تكونا من نفس الرتبة ونجمع أو نطرح العناصر المتناظرة.

مثال:-

أوجد ناتج ما يلي:

$1/\ A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} \quad + \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$

$2/\ A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3} \quad - \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$

الحل:-

$$1\text{- } A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} \quad + \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} \quad = \quad \begin{bmatrix} 2 & 11 & 11 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$2\text{- } A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3} \quad - \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3} \quad = \quad \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

2- الضرب بعدد ثابت:

عند ضرب مصفوفة بعدد ثابت فإننا نضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بالعدد.

مثال:-

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

أوجد ما يلي:

1) $3A$

2) $2B$

3) $3A - 2B$

الحل:-

1) $3A = 3 \times \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 \\ 18 & 9 \end{bmatrix}$

2) $2B = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$

3) $3A - 2B = \begin{bmatrix} 12 & 27 \\ 18 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 14 & -1 \end{bmatrix}$

3- ضرب المصفوفات:

عند ضرب مصفوفتين يجب أن تكون عدد أعمدة الاولى يساوي عدد صفوف الثانية وعند الضرب نضرب الصف i في المصفوفة الاولى بالعمود j في المصفوفة الثانية لينتج العنصر a_{ij} في المصفوفة الناتجة.

ويتم الضرب: صف (صف من المصفوفة الأولى) في عمود (عمود من المصفوفة الثانية).

طريقة لفهم الشرط اذا كان لدينا مصفوفتان 3×4 و 2×3 ننظر لرتبة المصفوفتين وتحديدا للرقمين المتواجدين في الداخل فاذا تساوت الأرقام من الداخل مثل ما هو معنا 3 يجوز فيها الضرب واذا اختلفت نقول عن المصفوفتين لا يمكن فيها الضرب , اما عن ناتج عملية الضرب راح يكون الرقم الأول 2 و الأخير 4 أي 2×4

مثال:-

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4\times3} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

احسب:

1) AB

2) BA

الحل:-

1) $AB =$

$$\begin{bmatrix} (1\times2+4\times3\pm1\times-1) & (1\times0+4\times1\pm1\times4) \\ (5\times2+6\times3+2\times-1) & (5\times0+6\times1+2\times4) \\ (2\times2+1\times3+7\times-1) & (2\times0+1\times1+7\times4) \\ (3\times2+0\times3+4\times-1) & (3\times0+0\times1+4\times4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+12+1 & 0+4-4 \\ 10+18-2 & 0+6+8 \\ 4+3-7 & 0+1+28 \\ 6+0-4 & 0+0+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 26 & 14 \\ 0 & 29 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}_{4\times2}$$

2) BA *لا تجوز عملية الضرب لأن عدد أعمدة الأولى لا تساوي عدد صفوف الثانية*

ملاحظة:

1- اذا كانت $A_{m\times n}$ وكانت $B_{n\times k}$ فإن $(AB)_{m\times k}$.

مثال *1*:-

اذا كانت $B_{5\times6}$, $A_{3\times5}$ فأوجد رتبة AB.

الحل:-

$$A_{m\times n} \times B_{n\times k} = AB_{m\times k}$$

$$A_{3\times5} \times B_{5\times6} = AB_{3\times6}$$

ونستنتج من هذا المثال أن:

$$AB \neq BA$$

مثال 2:-

اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ فأوجد A^2

الحل:-

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2 \times 2 + 4 \times 6) & (2 \times 4 + 4 \times 5) \\ (6 \times 2 + 5 \times 6) & (6 \times 4 + 5 \times 5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 28 \\ 42 & 49 \end{bmatrix}$$

مثال 3:- اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix} \;,\; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = AB \quad , \quad D = BA$$

فأوجد ما يلي:

$$c_{12} \,,\, c_{33} \,,\, d_{21} \,,\, d_{13}$$

-- حيث ان C = العاموود من A والصف من B

$C12 = A1 X B2 , C33= A3XB3 ,$

-- حيث أن D= الصف الأول من Bو العاموود من A

$D21= A2 X B1 , D13= A1 X B3$

الحل:-

حاصل ضرب الصف الأول من المصفوفة A بالعمود الثاني من المصفوفة B = c_{12} .

$$\Longrightarrow c_{12} = 3 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times 5 = 3 + 8 + 25 = 36$$

$$c_{33} = 6 \times -1 + 4 \times 6 + 7 \times 0 = -6 + 24 + 0 = 18$$

$$d_{21} = 4 \times 3 + 2 \times 2 + 6 \times 6 = 12 + 4 + 36 = 52$$

$$d_{13} = 1 \times 5 + 1 \times 0 + -1 \times 7 = \;\; = 5 + 0 - 7 = -2$$

نهاية المحاضرة الثامنة

المحاضرة التاسعة

(تابع المصفوفات والمحددات)

محدد المصفوفة هي القيمة الرقمية للمصفوفة ويرمز لها بأحد الرموز التالية:

$$Det\ A \quad , \quad \Delta A \quad , \quad |A|$$

1- محدد المصفوفة من الرتبة الثانية 2×2: *ان المحدد لاي مصفوفة لابد ان تكون المصفوفة مربعة مثل 2×2 , 3×3*

المصفوفة من الرتبة 2×2 تكون على الصورة

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

وتكون محددتها هي:

قاعدة: حاصل ضرب القطر الرئيسي(من اليسار الى اليمين).. ناقص.. حاصل ضرب القطر الفرعي (من اليمين الى اليسار).

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال:-

أوجد قيمة المحددات التالية:

$1)\ \Delta A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$2)\ \Delta B = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

$3)\ \Delta C = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$

الحل:-

$1\text{-}\ \Delta A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$$\Delta A = 5 \times 4 - 2 \times 3 = 20 - 6 = 14$$

$2\text{-}\ \Delta B = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

$$\Delta B = 1 \times 2 - 3 \times 5 = 2 - 15 = -13$$

$3\text{-}\ \Delta C = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$

$$\Delta C = 2 \times 9 - 3 \times 6 = 18 - 18 = 0$$

ملاحظة: اذا كانت $\Delta A = 0$ فإن A تسمى مصفوفة مفردة *(Singular matrix).*

2- محدد المصفوفة من الرتبة الثالثة:

المصفوفة من الرتبة الثالثة تكون على الصورة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ولإيجاد محدد المصفوفة A نستخدم واحدة من الطريقتين:

أ- طريقة الأسهم.

ب- طريقة المحددات الصغرى.

وسوف يتم استخدام طريقة واحدة فقط تخفيفا عليكم وهى طريقة الأسهم

طريقة الأسهم (سايروس):

في هذه الطريقة نكرر العمود الأول والثاني، ثم نجد حاصل ضرب الأقطار الرئيسية ونطرح منها حاصل ضرب الاقطار المرافقة كالاتي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$detA = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \;-\; (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

مثال *1*:-

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:- *fx991 ES* حيث * ادخال البيانات

*MODE ➔6:MATRIX ➔ 1:Mat **A** ➔ 1:3x3 ➔ * ➔ =*

SHIFT ➔ 4[MATRIX] ➔7:det ➔ SHIFT ➔4[MATRIX] ➔ 3: Mat

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\Delta A = (1 \times 4 \times 3 + 2 \times 6 \times (-1) + 3 \times 5 \times 7) - (2 \times 5 \times 3 + 1 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times (-1))$$

$$= (12 - 12 + 105) - (30 + 42 - 12)$$

$$= 105 - 60$$

$$= 45$$

مثال 2:-

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:- *fx991 ES* حيث * ادخال البيانات

*MODE ➔6:MATRIX ➔ 1:Mat **A** ➔ 1:3x3 ➔ * ➔ =*

SHIFT ➔ 4[MATRIX] ➔7:det ➔ SHIFT ➔4[MATRIX] ➔ 3: Mat

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta A = (3\times 8\times 4 + 1\times 9\times 6 + 2\times 7\times 2) - (1\times 7\times 4 + 3\times 9\times 2 + 2\times 8\times 6)$$

$$= (96 + 54 + 28) - (28 + 54 + 96)$$

$$= 178 - 178$$

$$= 0$$

$\Leftarrow$ A مصفوفة مفردة.

1- اذا كانت عناصر أحد الصفوف أو الأعمدة أصفار فإن قيمة المحدد تساوي صفر.

مثال:-

أحسب قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:-

حيث أن الصف الثاني أصفار فإن $\Delta A = 0$

2- اذا تساوت عناصر صفين أو عمودين في المصفوفة فإن قيمة المحدد تساوي صفر.

مثال:-

احسب قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ 9 & 1 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

الحل:-

حيث أن عناصر العمود الأول و الثالث متساوية فإن $\Delta A = 0$

3- اذا ضرب أحد الصفوف أو أحد الأعمدة بعدد ثابت فإن قيمة المحدد تضرب في نفس العدد.

مثال:-

اذا كانت قيمة المحدد التالي تساوي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad , \qquad \Delta A = 5$$

فأوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:-

نلاحظ أن المصفوفة B هي المصفوفة A مضروب الصف الثالث فيها بالعدد *(3)*.

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times \Delta A$$

$$\Longrightarrow \Delta B = 3\Delta A = (3)(5) = 15$$

4- اذا بدلنا صف مكان صف أو عمود مكان عمود في المحدد فإن قيمة المحدد تنعكس اشارتها.

مثال:-

اذا كانت

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta A = -2$$

فأوجد قيمة المحدد

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:-

المصفوفة B هي ناتج تبديل الصف الأول بالصف الثاني في المصفوفة A

$$\Longrightarrow \Delta B = -(-2) = 2$$

5- اذا كان أحد الصفوف مضاعف لصف آخر أو أحد الأعمدة مضاعف للآخر فإن قيمة المحدد تساوى صفر.

مثال:- قال الدكتور في المحاضرة هذه الخاصية سوف يستبعدها من الاختبار تسهيلا على الطلاب

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

الحل:-

لأن الصف الثالث من مضاعفات الصف الثاني فإن $\Delta A = 0$

6- محدد المصفوفة القطرية = حاصل ضرب القطر *مهم جدا ركز عليه الدكتور*

مثال:-

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

الحل:-

$$\Delta A = (2)(1)(-3)(-4) = 24$$

7- قيمة محدد المصفوفة المثلثية = حاصل ضرب القطر *مهم جدا*

مثال:-

أوجد قيمة المحدد التالي

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:- *fx991 ES* حيث * ادخال البيانات

*MODE ➔6:MATRIX ➔ 1:Mat **A** ➔ 1:3x3 ➔ * ➔ =*

*SHIFT ➔ 4[MATRIX] ➔7:det ➔ SHIFT ➔4[MATRIX] ➔ 3: Mat **A***

$$\Delta A = (2)(3)(4) = 24$$

مثال:-

أوجد قيمة المحدد التالي

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:- *fx991 ES* حيث * ادخال البيانات

*MODE ➔6:MATRIX ➔ 1:Mat **A** ➔ 1:3x3 ➔ * ➔ =*

SHIFT ➔ 4[MATRIX] ➔7:det ➔ SHIFT ➔4[MATRIX] ➔ 3: Mat

$$\Delta A = (1)(1)(3) = 3$$

(معكوس المصفوفة)

اذا كانت A مصفوفة من الرتبة 2×2 أي:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

فنجد معكوس المصفوفة بالخطوات التالية:

1- نجد قيمة محدد المصفوفة $det\ A$.

2- يكون معكوس المصفوفة A^{-1} هو: *اذا جاك هذا الشكل A^{-1} فهو يقصد اوجد معكوس المصفوفة.*

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{det\ A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

مثال *1*:-

أوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:- *نقوم بضرب القطر الرئيسي و نقوم بتغير إشارات القطر الفرعي بعد استخراج المحدد.*

fx991 ES حيث * ادخال البيانات

*MODE ➔6:MATRIX ➔ 1:Mat **A** ➔ 5:2x2 ➔ * ➔ =*

*SHIFT ➔ 4[MATRIX] ➔7:det ➔ SHIFT ➔4[MATRIX] ➔ 3: Mat **A***

$$\Longrightarrow det(A) = 8 - 3 = 5$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

مثال *2*:-

أوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

الحل:- *fx991 ES* حيث * ادخال البيانات

*MODE ➔6:MATRIX ➔ 1:Mat **A** ➔ 5:2x2 ➔ * ➔ =*

*SHIFT ➔ 4[MATRIX] ➔7:det ➔ SHIFT ➔4[MATRIX] ➔ 3: Mat **A =***

$$\Longrightarrow det(A) = -6 - (-10) = -6 + 10 = 4$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{2}{4} \end{bmatrix}$$

مثال 2:-

أوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

الحل:-

$$\Longrightarrow det(A) = 12 - 12 = 0$$

∴ لا يوجد معكوس للمصفوفة A .

ملاحظة 1:

اذا كانت قيمة محدد المصفوفة = صفر فإن المصفوفة لا يوجد لها معكوس.

ملاحظة 2:

معكوس المصفوفة المحايدة هو نفس المصفوفة.

أي اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

نهاية المحاضرة التاسعة

المحاضرة العاشرة

(تابع المصفوفات والمحددات)

أولاً: الحل بإستخدام معكوس المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \text{معكوس مصفوفة المعاملات} \times \text{مصفوفة الثوابت}$$

فإذا كان لدينا المعادلتين التاليتين:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

فإن:

مصفوفة المعاملات هي $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ ومصفوفة الثوابت هي $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

مثال *1*:-

حل النظام التالي من المعدلات باستخدام معكوس المصفوفة، ثم تأكد من الحل:

$$2x + 3y = 1$$

$$3x - y = 7$$

الحل:- طريقة حل المعادلة ككل *fx991 ES* حيث * ادخال البيانات

*MODE ➔5:EQN ➔ 1:anX + bn Y = cn ➔ * ➔ =*

مصفوفة المعاملات $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

مصفوفة الثوابت $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

نجد أولاً معكوس A حيث بالألة الحاسبة *fx991ES* حيث * ادخال البيانات.. هذه طريقة إيجاد المعكوس فقط

*MODE ➔6 MATRIX ➔ 1MATA ➔ 5 2x2 ➔ * ➔ = ➔ AC*

*SHIFT ➔ 4[MATRIX] ➔ 2 DATA ➔2:Mat B ➔6 2x1 ➔ * ➔ = ➔ AC*

SHIFT ➔ 4[MATRIX] ➔7:det ➔ SHIFT ➔ 4[MATRIX] ➔ 3:Mat

$$det\ A = -2 - 9 = -11$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

ويكون حل النموذج هو:

$$X = A^{-1}\,B$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -1-21 \\ -3+14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-22}{-11} \\ \frac{11}{-11} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow x = 2\ ,\ \ y = -1$$

للتأكد نعوض عن قيم x و y في المعادلة الأولى:

$$2x + 3y = 1$$

$$2(2) + 3(-1) = 1$$ (الحل صحيح)

مثال 2:-

حل النظام التالي من المعدلات باستخدام معكوس المصفوفة، ثم تأكد من الحل:

$$2x + 2y = 8$$

$$5x - 2y = -1$$

الحل:- *fx991 ES* حيث * ادخال البيانات

*MODE ➔5:EQN ➔ 1:anX + bn Y = cn ➔ * ➔ =*

مصفوفة المعاملات $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

مصفوفة الثوابت $B = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

نجد أولاً معكوس A حيث

$$det\,A = -4 - 10 = -14$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

ويكون حل النموذج هو:

$$X = A^{-1}\,B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} -16+2 \\ -40-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-14}{-14} \\ \frac{-42}{-14} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow x = 1\ ,\ \ y = 3$$

للتأكد نعوض عن قيم x و y في المعادلة الأولى:

$$2x + 2y = 8$$

$$2(1) + 2(3) = 8$$ (الحل صحيح)

ثانياً: الحل بإستخدام المحددات (طريقة كرامر):

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad\qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

فإذا كان لدينا المعادلتين التاليتين:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

فإن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

مثال 1:- أوجد حل النظام التالي من المعادلات باستخدام المحددات:

$$x + y = 1$$

$$2x + 3y = 5$$

الحل:- *fx991 ES* حيث * ادخال البيانات

*MODE ➔5:EQN ➔ 1:anX + bn Y = cn ➔ * ➔ =*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 5 = -2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 2 = 3$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{2}{1} = -2 \ , \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3$$

ملاحظة: اذا كانت محدد المصفوفة Δ تساوي صفر فإن النظام لا يوجد له حل.

مثال 2:- أوجد حل النظام التالي من المعادلات باستخدام المحددات:

$$-x + 2y = 15$$

$$2x - 3y = -20$$

الحل:-

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 15 & 2 \\ -20 & -3 \end{vmatrix} = -45 - (-40) = -5$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & 15 \\ 2 & -20 \end{vmatrix} = 20 - 30 = -10$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-5}{-1} = 5 \ , \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-10}{-1} = 10$$

مثال 1:-

تنتج شركة النجاح نوعين من الدفاتر المدرسية النوع الأول (دفتر 60 ورقة) ويباع بسعر 2 ريال ويحتاج إلى 3 ساعات عمل في قسم القص و 2 ساعة عمل في قسم التجميع، والنوع الثاني (دفتر 120 ورقة) يباع بسعر 3 ريال ويحتاج إلى 2 ساعة عمل في قسم القص و 4 ساعات عمل في قسم التجميع، فإذا علمت أن الساعات المتاحة في قسم القص هي 35 ساعة، و 50 ساعة في قسم التجميع، المطلوب باستخدام اسلوب المصفوفات أوجد الكمية المثلى من الانتاج والتي تحقق أعلى ربح ممكن.

الحل:-

1- **جدول تمهيد الحل:**

المنتج / اقسام التشغيل	قسم القص	قسم التجميع	ثمن البيع
دفتر 60 ورقة (x)	3	2	2
دفتر 120 ورقة (y)	2	4	3
ساعات العمل المتاحة لكل قسم	35	50	-

2- صياغة المشكلة رياضياً:

أ- دالة الهدف (الربح / ثمن البيع): $p = 2x + 3y$

ب- القيود:

$$3x + 2y = 35$$

$$2x + 4y = 50$$

تابع الحل:-

$$3x + 2y = 35$$

$$2x + 4y = 50$$

الحل:-

مصفوفة المعاملات $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت $B = \begin{bmatrix} 35 \\ 50 \end{bmatrix}$

نجد أولاً معكوس A حيث

$$det\, A = 12 - 4 = 8$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ويكون حل النموذج هو:

$$X = A^{-1}\, B$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 35 \\ 50 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 140-100 \\ -70+150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{40}{8} \\ \frac{80}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow x = 5 \ , \ y = 10$$

ربح النموذج:

$$\Longrightarrow p = 2x + 3y = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40\ SAR$$

مثال 2:-

تنتج شركة الفهد نوعين من المنتجات$(x\ ,\ \ y)$ وتستخدم نوعين من المواد الخام الخشب والحديد فإذا علمت أن النوع الأول من المنتجات يتطلب *8* م^2 من الخشب و *2* كغ من الحديد والنوع الثاني من المنتجات يتطلب *10* م^2 من الخشب و *4* كغ من الحديد، ويبلغ ربح الوحدة من النوع الأول *100* ريال والنوع الثاني *150* ريال، فإذا علمت أن كمية الخشب المتوافرة في المخزن هي *280* م^2 من الخشب و *100* كغ من الحديد.

المطلوب: باستخدام اسلوب المصفوفات، أوجد الكمية المثلى من الانتاج والتي تحقق أعلى ربح ممكن.

الحل:-

1- **جدول تمهيد الحل:**

المنتجات / المواد الخام	الخشب	الحديد	الربح
x	8	2	100
y	10	4	150
كمية المواد الخام المتاحة	280	100	-

2- صياغة المشكلة رياضياً:

أ- دالة الهدف (الربح / ثمن البيع): $p = 100x + 150y$

ب- القيود:

$$8x + 10y = 280$$

$$2x + 4y = 100$$

$$8x + 10y = 280$$

$$2x + 4y = 100$$

الحل:-

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 20 = 12$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 280 & 10 \\ 100 & 4 \end{vmatrix} = 1120 - 1000 = 120$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 8 & 280 \\ 2 & 100 \end{vmatrix} = 800 - 560 = 240$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{120}{12} = 10 \ , \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{240}{12} = 20$$

ربح النموذج:

$$\Longrightarrow p = 100x + 150y = 100 \times 10 + 150 \times 20 = 4000\, SAR$$

نهاية المحاضرة العاشرة

المحاضرة الحادية عشرة

(التفاضل وتطبيقاته)

يطلق على عملية التفاضل في بعض الأحيان إيجاد المشتقة الأولى للدالة أو المعامل التفاضلي الأول ويرمز له بـ $\frac{dy}{dx}$ أو $\grave{f}(x)$

ودائما تكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع وهو y والآخر متغير مستقل وهو x ويكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة.

المعطى: دالة أو معادلة $f(x) = 5x + 9$

المطلوب: المشتقة الأولى للدالة $\grave{f}(x) = \frac{dy}{dx} = ???$

أ - تفاضل المقدار الثابت:

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائما صفر فمثلا إذا كانت الدالة على شكل:

$y = c$ حيث c ثابت

فإن المتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائما مهما تغير المتغير المستقل x وعلى ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يؤثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضيا كما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

ب - تفاضل المتغير x المرفوع إلى أس (x^n):

إذا كان $f(x) = x^n$ حيث n عدد طبيعي

فإن $f'(x) = nx^{n-1}$

1) $f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$
2) $f(x) = 15x^4 \Rightarrow f'(x) = 15 \times (4)x^{4-1} = 60x^3$
3) $f(x) = 10x \Rightarrow f'(x) = 10 \times (1)x^{1-1} = 10x^0 = 10 \times (1) = 10$

ج - تفاضل الدوال كثيرات الحدود:

إذا كان *f(x) h(x)* اقترانيين قابلين للاشتقاق فإن $(f \pm h)'(x) = f'(x) \pm h'(x)$

مثال:

1) $f(x) = 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 3x$
   $\Rightarrow f'(x) = 20x^3 + 18x^2 + 16x + 3$
2) $f(x) = 20x^5 + 10x^3 - 5x^2 + 15x + 30$
   $\Rightarrow f'(x) = 100x^4 + 30x^2 - 10x + 15$

د - مشتقة حاصل ضرب دالتين:

إذا كان *f(x)*، *h(x)* اقترانين قابلين للاشتقاق فإن:

مشتقة حاصل ضرب اقترانين = مشتقة الدالة الأولى × الدالة الثانية + الدالة الأولى ×مشتقة الدالة الثانية.

$$(f.h)'(x) = f'(x).h(x) + f(x).h'(x)$$

مثال:

1) $f(x) = (3x+1)(x^2-7x)$
   $\Rightarrow f'(x) = (3x+1)(2x-7) + (x2 \quad -7x)(3)$
2) $f(x) = (10x^3-12)(5x^2+2x)$
   $\Rightarrow f'(x) = (10x^3-12)(10x+2) + (5x^2+2x)(30x^2)$

هـ - مشتقة حاصل قسمة دالتين:

إذا كان *f(x)*، *h(x)* اقترانين قابلين للاشتقاق فإن:

$$(\frac{f}{h})'(x) = \frac{f'(x).h(x) - f(x).h'(x)}{(h(x))^2}$$

$$\textit{مشتقة حاصل قسمة دالتين} = \frac{\textit{المقام تفاضل البسط} \times \textit{المقام} - \textit{البسط} \times \textit{تفاضل المقام}}{(\textit{المقام})^2}$$

مثال:

1) $f(x) = \frac{4x+2}{3x}$
   $\Rightarrow f'(x) = \frac{(3x)(4)-(4x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x-12x-6}{9x^2} = -\frac{6}{9x^2} = -\frac{2}{3x^2}$
2) $f(x) = \frac{x^2-3x}{2x^2}$
   $\Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2(2x-3)-(x^2-3x)4x}{(2x^2)^2}$

و – إذا كان $f(x) = x^{-n}$ **حيث *n* عدد طبيعي :**

فإن:

$f'(x) = -nx^{-n-1}$ ؤ

مثال:

1) $f(x) = x^{-2}$
   $\Rightarrow f'(x) = -2x^{-3}$
2) $f(x) = 5x^{-1}$
   $\Rightarrow f'(x) = 5 \times -1x^{-2} = -5x^{-2}$

ح – قاعدة تفاضل القوس المرفوع لأس:

تفاضل أي قوس= تفاضل القوس نفسة× تفاضل ما بداخل القوس

مثال: إذا كانت $y = (3x^2-6x)^4$

فإن: $\frac{dy}{dx} = 4\,(3x^2-6x)^3(6x-6)$

مثال: إذا كانت $y = (5x^4+8)^{-3}$

فإن: $\frac{dy}{dx} = -3\,(5x^4+8)^{-4}(20x^3)$

المشتقات العليا للدالة:

مثال:

ؤ1) $y =' f(x) = 15x^4 + 12x^3 + 20x^2 - 5x + 12$

- $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 60x^3 + 36x^2 + 40x - 5$ المشتقة الأولى
- $\frac{d^2y}{dx^2} = f^{''2}$ المشتقة الثانية
- $\frac{d^3y}{dx^3} = f'''$ المشتقة الثالثة

التطبيقات الاقتصادية و الإدارية للتفاضل:

***1* – المرونة**

***2* – الاستهلاك والادخار**

***3* – النهايات العظمى والصغرى**

***4* – الربح الحدي**

أ- تعريف مرونة الطلب السعرية:

تعرف مرونة الطلب السعرية على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في السعر.

ب- تعريف مرونة الطلب الدخلية:

تعرف مرونة الطلب الدخلية على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل.

ج - قياس مرونة الطلب:

مرونة الطلب باستخدام التفاضل تساوي:

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

ملاحظة:

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

د- حالات المرونة السعرية (م):

- القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة).
- القيمة المطلقة للمرونة < واحد (طلب قليل المرونة أو غير مرن).
- القيمة المطلقة للمرونة = واحد (طلب متكافئ المرونة).
- القيمة المطلقة للمرونة > واحد (طلب مرن).
- القيمة المطلقة للمرونة = ما لا نهاية (طلب لا نهائي المرونة).

ملاحظة: تهمل الإشارة السالبة في حالة المرونة

<u>مثال 1:-</u>

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي$(D = 80 - 6x)$

أوجد معامل المرونة إذا كانت الكمية المطلوبة *100* وحدة عند سعر يساوي *10* ريال.

<u>الحل:-</u>

- أولا نوجد المشتقة الأولى لدالة الطلب:

$$D' = -6$$

- ثانيا التعويض في القانون: م $=$ المشتقة الاولى لدالة الطلب $\times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

$$\text{م} = (-6) \times \frac{10}{100} = -0.6$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي النتائج بقطع النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا الطلب في هذه الحالة <u>قليل المرونة أو غير مرن</u>.

<u>مثال 2:-</u>

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي

$$(D = 15x - 20)$$

أوجد معامل المرونة إذا كانت الكمية المطلوبة *1000* وحدة عند سعر يساوي *100* ريال.

<u>الحل:-</u>

- أولا نوجد المشتقة الأولى لدالة الطلب:

$$(D' = 15)$$

- ثانيا التعويض في القانون:

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

$$\text{م} = (15) \times \frac{100}{1000} = 1.5$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي النتائج بقطع النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا الطلب في هذه الحالة <u>مرن</u>.

الاستهلاك والادخار:

1- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك *K* حيث الاستهلاك دالة في الدخل لواحد ريال.

قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة لكن أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب).

2- الميل الحدي للادخار = المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل لواحد ريال

قيمة الميل الحدي للاستهلاك أو للادخار تكون موجبة لكن أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب).

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = 1

مثال 1:-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي:

$$(K = 15 + 0.6x - 0.02x^2)$$

، المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك والميل الحدي للادخار.

الحل:-

- دالة الاستهلاك الحدي هي المشتقة الأولى للاستهلاك:

$$K' = 0.6 - 0.04x$$

- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي واحد ريال هو:

$$\Rightarrow K'(1) = 0.6 - 0.04 \times 1 = 0.56$$

- الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي واحد ريال هو:

1 − الميل الحدي للاستهلاك = 1− 0.56 = 0.44

مثال 2:-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي:

$$(K = 18 + 0.8x - 0.15x^2)$$

، المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك والميل الحدي للادخار.

الحل:-

- دالة الاستهلاك الحدي هي المشتقة الأولى للاستهلاك:

$$K' = 0.8 - 0.3x$$

- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي واحد ريال هو:

$$\Rightarrow K'(1) = 0.8 - 0.3 \times 1 = 0.5$$

- الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي واحد ريال هو:

1 − الميل الحدي للاستهلاك = 1− 0.5 = 0.5

نهاية المحاضرة الحادية عشر

المحاضرة الثانية عشر

(تابع التفاضل والتكامل) النهايات العظمى والصغرى

القيم القصوى بطريقة المشتقة الثانية:

يطلق على القيم القصوى ايضاً النهايات العظمى والصغرى للاقتران

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى:

1- يتم إيجاد المشتقة الأولى للإقتران ثم نساويها بالصفر لحساب قيم x.

2- يتم إيجاد المشتقة الثانية ثم التعويض فيها بقيم x السابق حسابها في الخطوة السابقة.

3- تحديد نوع النهاية (عظمى – صغرى).

← إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة فهذا يدل على وجود نهاية عظمى.

← إذا كانت إشارة المشتقة الثانية موجبة فهذا يدل على وجود نهاية صغرى.

مثال 1:-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 12$

حدد إذا ما كانت هذه الدالة تمثل نهاية كبرى أو صغرى؟

الحل:-

- المشتقة الأولى للدالة: (بالقسمة على 3) $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$

$$f'(x) = x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2$$

- المشتقة الثانية للدالة: $f'(x) = 6x - 3$

← المشتقة الثانية للدالة سالبة وبالتالي فهي تحقق نهاية عظمى. $f'(-1) = -6 - 3 = -9$

← المشتقة الثانية للدالة موجبة وبالتالي فهي تحقق نهاية صغرى. $f'(2) = 12 - 3 = 9$

مثال 2:-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل

$$f(x) = 500 - 0.2x + 0.1x^2$$

حدد إذا ما كانت هذه الدالة تمثل نهاية كبرى أو صغرى؟

الحل:-

المشتقة الأولى للدالة $f'(x) = -0.2 + 0.2x = 0 \Rightarrow x = 1$

المشتقة الثانية للدالة: $f'(x) = 0.2$

← نجد أن المشتقة الثانية للدالة موجبة بدون تعويض وبالتالي فهي تحقق نهاية صغرى.

في البداية نتعرف على بعض المصطلحات المستخدمة في التطبيقات:

لاستخراج التكلفة الحدية نعمل تفاضل لتكلفة الكلية

1. التكلفة الكلية TC
2. الايراد الكلى TR = سعر البيع P × الكمية المباعة Q
3. الربح الكلى TP = الايراد الكلى TR – التكلفة الكلية TC
4. التكلفة الحدية MC = المشتقة الأولى للتكلفة الكلية TC
5. الايراد الحدى MR = المشتقة الأولى للايراد الكلى TR
6. الربح الحدى MP = المشتقة الأولى للربح الكلى TP

<u>مثال 1:-</u>

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية:

$$TR = 12Q^3 + 20Q^2 - 10Q + 30$$

أوجد الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع *10* وحدات؟

<u>الحل:-</u> *عن طرق الالة* $=3990$ ➔ $\frac{d}{dx}(12x^3+20x^2-10x+10)_{x=10}$ ➔ $\int_0^0$ ➔ SHIFT

- دالة الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي:

$$MR = 36Q^2 + 40Q - 10$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو *10* وحدات إذا $Q = 10$. فإن الايراد الحدي يساوى:

$$MR = 36Q^2 + 40Q - 10 = 3600 + 400 - 10 = 3990$$

<u>مثال 2:-</u>

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة الواحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية:

$$P = 4Q^2 + 6Q + 5$$

حيث أن Q تشير إلى عدد الوحدات المباعة.

<u>المطلوب:</u>

إيجاد الإيراد الحدي عند بيع وإنتاج *15* وحدة؟

<u>الحل: -</u> عن طريق الالة الحاسبة سبق شرحها في المثال السابق

- دالة الإيراد الكلي TR = عدد الوحدات المباعة Q X سعر بيع الوحدة P

$$TR = Q \times P = Q(4Q^2 + 6Q + 5) = 4Q^3 + 6Q^2 + 5Q$$

- دالة الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي:

$$MR = 12Q^2 + 12Q + 5$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو *15* وحدة إذا $Q = 15$.

الإيراد الحدي $= \mathbf{12 \times 15^2 + 12 \times 15 + 5 = 28\ 8\ 5}$ ***ريال***

مثال 3:-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ شكل:

$$TC = 10Q^2 - 12Q + 15$$

أوجد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع *10* وحدات؟

الحل:- عن طريق الالة الحاسبة سبق شرحها في المثال السابق

- دالة التكاليف الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكاليف الكلية:

$$MC = 20x - 12$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو *10* وحدات إذا $Q = 10$.

التكاليف الحدية=10×20-12=188 ريال

مثال 4:-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات هي:

$$TR = 2Q^3 - 6Q^2 + 10Q - 15$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل

$$TC = 15Q^2 + 9Q - 17$$

المطلوب:

اوجد دالة الربح الكلي ثم الربح الحدي.

الحل:-

- الربح الكلي = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

$$TP = TR - TC \quad = (2Q^3 - 6Q^2 + 10Q - 15) - (15Q^2 + 9Q - 17) \quad = 2Q^3 - 21Q^2 + Q + 2$$

- دالة الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي:

$$MP = 6Q^2 - 42Q + 1$$

مثال 7:-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات هي:

$$TR = 12Q^3 + 5Q^2 - 2Q + 100$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل

$$TC = 10Q^2 + 3Q + 20$$

المطلوب:

اوجد حجم الأرباح الحدية عند إنتاج وبيع *25* وحدة.

<u>الحل:-</u>

- الربح الكلي = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

$$TP = TR - TC \quad = (12Q^3 + 5Q^2 - 2Q + 100) - (10Q^2 + 3Q + 20) \quad = 12Q^3 - 5Q^2 - 5Q + 80$$

- دالة الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي:

$$MP = 36Q^2 - 10Q - 5$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو *25* وحدة إذا $Q = 25$.

$$MP = 36x^2 - 10x - 5 = 36 \times 25^2 - 10 \times 25 - 5 = 22245 \ \textit{S.R.}$$

<u>مثال *8*:-</u>

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية والإرادات الكلية وتأخذ هذه الدوال الشكل التالي:

$$TR = 30Q^4 + 12Q^2 - 6Q + 15TC = 13Q^3 - 5Q^2 + 3Q - 20$$

المطلوب:

1- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع *10* وحدات.

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع *12* وحدة.

3- دالة الربح الكلي.

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع *5* وحدات.

<u>الحل:-</u>

1- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع *10* وحدات:

$$TR = 30Q^4 + 12Q^2 - 6Q + 15 \Rightarrow MR = 120Q^3 + 24Q - 6$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو *10* وحدات إذا $Q = 10$.

$$MR = 120 \times 10^3 + 24 \times 10 - 6 = 120234 \ \textit{S.R.}$$

<u>تابع الحل:-</u>

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع *12* وحدة:

$$TC = 13Q^3 - 5Q^2 + 3Q - 20 \Rightarrow MC = 39Q^2 - 10Q + 3$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو *12* وحدات إذا $Q = 12$.

$$MC = 39 \times 12^2 - 10 \times 12 + 3 = 5499 \ \textit{S.R.}$$

<u>تابع الحل:-</u>

3- دالة الربح الكلي:

$$TR = 30Q^4 + 12Q^2 - 6Q + 15TC = 13Q^3 - 5Q^2 + 3Q - 20 \Rightarrow TP = TR - TC \quad = (30Q^4 + 12Q^2 - 6Q + 15) - (13Q^3 - 5Q^2 + 3Q - 20) \quad TP = 30Q^4 - 13Q^3 + 17Q^2 - 9Q + 35$$

تابع الحل:-

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :

$$TP = 30Q^4 - 13Q^3 + 17Q^2 - 9Q + 35 \Rightarrow MP = 120Q^3 - 39Q^2 + 34Q - 9$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذا $Q = 5$.

$$MP = 120 \times 5^3 - 39 \times 5^2 + 7 \times 5 - 9 = 13981\ S.R.$$

نهاية المحاضرة الثانية عشر

المحاضرة الثالثة عشر – والأخيرة

(التكامل وتطبيقاته)

يعتبر التكامل عملية عكسية للتفاضل حيث يتم إيجاد قيمة y. ويرمز للتكامل بالرمز $\int$ وعلى ذلك فإذا كانت دالة على الشكل $f(x)$ ونرغب في إجراء عملية التكامل على هذه الدالة فسوف نكتب:

$$\int f(x).\,dx$$

أي تكامل الدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x.

أ – التكامل الغير محدود للمقدار الثابت:

يتم إضافة x الى المقدار الثابت ثم زائداً c، حيث c مقدار ثابت يتم اضافته لأى تكامل أياً كان.

$$\int k.\,dx = kx + c$$

$$\int 5.\,dx = 5x + c$$

$$\int 1.\,dx = x + c$$

ب - تكامل x المرفوعة إلى أس:

يتم إضافة العدد واحد إلى الأس ثم نقسم على الأس الجديد.

$$\int x^n\,.\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$$

__مثال 1:-__

$$\int x^3\,.\,dx = \frac{1}{4}x^4 + c2)$$

$$\int x^5.\,dx = \frac{1}{6}x^6 + c\;3)$$

$$\int 6.\,dx = 6x + c\;4)$$

$$\int 3x^4.\,dx = \frac{3}{5}x^5 + c$$

__مثال 2:-__

أوجد:

$$\int (x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3x + 8)\,.\,dx$$

الحل:-

$$f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 8x + c$$
$$= \frac{1}{6}x^6 + x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 8x + c$$

مثال 3:- أوجد:

$$\int (4x^3 - 30x^2 + 20x + 3)\,.\,dx$$

الحل:-

$$f(x) = \frac{4}{4}x^4 - \frac{30}{3}x^3 + \frac{20}{2}x^2 + 3x + c$$
$$= x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 3x + c$$

جـ - إيجاد قيمة *c*:

مثال 1:- إذا أعطيت الدالة التالية:

$$\int (9x^2 - 10x + 15).\,dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (4,1).

الحل:-

$$y = \frac{9}{3}x^3 - \frac{10}{2}x^2 + 15x + c$$
$$= 3x^3 - 5x^2 + 15x + c$$

حيث أن قيمة $x=4$ وقيمة $y=1$

$$1 = 3(4)^3 - 5(4)^2 + 15(4) + c$$
$$1 = 3 \times 64 - 5 \times 16 + 60 + c$$
$$1 = 172 + c$$
$$\Rightarrow c = -171$$

مثال 2:-

إذا أعطيت الدالة التالية:

$$\int (\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 7)\,.\,dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (2,3).

الحل:-

$$y = \frac{1}{2 \times 4}x^4 - \frac{1}{4 \times 3}x^3 - 7x + c$$

$$= \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{12}x^3 - 7x + c$$

حيث أن قيمة $x=2$ وقيمة $y=3$

$$3 = \frac{1}{8}(2)^4 - \frac{1}{12}(2)^3 - 7(2) + c$$

$$3 = \frac{1}{8} \times 16 - \frac{1}{12} \times 8 - 14 + c$$

$$3 = -\frac{38}{3} + c$$

$$\Rightarrow c = \frac{47}{3}$$

بعض رموز وقواعد تطبيقات التكامل:

1. *الإيراد الكلي* TR = *تكامل دالة الإيراد الحدي* MR .
2. *التكلفة الكلية* TC = *تكامل دالة التكلفة الحدية* MC .
3. *الربح الكلي* TP = *تكامل دالة الربح الحدي* MP .
4. *الربح الكلي* TP = *الإيراد الكلي* TR − *التكلفة الكلية* TC .

مثال 1:

إذا علمت أن دالة الإيراد الحدي تأخذ شكل:

$$MR = 3Q^2 + 6Q - 10$$

أوجد حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل:-

- إيجاد دالة الإيراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الإيراد الحدي:

$$TR = \int (3Q^2 + 6Q - 10)dQ = \frac{3}{3}Q^3 + \frac{6}{2}Q^2 - 10Q \qquad = Q^3 + 3Q^2 - 10Q$$

← حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع 5 وحدات $(Q = 5)$ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة الإيراد الكلي كما يلي:

$$TR(5) = (5)^3 + 3 \times (5)^2 - 10 \times 5 = 150 \;\; SR$$

مثال 2:

إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية تأخذ شكل:

$$MC = 12Q^3 - 60Q^2 + 8Q - 40$$

أوجد حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع *10* وحدات ؟

الحل:-

- إيجاد دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية:

$$TC = \int (12Q^3 - 60Q^2 + 8Q - 40)dQ$$

$$= \frac{12}{4}Q^4 - \frac{60}{3}Q^3 + \frac{8}{2}Q^2 - 40Q$$

$$= 3Q^4 - 20Q^3 + 4Q^2 - 40Q$$

← حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع *10* وحدات $(Q = 10)$ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة *x* في دالة التكاليف الكلية كما يلي:

$$TC(10) = 3 \times (10)^4 - 20 \times (10)^3 + 4 \times (10)^2 - 40 \times 10 = 10000 \ \ SR$$

مثال 3:

إذا علمت أن دالة الإيراد الحدي تأخذ شكل:

$$MR \ = 8Q^3 + 24Q^2 - 12Q + 20$$

ودالة التكاليف الحدية تأخذ شكل:

$$MC \ = 36Q^2 + 40Q - 10$$

المطلوب:

1- حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع *20* وحدة.

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع *25* وحدة.

3- دالة الربح الحدي.

4- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين.

5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع *10* وحدات.

الحل:-

1- حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع *20* وحدة حيث أن دالة الإيراد الحدي هي:

$$MR = 8Q^3 + 24Q^2 - 12Q + 20$$

- يمكن الوصول إلى دالة الإيراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الإيراد الحدي كما يلي:

$$TR = \int (8Q^3 + 24Q^2 - 12Q + 20)dQ$$

$$= \frac{8}{4}Q^4 + \frac{24}{3}Q^3 - \frac{12}{2}Q^2 + 20Q$$

$$= 2Q^4 + 8Q^3 - 6Q^2 + 20Q$$

← حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع *20* وحدة $(Q = 20)$ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة Q في دالة الإيراد الكلي كما يلي:

$$TR = 2 \times (20)^4 + 8 \times (20)^3 - 6 \times (20)^2 + 20 \times (20) = 382000\ SR$$

تابع الحل:-

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع *25* وحدة حيث أن دالة التكاليف الحدية هي:

$$MC = 36Q^2 + 40Q - 10$$

- يمكن الوصول إلى دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية كما يلي:

$$TC = \int (36Q^2 + 40Q - 10)dQ \quad = \frac{36}{3}Q^3 + \frac{40}{2}Q^2 - 10Q \quad = 12Q^3 + 20Q^2 - 10Q$$

← حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع *25* وحدة $(Q = 25)$ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة Q في دالة التكاليف الكلية كما يلي:

$$TC = 12 \times (25)^3 + 20 \times (25)^2 - 10 \times (25) = 199750\ SR$$

تابع الحل:-

3- دالة الربح الحدي:

الربح الحدي = الإيراد الحدي – التكاليف الحدية

$$MP = MR - MC \quad = (8Q^3 + 24Q^2 - 12Q + 20) - (36Q^2 + 40Q - 10) \ = 8Q^3 - 12Q^2 - 52Q + 30$$

تابع الحل:-

4- الطريقة الأولى: الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي

$$MP = 8Q^3 - 12Q^2 - 52Q + 30 \Rightarrow TP$$

$$= \int (8Q^3 - 12Q^2 - 52Q + 30)dQ$$

$$= \frac{8}{4}Q^4 - \frac{12}{3}Q^3 - \frac{52}{2}Q^2 + 30Q$$

$$= 2Q^4 - 4Q^3 - 26Q^2 + 30Q$$

- الطريقة الثانية: الربح الكلي = الإيراد الكلي – التكاليف الكلية

$$TP = TR - TC \ = (2Q^4 + 8Q^3 - 6Q^2 + 20Q) - (12Q^3 + 20Q^2 - 10Q) = 2Q^4 - 4Q^3 - 26Q^2 + 30Q$$

تابع الحل:

5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع *10* وحدات:

- دالة الربح الكلي هي:

$$TP = 2Q^4 - 4Q^3 - 26Q^2 + 30Q$$

← وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة $(Q = 10)$ في المعادلة السابقة كما يلي:

$$TP = 2 \times (10)^4 - 4 \times (10)^3 - 26 \times (10)^2 + 30 \times (10) = 20000 - 4000 - 2600 + 300 = 13700\ SR$$

انتهت المحاضرة الثالثة عشر

المحاضرة الرابعة عشر مراجعة

تم انتهاء من هذا العمل في 2:00 مساء يوم الخميس 2019-03-28

تمنياتي للجميع بتوفيق والنجاح

اطلب من كل من استفاد من هذا العمل لا ينسانا من خالص دعائكم