



الفصل الخامس: التكامل وتطبيقاته

- التكامل المحدود :

إذا كانت $g(x)$ دالة بحيث $g'(x) = f(x)$ فإن

$$\int_a^b f(x) dx = g(x) \Big|_a^b = g(b) - g(a).$$

وليس هذا المقدار التكامل المحدود للدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ وليس a بالحد الأدنى للتكامل و b بالحد الأعلى للتكامل.

مثال :- اوجد $\int_1^3 x^3 dx$ ؟؟

$$\text{الحل :- } \int_1^3 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4}$$

$$= \frac{81}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{80}{4} = 20.$$



مثال :- اوجد ناتج التكامل التالي :-

$$\int_{-1}^1 (2x^2 - 5) dx = ??$$

الحل :-

$$= \int_{-1}^1 2x^2 dx - \int_{-1}^1 5 dx$$

$$= \left. \frac{2x^3}{3} \right|_{-1}^1 - \left. 5x \right|_{-1}^1$$

$$= \left(\frac{2(1)^3}{3} - \frac{2(-1)^3}{3} \right) - (5(1) - 5(-1))$$

$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) - (5 + 5) = \frac{4}{3} - 10$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{30}{3} = -\frac{26}{3}$$

مثال :- اوجد ناتج التكامل التالي :-

$$\int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{x} \right) dx = ??$$

$$= \int_1^3 x^2 dx - \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^3 - \left. \ln|x| \right|_1^3$$

$$= \frac{27}{3} - \ln 3 = \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3} \right) - (\ln 3 - \ln 1)$$



بعض من خواص التكامل المحدود :-

عدد ثابت $\rightarrow$

$$\boxed{1} \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

مثال :-

$$\begin{aligned} \int_1^2 4x^3 dx &= 4 \int_1^2 x^3 dx = 4 \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 \\ &= 4 \left[\frac{16}{4} - \frac{1}{4} \right] \\ &= 4 \left[\frac{15}{4} \right] = 15. \end{aligned}$$

$$\int_0^3 \frac{1}{2} x^4 dx = ??$$

مثال :-

$$= \frac{1}{2} \int_0^3 x^4 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^3$$

الحل :-

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{3^5}{5} - \frac{0^5}{5} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{243}{5} \right] = \frac{243}{10} = 24.3$$



$$\boxed{2} \int_a^a f(x) dx = 0.$$

إذا كان حدود التكامل متساوية
فإن الناتج = صفر.

مثال :-

$$\textcircled{1} \int_a^a 10x^3 dx = 0.$$

$$\textcircled{2} \int_{-2}^{-2} f(x) dx = 0.$$

$$\boxed{3} \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

مثال :- ارجع الناتج ما يلي بابط صورة :-

$$\textcircled{1} \int_0^2 (\underbrace{3x^2}_{f(x)} + \underbrace{e^x}_{g(x)}) dx = \int_0^2 3x^2 dx + \int_0^2 e^x dx$$

$$= x^3 \Big|_0^2 + e^x \Big|_0^2$$

$$= (2^3 - 0^3) + (e^2 - e^0)$$

$$= 8 + e^2 - 1 = 7 + e^2.$$

عدد ثابت يمكن ايجاده من خلال الآلة الحاسبة.



في عكس حدود التكامل
يجب أن نضيف إشارة سالب

$$\boxed{4} \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

مثال: إذا كان

$$\int_2^4 f(x) dx = 8 \quad \text{فإن} \quad \int_4^2 f(x) dx = -8$$

وكذلك إذا كان

$$\int_1^{-1} g(x) dx = \frac{1}{2} \quad \text{فإن} \quad \int_{-1}^1 g(x) dx = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{5} \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

مثال: - أوجد ناتج التكامل التالي :-

$$\textcircled{1} \int_2^4 x^2 dx + \int_4^2 x^2 dx = \int_2^2 x^2 dx = 0.$$

حل آخر

$$\int_2^4 x^2 dx - \int_2^4 x^2 dx = 0.$$



أمثلة :- ارجب كل من التكاملات التالية .

$$1) \int_0^2 3 dx = 3x \Big|_0^2 = 3(2) - 3(0) = 6.$$

$$\begin{aligned} 2) \int_0^2 (x+6) dx &= \int_0^2 x dx + \int_0^2 6 dx \\ &= x \Big|_0^2 + 6x \Big|_0^2 \\ &= \left(\frac{4}{2} - \frac{0}{2}\right) + (6(2) - 6(0)) \\ &= 2 + 12 = 14. \end{aligned}$$

كذلك يمكن أنه نقوم بعملية التكامل مباشرة

التوزيع ليصبح الحل بطريقة أخرى :-

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x+6) dx &= \left(\frac{x^2}{2} + 6x \right) \Big|_0^2 \\ &= \left(\frac{2^2}{2} + 6(2) \right) - \left(\frac{0^2}{2} + 6(0) \right) \\ &= 2 + 12 - 0 \\ &= 14. \end{aligned}$$

③ $\int_1^3 (3x^2 - 4x - 5) dx$. الانتي من تعديت الانتي من تعديت
الحد الاعلى الحد الادنى
 $= [x^3 - 2x^2 - 5x]_1^3 = [27 - 18 - 15] - [1 - 2 - 5]$
 $= -6 - (-6)$
 $= -6 + 6 = 0.$

④ $\int_{-2}^2 (5x + 4) dx = \left[\frac{5x^2}{2} + 4x \right]_{-2}^2$
 $= \left(\frac{5(2)^2}{2} + 4(2) \right) - \left(\frac{5(-2)^2}{2} + 4(-2) \right)$
 $= \left(\frac{20}{2} + 8 \right) - \left(\frac{20}{2} - 8 \right)$
 $= \frac{20}{2} + 8 - \frac{20}{2} + 8 = 16.$

⑤ $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1$
 $= \ln 2 - 0 = \ln 2.$

$$(6) \int_0^{\pi} \sin x \, dx = ??$$

الحل:-

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0))$$

$$= -(-1) - (-1)$$

$$= 1 + 1 = 2.$$

تمارين :- اوجد التكاملات التالية :-

$$i) \int_0^2 (5x^3 - 3x + 6) \, dx = ??$$

$$ii) \int_{-2}^7 7 \, dx = ??$$

$$iii) \int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2} \, dx.$$

$$iv) \int_2^2 x^{-\frac{1}{2}} \, dx.$$

$$v) \int_0^{\pi} \cos x \, dx.$$

نظرة المحاضرة المسجلة السادسة عشر
مع التحيات للجميع بدوام التقدم والنجاح