الفصل الخامس :- التكامل وتطبيقاته

ينقسم التكامل الى قسمين ⟵ التكامل المحدود
⟵ التكامل غير المحدود

- التكامل المحدود : هو عملية عكسية للاشتقاق .

$$F(x) = x^3 \xrightarrow{\text{تفاضل}} F'(x) = 3x^2$$

$$\int F'(x)\,dx = \frac{3x^{2+1}}{2+1} \xleftarrow{\text{تكامل}} F'(x) = 3x^2$$

$$= \frac{3x^3}{3} = x^3 = F(x) .$$

تمارين وتدريبات :-

- اوجد قيمة التكامل لما يلي :-

1) $f(x) = -3/2 \Rightarrow \int f(x)\,dx = \int -3/2\,dx$

دالة ثابتة .

$$= -3/2 \int dx$$

$$F(x) = -3/2\, x + c .$$

الاجابة مشابهة فالحل صحيح .

وللتأكد من صحة نشتقه :-

$$F'(x) = -3/2 .$$

$\boxed{2}$ $$\int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = \frac{x^{-2}}{-2} + c.$$

$\boxed{3}$ $$\int \tfrac{1}{2}x^{4}\,dx = \tfrac{1}{2}\int x^{4}\,dx = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^{4+1}}{4+1}\right) + c.$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^{5}}{5}\right) + c.$$

$$= \frac{x^{5}}{10} + c.$$

في حال الرغبة بالتأكد من صحة الحل نقوم باشتقاق الإجابة الأخيرة

$$f'(x) = \frac{5x^{4}}{10} = \frac{x^{4}}{2} = \tfrac{1}{2}x^{4}.$$

$\boxed{4}$ $$\int (x^{3} - 2x^{2} - x^{-1} + 5)\,dx.$$

$$= \int x^{3}\,dx - 2\int x^{2}\,dx - \int x^{-1}\,dx + 5\int dx.$$

$$= \frac{x^{4}}{4} - 2\left(\frac{x^{3}}{3}\right) - \ln|x| + 5x + c.$$

القاعدة الخاصة بهذا الجزء هي

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c.$$

قاعدة: $\int e^x dx = e^x + c$

$\boxed{5}$ $\int e^{5x} dx = \frac{e^{5x}}{5} + c$.

$\boxed{6}$ $\int e^{-\frac{1}{2}x} dx = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{-\frac{1}{2}} + c = -2e^{-\frac{1}{2}x} + c$.

$\boxed{7}$ $\int e^{2x-4} dx = \frac{e^{2x-4}}{2} + c = f(x)$.

للتأكد من صحة الحل :- نشتق الناتج

$f'(x) = \cancel{2}(e^{2x-4}) \cdot \cancel{\frac{1}{2}}$
$= e^{2x-4}$

قاعدة: $(\int \sin x\, dx = -\cos x + c)$
$(\int \cos x\, dx = \sin x + c)$

$\boxed{8}$ $\int \sin 5x\, dx = -\frac{\cos 5x}{5} + c$.

$\boxed{9}$ $\int \cos -2x\, dx = \frac{\sin(-2x)}{-2} + c$

في حال وجود تكامل يحتوي على دالة ومشتقتها ، فإن القاعدة تصبح كالتالي :

$$\int (f(x))^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c \ , \quad n \neq -1$$

$\boxed{10}$

$$\int \underbrace{(x^3+1)}_{f(x)}{}^2 \cdot \underbrace{3x^2}_{f'(x)}\,dx = \frac{(x^3+1)^3}{3} + c = f(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(3(x^3+1)^2 \cdot 3x^2\right)$$

$$= (x^3+1)^2 \cdot 3x^2$$

$\boxed{11}$

$$\int (6x^2-5)^5 \cdot 12x\,dx = \frac{(6x^2-5)^6}{6} + c.$$

$\boxed{12}$

$$\int (4x^5-6x)^4 \cdot (20x^4-6)\,dx$$

هذا المقدار مشتقة ما داخل القوس

$$= \frac{(4x^5-6x)^5}{5} + c.$$

في حال كانت $n = -1$:-

$$\int (f(x))^{-1} \cdot f'(x)\, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c$$

$\boxed{10}$

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x)^1}\, dx = \int (x^2+x)^{-1} (2x+1)\, dx$$

مشتقة

$$= \ln|x^2+x| + c.$$

ماشي

للتأكد ← نشتقه

$$\frac{2x+1}{x^2+x}$$

$\boxed{11}$

$$\int (x^2+5)^{-1} \cdot 2x\, dx = \int \frac{2x}{x^2+5}\, dx$$

مشتقة - ما بين القوسين

$$= \ln|x^2+5| + c.$$

- تابع قواعد التكامل غير المحدود :-

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \times n+1} + c.$$

معامل x

الاس الجديد

أمثلة :- اوجد قيمة كل من التكاملات التالية :-

[1]

$$\int (5x+2)^3 dx = \frac{(5x+2)^{3+1}}{3+1 \times 5} + c$$

$$= \frac{(5x+2)^4}{4 \times 5} + c = \frac{(5x+2)^4}{20} + c$$

[2]

$$\int (3x-12)^7 dx = \frac{(3x-12)^{7+1}}{8 \times 3} + c$$

$$= \frac{(3x-12)^8}{24} + c.$$

حل المعادلات التفاضلية :-

تعريف :- اذا عرفنا $\frac{dY}{dx} = f(x)$ فإنه يمكن كتابة هذا المقدار على الصورة $dY = f(x)\,dx$ ومن خلال اخذ تكامل الطرفين تصبح الصورة التالية :-

$$\int dY = \int f(x)\,dx$$

$$Y = \int f(x)\,dx$$

بمعنى أن Y هي الدالة التي مشتقتها التفاضلية بالنسبة الى x هي $f(x)$، وتسمى هذه المعادلة $\frac{dY}{dx} = f(x)$ بالمعادلة التفاضلية وعملية ايجاد قيمة Y بعملية حل المعادلة التفاضلية .

طريقة حل مثل النوع من المعادلات :

نقوم بعملية فصل المتغيرين X, Y عن بعضهما بحيث يصبح تفاضل كل منهما مضروباً في دالة ذلك المتغير فقط كما في المثال التالي :

مثال :- أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية :-

$$\frac{dy}{dx} = x y^{-2}$$

الحل :- نحاول فصل المتغيرات كل على حده.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$$

بالضرب التبادلي :-

$$y^2 dy = x\, dx.$$

بأخذ التكامل للطرفين :-

$$\int y^2 dy = \int x\, dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + c.$$

مثال :- حل المعادلة التفاضلية التالية :-

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3y^3.$$

نحاول فصل المتغيرات :-

$$dy = 4x^3y^3 dx.$$

$$\frac{dy}{y^3} = 4x^3 dx \Rightarrow y^{-3} dy = 4x^3 dx.$$

بتكامل الطرفين :-

$$\int y^{-3} dy = \int 4x^3 dx \Rightarrow \frac{y^{-2}}{-2} = x^4 + c.$$

مسائل وتمارين :-

١) اوجد قيمة كل من التكاملات التالية :-

[1] $\int (-3x-2)^5 \, dx$.

[2] $\int (10-2x)^{-3} \, dx$.

٢) اوجد حل كل من المعادلات التفاضلية التالية :-

[1] $\frac{dy}{dx} = 5x^3 y$.

[2] $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$.

نهاية المحاضرة المسجلة الخامسة عشر

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح