مقرر الرياضيات للإدارة

المستوى الثاني

الفصل الخامس

التكامل وتطبيقاته

جامعة الإمام عبدالرحمن بن فيصل
IMAM ABDULRAHMAN BIN FAISAL UNIVERSITY

كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

وكالة التعليم الالكتروني والتعلم عن بعد

١٤٣٩هـ-٢٠١٧م

د. رائد الخصاونة

الفصل الخامس: التكامل وتطبيقاته

❑ مفهوم التكامل:

ينقسم التكامل إلى قسمين: التكامل غير المحدود والتكامل المحدود، حيث يركز التكامل غير المحدود على عملية إيجاد المعكوس الرياضي للتفاضل ولهذا السبب يسمى أيضا بالاشتقاق العكسي. ومن جهة أخرى، يركز التكامل المحدود على حساب اطوال المنحنيات والمساحات والحجوم وما إلى ذلك من الدوال التي لها تطبيقات في شتى العلوم المختلفة.

أولا: التكامل غير المحدود

وهو عملية عكسية للاشتقاق، وتسمى عملية إيجاد y إذا علمت y' بعملية التكامل.

ويستعمل الرمز $\int$ للتعبير عن عملية عكس التفاضل ويطلق عليه رمز التكامل.

الفصل الخامس : التكامل وتطبيقاته

- وإذا كانت f دالة بدلالة المتغير x، فإن التكامل غير محدود التابع لها يعطى بالصورة التالية:

$$\int f(x)dx = F(x) + \underbrace{c}_{\text{ثابت التكامل}}$$

حيث

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

نلاحظ دائما أنه يرافق عملية التكامل الرمز dx وهو يدل على أن العملية تجرى بالنسبة للمتغير x، كما يرافق الناتج عدد ثابت ويرمزله بالرمز c ويسمى بثابت التكامل.

الفصل الخامس : التكامل وتطبيقاته

- ملخص يوضح العلاقة العكسية ما بين مفهوم التفاضل ومفهوم التكامل

$$F(x) \xrightarrow{\text{عملية التفاضل}} F'(x) = f(x)$$

$$\int f(x)dx = F(x) \xleftarrow{\text{عملية التكامل}} f(x)$$

- مثال يوضح العلاقة العكسية ما بين مفهوم التفاضل ومفهوم التكامل.

إذا كانت لدينا الدالة $f(x) = x^2$

فإن $f'(x) = 2x$ (عملية التفاضل)

أما $\int 2xdx = x^2 + c$ (عملية التكامل)

الفصل الخامس : التكامل وتطبيقاته

❑ مثال يوضح العلاقة العكسية ما بين مفهوم التفاضل ومفهوم التكامل:

إذا كانت لدينا الدالة $f(x) = \frac{1}{5}x^5$، واردنا أن نجد المشتقة الأولى، فنحصل على:

$f(x) = \frac{1}{5}x^5$ $\xrightarrow{\text{عملية التفاضل}}$ $f'(x) = \frac{1}{5}[5 \times x^{5-1}] = x^4$

نلاحظ أنه في عملية الاشتقاق تم تطبيق الخطوات التالي:
١- أخذ الأس وضربه كمعامل للمتغير
٢- نطرح من الأس الاصلي العدد ١

$f'(x) = x^4$ $\xleftarrow{\text{عملية التكامل}}$

$$\int f'(x)dx = \int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5}$$

نلاحظ أنه في عملية التكامل تم تطبيق الخطوات التالي:
١- نضيف للأس العدد ١
٢- نقسم الأس الجديد على المتغير x

الرمز c يمثل عدد ثابت حيث أننا لا نعرف فيما إذا كان اصل الدالة قبل عملية الاشتقاق يرافقها ثابت أم لا، وفي مثل هذا المثال نلاحظ أن قيمة الثابت =صفر

الفصل الخامس : التكامل وتطبيقاته

- قواعد التكامل:

١- تكامل الدالة الثابتة: إذا كانت $f(x) = a$، حيث a عدد ثابت فإن

$$\int f(x)dx = \int a dx = ax + c$$

مثال: أوجد قيمة كل من التكاملات التالية:

$$1- \int 10dx = 10x + c$$

$$2- \int -\frac{1}{3}dx = -\frac{1}{3}x + c$$

الفصل الخامس : التكامل وتطبيقاته

$$3 - \int e^2 dx = e^2 x + c$$

$$4 - \int \left(\frac{1}{5}\right)^3 dx = \frac{1}{125} x + c$$

٢- إذا كانت $f(x) = x^n$، فإن

$$\int f(x) dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

حيث n عدد حقيقي بشرط $n \neq -1$

الفصل الخامس : التكامل وتطبيقاته

مثال: أوجد قيمة كل من التكاملات التالية:

$$1- \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$2- \int -x^5 dx = -\frac{x^6}{6} + c$$

$$3- \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$4- \int -x^{-2} dx = \frac{-x^{-1}}{-1} + c = x^{-1} + c = \frac{1}{x} + c$$

نلاحظ أن مشتقة الدالة

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

تساوي

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} = -x^{-2}$$

الفصل الخامس : التكامل وتطبيقاته

3- إذا كانت $f(x) = e^x$، فإن

$$\int f(x)dx = \int e^x dx = e^x + c$$

٤ - إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$، فإن

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$$

بشرط $x \neq 0$.

الفصل الخامس : التكامل وتطبيقاته

5- إذا كانت $f(x) = sin(x)$، فإن

$$\int f(x)dx = \int sin(x)dx = -cos(x) + c$$

6 - إذا كانت $f(x) = cos(x)$، فإن

$$\int f(x)dx = \int cos(x)dx = sin(x) + c$$

الفصل الخامس : التكامل وتطبيقاته

7- إذا كانت $g(x) = af(x)$، فإن

$$\int g(x)dx = \int af(x)dx = a\int f(x)\, dx$$

يتم اخراج الثابت خارج التكامل

8 - إذا كانت $f(x)$، $g(x)$، دالتين فإن

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)\, dx$$

الفصل الخامس : التكامل وتطبيقاته

مثال: أوجد قيمة كل من التكاملات التالية:

للتأكد من صحة الحل، يمكن اشتقاق الناتج ليعطينا الدالة قبل عملية التكامل

$$1-\ \int 3x^2dx = 3\int x^2dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right] + c = x^3 + c$$

$$2-\ \int -\frac{6}{5}x^5dx = -\frac{6}{5}\int x^5dx = -\frac{6}{5}\left[\frac{x^6}{6}\right] + c = -\frac{1}{5}x^6 + c$$

$$3-\ \int 5x^{-1}dx = 5\int \frac{1}{x}dx = 5ln|x| + c$$

$$4-\ \int -x^{-2}dx = -\int x^{-2}dx = -1\times\frac{x^{-1}}{-1} + c = x^{-1} + c = \frac{1}{x} + c$$

الفصل الخامس : التكامل وتطبيقاته

$$5- \int (3x^2-2x)dx = 3\int x^2\,dx - 2\int x\,dx =$$

$$3\left[\frac{x^3}{3}\right] - 2\left[\frac{x^2}{2}\right] + c = x^3 - x^2 + c$$

$$6- \int 4sin(x)dx = 4\int sin(x)dx = 4[-cos(x)] + c$$

$$= -4cos(x) + c$$

$$7- \int 3(e^x - cos(x))dx = 3\int e^x dx - 3\int cos(x)dx$$

$$= 3e^x - 3sin(x) + c$$

الفصل الخامس : التكامل وتطبيقاته

$$8-\int (x^2-5x-10)dx = \int x^2\,dx - 5\int x\,dx - 10\int dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 5\times\frac{x^2}{2} - 10x + c = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 10x + c$$

$$9-\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$10-\int 4x^{\frac{-1}{4}}dx = 4\int x^{\frac{-1}{4}}dx = 4\left[\frac{x^{\frac{-1}{4}+1}}{\frac{-1}{4}+1}\right] + c = 4\left[\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}\right] = \frac{16}{3}x^{\frac{3}{4}} + c$$

الفصل الخامس : التكامل وتطبيقاته

❑ ملاحظة: إذا كان لدينا الدالة $f(x)$ ومشتقتها $f'(x)$ داخل تكامل معين فإن التكامل لهذا النوع من المسائل يعطى حسب القوانين التالية:

$$1. \int [f(x)]^n . f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \, , n \neq -1$$

أمثلة:

$$i. \quad \int 3(x^3+4)^4 x^2 dx = \frac{(x^3+4)^5}{5} + c$$

$$ii. \quad \int (x^2+1)^3 2x\, dx = \frac{(x^2+1)^4}{4} + c$$

$$iii. \quad \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + c = \frac{(\sin x)^2}{2} + c$$

الفصل الخامس : التكامل وتطبيقاته

- ملاحظة: إذا كان لدينا الدالة $f(x)$ ومشتقتها $f'(x)$ داخل تكامل معين فإن التكامل يعطى حسب القوانين التالية:

$$2. \int [f(x)]^n . f'(x)\, dx = \ln|f(x)| + c \,, n = -1$$

أمثلة:

$$i. \quad \int 4x^3(1+x^4)^{-1} dx = \ln|1+x^4| + c$$

$$ii. \quad \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int 2x(1+x^2)^{-1} dx = \ln|1+x^2| + c$$

الفصل الخامس : التكامل وتطبيقاته

- مسائل وتمارين:

$$1.\int \left(5x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 6\right)dx$$

$$2.\int \left(-3x^{2/3}\right)dx$$

$$3.\int \frac{2x}{x^2+5}dx$$

$$4.\int \left(5\sin x - 5\cos x\right)dx$$

$$5.\int \left(-5x^2\right)\left(-10x\right)dx$$

$$6.\int \left(e^x - x^{-3}\right)dx$$

نهاية المحاضرة المسجلة الرابعة عشر

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح