مقرر الرياضيات للإدارة

المستوى الثاني

تابع الفصل الرابع

التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

جامعة الإمام عبدالرحمن بن فيصل

IMAM ABDULRAHMAN BIN FAISAL UNIVERSITY

كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

وكالة التعليم الالكتروني والتعلم عن بعد

١٤٣٩هـ-٢٠١٧م

د. رائد الخصاونة

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

تطبيقات اقتصادية على التفاضل

دالة التكلفة الحدية Marginal Cost

التكاليف الثابتة Fixed Cost : وهي التكاليف التي لا تتغير بتغير كميات الانتاج.

التكاليف المتغيرة Variable Cost: وهي التكاليف التي تتغير بتغير كميات الانتاج.

التكاليف الكلية Total Cost: وهي مجموع التكاليف الثابتة والتكاليف المتغيرة للإنتاج معا.

التكاليف الحدية Marginal Cost: وهي أي تكاليف اضافية مطلوبة من اجل انتاج وحدة واحدة إضافية من سلعة ما حيث يمكن الحصول على دالة الإيراد الحدي من خلال تفاضل دالة التكلفة الكلية.

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

دالة الايراد الحدي Marginal Revenue:

دالة الإيراد الكلي Total Revenue: وهو العائد من بيع عدد من وحدات منتج معين

دالة الايراد الكلي= عدد الوحدات المباعة × سعر البيع للوحدة الواحدة

الإيراد الحدي Marginal Revenue

وهي العائد الناتج من بيع وحدة انتاج اضافية، حيث يمكن الحصول على دالة الإيراد الحدي من خلال تفاضل دالة الإيراد الكلي.

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

دالة الربح الحدي Marginal Revenue:

دالة الربح الكلي Total Profit

الربح الكلي= الإيراد الكلي - التكاليف الكلية

الربح الحدي Marginal Profit

يمكن الحصول على دالة الربح الحدي من خلال تفاضل دالة الربح الكلي.

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

❑ مثال: إذا كانت دالة التكلفة الكلية لسلعة ما ولتكن x هي:

$$C(x) = 5x^2 + 2x + 8$$

أوجد دالة التكاليف الحدية ثم أوجد قيمة التكلفة الحدية عند انتاج الوحدة الخامسة؟

الحل:

دالة التكلفة الحدية = مشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية

$$C'(x) = 10x + 2$$

وعند انتاج الوحدة الخامسة $(x = 5)$ فإن التكلفة الحدية تساوي

$$C'(5) = 10 \times 5 + 2 = 52$$ ريال

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

- مثال: إذا كانت دالة التكلفة الكلية لسلعة ما ولتكن x هي:

$$C(x) = x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 200$$

أوجد دالة التكاليف الحدية ثم أوجد قيمة التكلفة الحدية عند انتاج الوحدة العاشرة؟

الحل:

دالة التكلفة الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية

$$C'(x) = 5x^4 + x^3 - 9x^2$$

وعند انتاج الوحدة العاشرة $(x = 10)$ فإن التكلفة الحدية تساوي

$$C'(10) = 5 \times 10^4 + 10^3 - 9 \times 10^2 = 50,100 \text{ ريال}$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

- مثال: إذا كانت دالة الإيراد الكلي لسلعة ما ولتكن x تعطى بالعلاقة التالية:

$$R(x) = 500x - 0.05x^2$$

أوجد دالة الإيراد الحدي وقيمة الإيراد الحدي عند بيع ١٠٠ وحدة (x=100)؟

الحل:

دالة الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلية

$$R'(x) = 500 - 0.10x$$

وعند بيع مئة وحدة $(x = 100)$ فإن الإيراد الحدي يساوي

$$R'(100) = 500 - 0.10(100) = 500 - 10 = 490$$ ريال

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

- مثال: إذا كانت دالة الإيراد الكلي لسلعة ما ولتكن x تعطى بالعلاقة التالية:

$$R(x) = 5 + 10x - 2x^2 + 3x^3$$

أوجد دالة الإيراد الحدي وقيمة الإيراد الحدي عند بيع ٢٠ وحدة ($x = 20$)؟

الحل:

دالة الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلية

$$R'(x) = 10 - 4x + 9x^2$$

وعند $(x = 20)$ فإن الإيراد الحدي يساوي

$$R'(20) = 10 - 4(20) + 9(20)^2 = 10 - 80 + 3600 = 3,530$$ ريال

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

- مثال: إذا كانت دالة الربح الكلي لسلعة ما ولتكن x تعطى بالعلاقة التالية:

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 150$$

أوجد دالة الربح الحدي وقيمة الربح الحدي عند بيع ٣٥ وحدة من السلعة x؟

الحل:

دالة الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي

$$P'(x) = 9x^2 - 4x$$

وعند بيع ٣٥ وحدة $(x = 35)$ فإن الربح الحدي يساوي

$$P'(35) = 9(35)^2 - 4(35) = 11,025 - 140 = 10,885$$ ريال

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

❑ مثال: إذا كانت دالة الربح الكلي لسلعة ما ولتكن x تعطى بالعلاقة التالية:

$$P(x) = 10x^2 - 200x - 50$$

أوجد دالة الربح الحدي وقيمة الربح الحدي عند بيع 70 وحدة من السلعة x؟

الحل:

دالة الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي

$$P'(x) = 20x - 200$$

وعند بيع ٧٠ وحدة $(x = 70)$ فإن الربح الحدي يساوي

$$P'(70) = 20(70) - 200 = 1400 - 200 = 1200$$ ريال

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

- مثال: إذا كانت دالة الإيراد الكلي لسلعة ما ولتكن x تعطى بالعلاقة التالية:

$$R(x) = 5x^2 - 200x - 50$$

وكانت دالة التكاليف الكلية لنفس السلعة تعطى بالعلاقة التالية:

$$C(x) = x^2 - 30x + 200$$

أوجد دالة الربح الحدي وقيمة الربح الحدي عند بيع 125 وحدة من السلعة x؟

الحل:

أولا: نجد أولا دالة الربح الكلي

دالة الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكاليف الكلية

$$P(x) = R(x) - C(x) = (5x^2 - 200x - 50) - (x^2 - 30x + 200)$$

$$\rightarrow P(x) = 4x^2 - 170x - 250$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

ثانيا: نجد المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي $(P(x) = 4x^2 - 170x - 250)$ لنحصل على دالة الربح الحدي

$$P'(x) = 8x - 170$$

وعند بيع الوحدة رقم ١٢٥ $(x = 125)$ فإن الربح الحدي يساوي

$$P'(125) = 8\,(125) - 170 = 1000 - 170 = 830$$ ريال

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

❑ مسائل وتمارين

إذا كانت دالة التكاليف الكلية لسلعة ما ولتكن x تعطى بالعلاقة التالية

$$C(x) = 7x^2 - 50x$$

ودالة الايراد الكلي للسلعة ذاتها تعطى بالعلاقة التالية

$$R(x) = x^3 + 5x^2 - 100$$

أوجد:

١- التكلفة الحدية عند انتاج ٥٠ وحدة؟

٢- الإيراد الحدي عند بيع ٢٥ وحدة؟

٣- الربح الحدي عند بيع ١٠٠ وحدة؟

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

تمارين إضافية على الفصل الرابع:

١- إذا كانت $f(x) = -5xcosx$ فإن $f'(x) = ?$

أ- $5xsinx$ ب- $5xsinx - 5cosx$ ج- $5xsinx + 5cosx$ د- $-5xsinx + 5cosx$

٢- إذا كانت $f(x) = log(sinx)$ فإن $f'(x) = ?$

أ- $\frac{cosx}{sinx}$ ب- $\frac{-cosx}{sinx}$ ج- $\frac{sinx}{cosx}$ د- $\frac{-sinx}{cox}$

٣- إذا كانت $f(x) = e^{2x^3}$ فإن $\frac{dy}{dx} = ?$

أ- e^{2x^3} ب- $6xe^{2x^3}$ ج- $6x^2e^{2x^3}$ د- $6e^{2x^3}$

٤- إذا كانت $f(x) = -5x^{-5}$ فإن $\frac{dy}{dx} = ?$

أ- $-25x^{-4}$ ب- $25x^{-4}$ ج- $-25x^{-6}$ د- $25x^{-6}$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

٥- إذا كانت $f(x) = log_{10}(-10x)$ فإن $f'(x) = ?$

أ- $\frac{1}{xln(10)}$ ب- $\frac{-1}{xln(10)}$ ج- $\frac{10}{xln(10)}$ د- $\frac{-10}{xln(10)}$

٦- إذا كانت $f(x) = \frac{5}{x}$ فإن $f'(x) = ?$

أ- $\frac{-5}{x^2}$ ب- $\frac{5}{x^2}$ ج- $\frac{-5}{x^{-2}}$ د- $\frac{5}{x^{-2}}$

٧- إذا كانت $f(x) = e^x$ فإن $f'' = ?$

أ- 0 ب- e^{x^2} ج- e^x د- 1

٨- إذا كانت $f(x) = (-5x)^{-2}$ فإن $\frac{dy}{dx} = ?$

أ- $-10x^{-3}$ ب- $10x^{-1}$ ج- $-10x^{-1}$ د- $10(-5x)^{-3}$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

٩- إذا كانت $f(x) = e^2$ فإن $f'(x) = ?$

أ- 0 ب- e^2 ج- $2e^2$ د- 1

١٠- إذا كانت $f(x) = 2x^4$ فإن $f'''(x) = ?$

أ- $48x$ ب- $24x^2$ ج- 48 د- 0

١١- إذا كانت $f(x) = 5^x$ فإن $f' = ?$

أ- 5^x ب- $5^x lnx$ ج- $5^x ln5$ د- 0

١٢- إذا كانت $y = -5u \ , u = x^2$ فإن $\frac{dy}{dx} = ?$

أ- $5x$ ب- $-5x$ ج- $10x$ د- $-10x$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

١٣- إذا كانت $Z = 2x^3 - 3y^2$ فإن $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$

أ- $6x^2$ ب- $-6y^2$ ج- $6x^2 - 6y^2$ د- 0

١٤- إذا كانت $Z = 2x^3 - 3y^2$ فإن $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

أ- $6x^2$ ب- $-6y$ ج- $6x^2 - 6y$ د- 0

١٥- إذا كانت $2y = 5x - y^{-2}$ فإن $y' = ?$

أ- $\frac{5}{2-2y^{-3}}$ ب- $\frac{5}{2+2y^{-3}}$ ج- $\frac{-5}{2-2y^{-3}}$ د- $\frac{5}{-2-2y^{-3}}$

١٦- إذا كانت $y = sin(5x^2)$ فإن $\frac{dy}{dx} = ?$

أ- $10xcos(5x^2)$ ب- $-10xcos(5x^2)$ ج- $10xsin(5x^2)$ د- $-10xsin(5x^2)$

نهاية المحاضرة المسجلة الثالثة عشر

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح