مقرر الرياضيات للإدارة

المستوى الثاني

الفصل الأول

الدوال

جامعة الإمام عبد الرحمن بن فيصل
IMAM ABDULRAHMAN BIN FAISAL UNIVERSITY

كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

وكالة التعليم الالكتروني والتعلم عن بعد

١٤٣٨هـ-٢٠١٧م

د. رائد الخصاونة

الفصل الأول: الدوال (العلاقة)

- **تعريف: العلاقة**

هي ارتباط بين بعض أوكل من عناصر مجموعة ببعض أوكل من عناصر مجموعة أخرى.

- مثال: إذا كان لدينا $X = \{1,2,4\}$، $Y = \{1,2,3,4,5\}$

وكانت لدينا العلاقة R من x الى y بحيث R تعني: $b = a + 2$

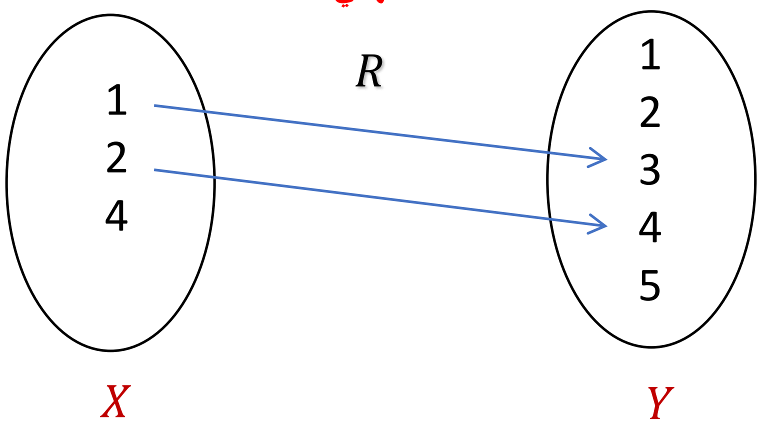
حيث $a \epsilon X$ و $b \in y$، اكتب بيان R ومثلها بمخطط سهمي؟

الحل: الصفحة التالية

الفصل الأول: الدوال (الدالة)

$$\boldsymbol{R} = \{(1,3),(2,4)\}$$

المخطط السهمي



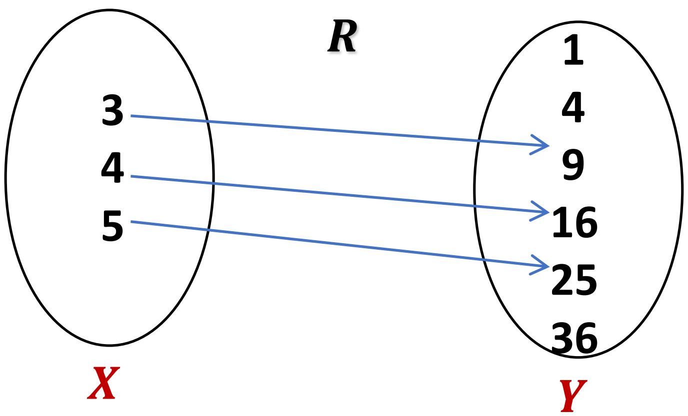
لاحظ أن العدد ٤ من المجموعة X لا يمكن أن يرتبط بأي عدد من المجموعة Y وذلك لان ٤+٢=٦ والعدد ٦ لا ينتمي الى المجموعة Y

الفصل الأول: الدوال (العلاقة)

- مثال: إذا كان لدينا $X = \{3,4,5\}$، $Y = \{1,4,9,16,25,36\}$

وكانت لدينا العلاقة R من x الى y بحيث R تعني: $b = a^2$ حيث $a \epsilon X$ و $b \in y$ اكتب بيان العلاقة R ومثلها بمخطط سهمي؟

الحل: $R = \{(3,9),(4,16),(5,25)\}$



الفصل الأول: الدوال (العلاقة)

- تمرين: إذا كان لدينا $X = \{0,1,2,3\}$، $Y = \{0,1,2,3,4,5\}$

وكانت لدينا العلاقة R من x الى y بحيث R تعني: $b = 1 + a$ حيث $a \epsilon X$ و $b \in y$ اكتب بيان العلاقة R ومثلها بمخطط سهمي؟

الفصل الأول: الدوال (الدالة)

❑ تعريف: الدالة

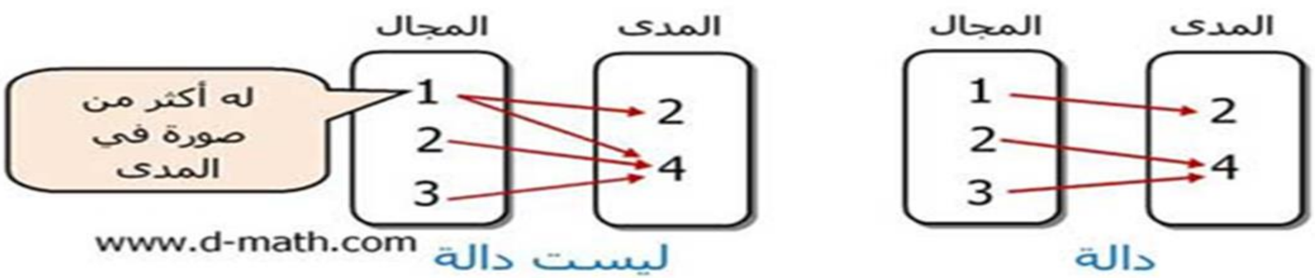
إذا كانت A,B مجموعتين، فإن f دالة من A الى B بمعنى $(f: A \to B)$ إذا كانت f مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي $A \times B$ بحيث أنه لكل $x \in A$ توجد y واحدة تنتمي الى B.

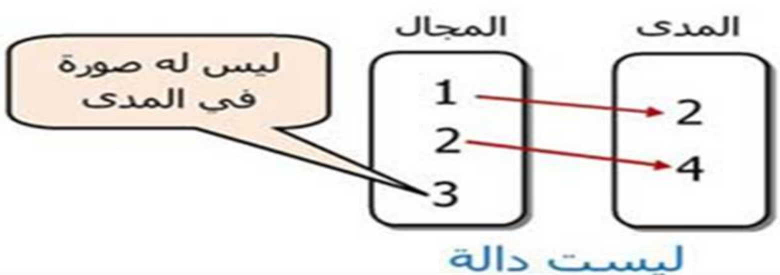
تسمى y قيمة الدالة عند x ويرمز لها بالرمز $y = f(x)$، كما يسمى المتغير x بالمتغير المستقل والمتغير y بالمتغير التابع.

الفصل الأول: الدوال (الدالة)

الدالة:

الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.





الفصل الأول: الدوال (الدالة)

- مثال: إذا كانت $A = \{1,2,3\}$، $B = \{4,8,12\}$ وكانت

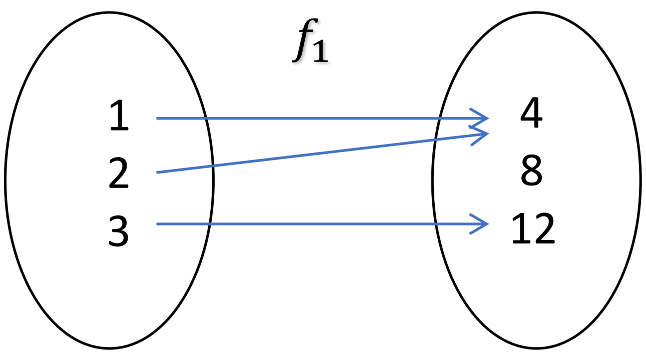
$f_1 = \{(1,4),(2,4),(3,12)\}$ و $f_2 = \{(1,4),(2,8)\}$

و $f_3 = \{(1,4),(1,8),(2,4),(3,12)\}$

فأي من f_1 و f_2 و f_3 يعتبر دالة؟

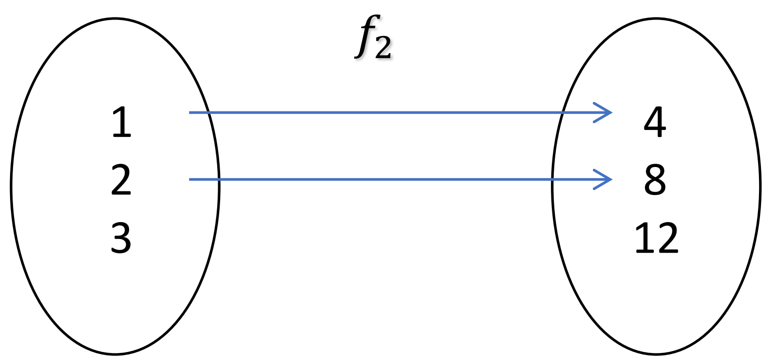
الحل: f_1 يعتبر دالة لان كل عنصر في المجال له صورة واحدة فقط في المجال المقابل كما ان عناصر f_1 مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي $A \times B$.

المخطط السهمي



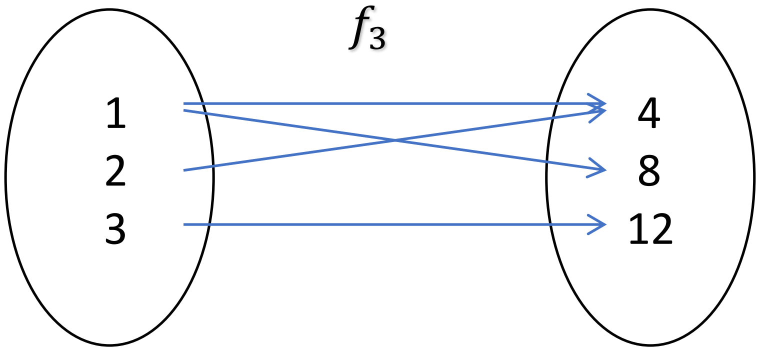
الفصل الأول: الدوال (الدالة)

f_2 ليست دالة لان العدد $3 \in A$. ولكن ليس له صورة في B.



الفصل الأول: الدوال (الدالة)

f_3 ليست دالة لان العدد $1 \in A$. ولكن اكثر من صورة في B.



الفصل الأول: الدوال (الدالة)

- ملاحظة» إذا كانت f دالة من A الى B، فإن A تسمى مجال الدالة وتسمى B بالمجال المقابل (مدى) الدالة.

$$f : A \to B$$

عناصر المجال

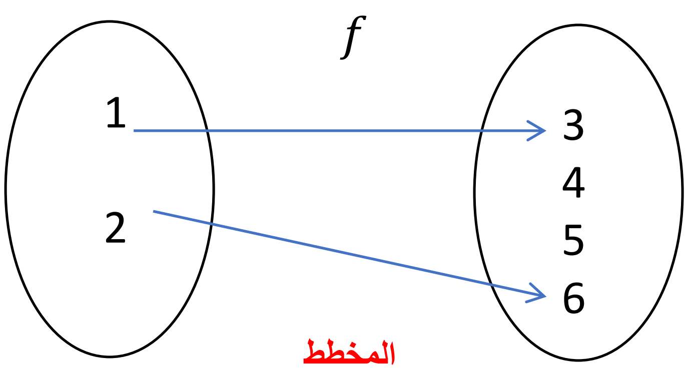
عناصر المجال المقابل

الفصل الأول: الدوال (الدالة)

- مثال: إذا كانت $A = \{1,2\}$، $B = \{3,4,5,6\}$ وكانت $f = \{(1,3),(2,6)\}$

مثل f بالمخطط السهمي ثم أوجد عناصر المجال والمدى؟

الحل:



المخطط السهمي

عناصر المجال = $\{1,2\}$

عناصر المدى=$\{3,6\}$

الفصل الأول: الدوال (الدالة)

تمرين: أي من العلاقات التالية تمثل دالة

1. $R = \{(-1,2), (2,2), (3,5), (6,1)\}$
2. $R = \{(0,7), (1,5), (1,2), (3,-4)\}$
3. $R = \{(-3,1), (-1,1), (0,1), (4,1)\}$
4. $R = \{(-4,0), (-4,4), (2,3), (1,9)\}$
5. $R = \{(3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$
6. $R = \{(1,1), (2,2), (4,4), (9,9)\}$

الفصل الأول: الدوال (الدالة – كثيرات الحدود)

- انواع الدوال: سنقتصر في دراستنا فقط على دراسة بعض من انواع الدوال وهي الدالة الحقيقية، وهي الدالة المعرفة من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية، أي $f : R \to R$

تعريف: كثيرات الحدود

تعرف دالة كثيرة الحدود بأنها الدالة التي تكتب على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ اعداد حقيقية وتسمى المعاملات أما المتغير n فهو عدد طبيعي (صحيح وموجب) وهي عبارة عن درجة كثيرة الحدود ممثلة بأعلى أس.

الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

- ومن الأمثلة على كثيرات الحدود

١ – كثيرة حدود من الدرجة الصفرية (وتسمى بالدالة الثابتة). ومن الأمثلة عليها

$$f_1(x) = 5$$

المدى

$$f_2(x) = -2$$

لاحظ أن مجال هذا النوع من الدوال هو مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathcal{R}$ أما مداها فهو

عبارة عن قيمة العدد الثابت حيث يساوي 5 في الدالة الاولى و2- في الدالة الثانية.

الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

٢ – كثيرة حدود من الدرجة الأولى (وتسمى بالدالة الخطية). ومن الأمثلة عليها

$$f_1(x) = 5x$$

$$f_2(x) = -2x + 3$$

معامل x

الحد الثابت

لاحظ أن مجال ومدى هذا النوع من الدوال هو مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathcal{R}$،

كما أن قيمة اعلى أس للمتغير x تساوي العدد 1.

الفصل الأول: الدوال (كثيرات الجدود)

٣- كثيرة حدود من الدرجة الثانية (وتسمى بالدالة التربيعية). ومن الأمثلة عليها

$$f_1(x) = 5x^2$$

القيمة = -١
ولا يكتب

$$f_2(x) = -2\,x^2 - x + 5$$

معامل x^2

معامل x

الحد الثابت

لاحظ أن مجال ومدى هذا النوع من الدوال هو مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathcal{R}$،

كما أن قيمة اعلى أس للمتغير x تساوي العدد 2

الفصل الأول: الدوال (كثيرات الجدود)

٣- كثيرة حدود من الدرجة الثالثة (وتسمى بالدالة التكعيبية). ومن الأمثلة عليها

$$f_1(x) = 3x^3 - x^2 - 4$$

$$f_2(x) = -2\,x^3 - 3\,x^2 - 5x + 1$$

معامل x^3 معامل x^2 معامل x الحد الثابت

لاحظ أن مجال ومدى هذا النوع من الدوال هو مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathcal{R}$،

كما أن قيمة اعلى أس للمتغير x تساوي العدد 3.

الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

- ايجاد قيمة دالة:

يمكن ايجاد قيمة أي عدد أو متغير في دالة من خلال تعويض ذلك العدد أو المتغير بدل المتغير x في تلك الدالة.

مثال: إذا كان $f(x) = x^2 + 4x - 3$، فأوجد

$(i)\ f(2)$

$(ii)\ f(-1)$

$(iii)\ f(a)$

الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

- الحل:

$$(i)\ f(2)=2^2+4\times 2-3=4+8-3=9$$

$$(ii)\ f(-1)=(-1)^2+(4\times -1)-3=1-4-3=-6$$

$$(iii)\ f(a)=a^2+4\times a-3=a^2+4a-3$$

الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

- تمرين: إذا كان $f(x) = 2x^2 - 3x$، فأوجد

$(i)\ \ f(0)$

$(ii)\ \ f(-4)$

الفصل الأول: الدوال (العمليات على الدوال)

- تشمل العمليات الثنائية على الدوال خمسة عمليات:

١- الجمع $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

٢- الطرح $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

٣- الضرب $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$

٤- القسمة $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$

٥- التركيب $(fog)(x)=f\big(g(x)\big)$

وهنالك عملية احادية هي معكوس الدالة f ورمزها f^{-1} وتعرف كالآتي:

إذا كانت $y=f(x)$ دالة فان معكوس الدالة يعني إيجاد x كدالة في y أي $x=f^{-1}(y)$.

الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

- مثال: إذا كانت $f(x) = 3x + 5$، $g(x) = x^2+1$، فأوجد

$i - (f + g)(x)$

ii - $(f - g)(x)$

iii - $(f \times g)(x)$

iv - $(\frac{f}{g})(x)$

v - $(fog)(x)$

vi - $f^{-1}(x)$

الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

الحل:

$$(i)(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(3x+5)+(x^2+1)$$
$$=x^2+3x+6$$

$$(i)(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(3x+5)-(x^2+1)$$
$$=3x+5-x^2-1=3x-x^2+4=-x^2+3x+4$$

$$(iii)(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=(3x+5)(x^2+1)$$
$$=3x^3+3x+5x^2+5$$
$$=3x^3+5x^2+3x+5$$

الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

الحل:

$$(iv)\quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$$

نعوض قيمة

$$\boxed{g(x) = x^2+1}$$

بدلا من

$$f(x) = 3\,x + 5$$

$$(v)\ (fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2+1) = 3(x^2+1)+5$$

$$= 3x^2+3+5$$

$$= 3x^2+8$$

الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

(vi)- $f^{-1}(x)$

نلاحظ أنه يمكن التعبير عن الدالة بالرمز $f(x)$ أو y

- لإيجاد معكوس دالة $f^{-1}(x)$ فإننا نقوم بكتابتها على الصورة $y = 3x + 5$ ثم نعيد كتابتها على صورة x كدالة في y من خلال استخدام العمليات الجبرية المختلفة.

$$3x = y - 5 \longrightarrow x = \frac{y-5}{3} \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{y-5}{3}$$

نقل العدد الثابت 5 الى الطرف الأخر

قسمة الطرف الأيمن على معامل x

فيكون المعكوس مساويا للطرف الايمن

الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

- تمرين: إذا كانت $f(x) = 3x^2$، $g(x) = x+1$، فأوجد

$i - (f + g)(x)$

ii- $(f \times g)(x)$

v- $(fog)(x)$

$vi - (gof)(x)$

v- $g^{-1}(x)$ & $f^{-1}(x)$

انتهت المحاضرة المسجلة الثانية

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح