ملزمة الاختبار الفصلي للعام الدراسي 1439هـ

مقرر الإحصاء في الإدارة

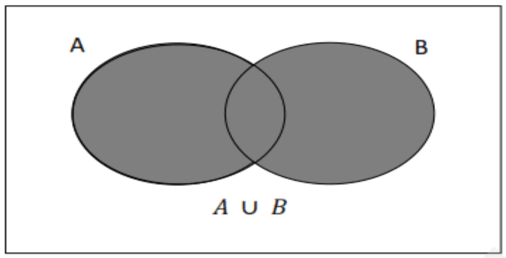
تشمل الملزمة:

1- المحاضرات النصية
2- الواجب الاول والواجب الثاني 1439هـ
3- الواجب الاول والواجب الثاني 1438هـ
4- الاختبار الفصلي للعام الماضي 1438هـ

مع امنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح.

المحاضرة الاولى

الفصل الأول
العمليات على المجموعات
Sets



مقدمة :-

تُعبر المجموعات عن " تجمع من الأشياء أو العناصر المُعرفة تعريفاً تاماً ويُنظر إليها كوحدة واحدة يجمع بينها صفات مشتركة ،ويطلق على مكونات المجموعة العناصر " ، فعلى سبيل المثال مجموعة الطلاب الدارسين لمقرر الرياضيات تجمعهم صفة مشتركة ، ألا وهي دراستهم لنفس المقرر ، كما أن كل طالب يُمثل عنصراً من عناصر المجموعة .

(١) طرق التعبير عن المجموعات:-

هناك طريقتان للتعبير عن المجموعات بشكل كمي ، تعتمد الطريقة الأولى على السرد التفصيلي لعناصر المجموعة، أما الطريقة الثانية فتعتمد في التعبير عن عضوية أحد العناصر للمجموعة على كونه يشترك مع المجموعة في صفة مميزة ، ويعبر عن المجموعات باستخدام أحرف هجائية كبيرة (A,B,C,......)، وتتكون المجموعة من عدة عناصر ويمكن القول أن كل عنصر من هذه العناصر ينتمي إلى المجموعة إذا اشتملت عناصر المجموعة عليه ، فعلى سبيل المثال إذا كانت المجموعة A تعبر عن أحرف كلمة (math) فيمكن القول أن :-

$m \in A$ أي أن العنصر (الحرف)m ينتمي إلى المجموعة A .

$u \notin A$ العنصر u لا ينتمي إلى المجموعة A.

ومن الأمثلة على المجموعات:

- مجموعة شهور السنة الهجرية، مجموعة عواصم الدول العربية في افريقيا، مجموعة طلاب فريق كرة القدم في الكلية، مجموعة الأعداد الزوجية المحصورة بين 12،50. والانتماء هو علاقة بين عنصر ومجموعة فعلى سبيل المثال يمكن القول أن: -
- الرياض $\in$ مجموع عواصم الدول العربية الآسيوية
- السعودية $\notin$ مجموعة الدول الأوروبية.
- حرف س$\notin$ مجموعة أحرف كلمة احمد.
- العدد 5 $\in$ مجموعة الأعداد الاولية.
- العدد 4 $\notin$ الأعداد الأولية

١-١ التعبير عن المجموعات بطريقة السرد :-

وتستخدم هذه الطريقة عادةً عندما تشتمل المجموعة على عدد صغير من العناصر ، أو أن المجموعة لها صفة تتابعية مما يُمكننا من التنبؤ بالشكل الذي تأخذه عناصر المجموعة على الرغم من عدم سرد جميع عناصرها ، كالمجموعة المعبرة عن الاعداد الزوجية أو الفردية ، فعلى سبيل المثال نجد أن المجموعات التالية مُعبر عنها بطريقة السرد :-

١-١ التعبير عن المجموعات بطريقة السرد :-

$$A = \{ahmed\ ,omar, ali, mohamed\}$$
$$B = \{1,3,6,8,12\}$$
$$C = \{2,4,6,8,\dots\dots\dots.\}$$
$$D = \{1,3,5,7,\dots\dots\dots.\}$$

فالمجموعة A تعبر عن أسماء أعضاء أحد اللجان العلمية ، و المجموعة B تعبر عن درجات أحد الطلاب في مقررات أحد الفصول الدراسية ، والمجموعة C تعبر عن الأعداد الزوجية ، و المجموعة D تعبر عن الاعداد الفردية .

مثال (١) :-

- أكتب المجموعة {A} و التي تعبر عن أحرف كلمة " الرحمن " بطريقة السرد .
- الحل :-

$$A = \{\text{ن}, \text{م}, \text{ح}, \text{ر}, \text{ل}, \text{ا}\}$$

١-٢ التعبير عن المجموعات بطريقة الصفة المميزة :-

تعتمد هذه الطريقة في وصف المجموعة على ذكر صفة مميزة ، إذا توافرت هذه الصفة في أي عنصر فهذا يشير إلى انتمائه إلى المجموعة ، ويفضل استخدام هذه الطريقة عند التعبير عن المجموعات الكبيرة و التي يصعب التعبير عنها باستخدام طريقة السرد ، وفيما يلي أمثلة عن بعض المجموعات التي تم التعبير عنها بطريقة الصفة المميزة :-

$$A = \{X : \text{عدد فردي } x\}$$

$$B = \{X : \text{طالب في جامعة الدمام } x\}$$

$$C = \{X : \text{عدد صحيح } 4 \leq x \leq 9\}$$

$$D = \{X : \text{عدد صحيح } 1 \leq x < 10\}$$

١-٢ التعبير عن المجموعات بطريقة الصفة المميزة :-

فالمجموعة A تعبر عن الأعداد الفردية ، وبالتالي فإن أي عدد فردي يمثل أحد عناصر هذه المجموعة ، وتقرأ المجموعة A تشتمل على متغير يسمى X حيث أن x هو كل عدد فري ، أما المجموعة B فتمثل مجموعة طلاب جامعة الدمام وهو عدد من الصعب التعبير عنه باستخدام طريقة السرد ، أما المجموعة C فهي تتضمن جميع الأعداد الصحيحة من العدد 4 إلى العدد 9 و التي تشمل العناصر {4 , 5, 6 , 7 , 8 , 9} ، والمجموعة D تشمل العناصر {1 , 2, 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9} .

مثال (٢) :-

اكتب مجموعة أحرف كلمة *statistics* بطريقة السرد.

الحل:

مجموعة أحرف كلمة *statistics*هي:

$B= \{s,t,a,i,c\}$

ونلاحظ هنا اننا لم نكرر الحروف المتشابهة في الكلمة.

مثال (٣) :-

اكتب مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين *4*،*32* التي تقبل القسمة على*5* دون باق:

1. بطريقة السرد . 2. بطريقة الصفة المميزة.

الحل:

١- طريقة السرد $B =\{5,10,15,20,25,30\}$

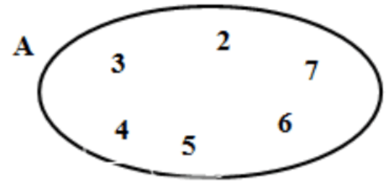
٢) طريقة الصفة المميزة :

$B=$ { x: x عدد طبيعي محصور بين 4 و 32 ويقبل القسمة على 5 دون باق}

(٢) تمثيل المجموعات بأشكال فن (*Venn Diagrams*):-

تعتبر أشكال فن أحد الأشكال التي تستخدم في التعبير الهندسي عن المجموعات ، حيث يتم تمثيلها بمنحنى مغلق بحيث يكون جميع عناصر المجموعة متواجدة داخل المنحنى المغلق ، والذي يمكن أن يأخذ شكل مربع أو مثلث أو مستطيل أو دائرة ، وعلى سبيل المثال فإن الشكل التالي يمثل أحد أشكال فن المعبرة عن المجموعة A :-

$A = \{X : 2 \leq x \leq 7$ عدد صحيح$\}$



مثال (٤) :-

إذا كانت A هي مجموعة الأعداد الأولية المحصورة بين 4 ،12.

١) اكتب المجموعة A بطريق السرد.

٢) اكتب المجموعة A بطريقة الصفة المميزة

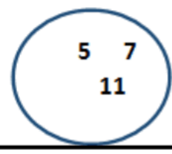
٣) مثل المجموعةِA بأحد أشكال فن.

الحل:

١) $A=\{5,7,11\}$

2) $A=\{x\,;\,x$, عدد اولي بين 12 و 4،$\}$

٣) باستخدام اشكال فن نمثل المجموعة كمايلي:



(٣) أنواع المجموعات :-

٣-١ المجموعة الشاملة:-

هي المجموعة التي تتضمن جميع العناصر التي تكون تحت الدراسة، ويرمز لها عادة بالرمز U أو S ، فعلى سبيل المثال إذا كنا بصدد دراسة ظاهرة تحديد مستوى الطلاب فإن طلاب الجامعة ككل يُمثلون المجموعة الشاملة .

(٣) أنواع المجموعات :-

مثال (٥) :-

إذا كانت : -

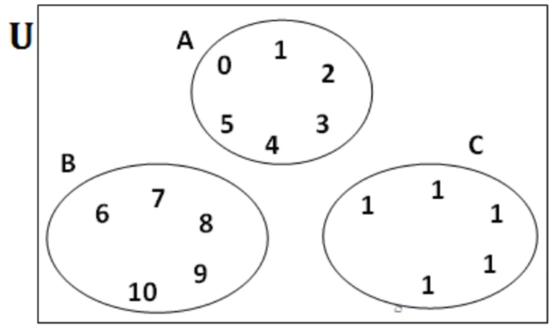
$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$C = \{11, 12, 13, 14, 15\}$$

أوجد المجموعة الشاملة ، مع استخدام أشكال فن للتعبير عن العلاقة بين هذه المجموعات .

(٣) أنواع المجموعات :-

الحل:-

$$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$



(٣) أنواع المجموعات :-

٣-٢ المجموعة الجزئية: -

إذا كانت جميع عناصر المجموعة B متضمنة في المجموعة A، فيمكن القول أن المجموعةB، هي مجموعة جزئية من المجموعةA ، وتكتب على الشكل :-

$$A \subseteq B$$

أي أن المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة B أو تساويها.

(٣) أنواع المجموعات :-

مثال(٦) :-

إذا كانت :-

$A = \{X :$ عدد فردي $x\}$

$B = \{X :$ عدد زوجي $x\}$

$$C = \{2,4,6,8,10\}$$

$$D = \{1,3,5,7,9\}$$

$$E = \{4,8,10\}$$

$F = \{X :$ عدد صحيح فردي $1 \le x \le 9\}$

وضح العلاقة الجزئية التي تنشأ بين المجموعات السابقة.

(٣) أنواع المجموعات :-

الحل :-

1. $D \subset A$
2. $C \subset B$
3. $E \subset C$
4. $E \subset B$
5. $F \subseteq D \;,\; D \subseteq F$
6. $F \subset A$

(٣) أنواع المجموعات :-

٣-٣ تساوي المجموعات :-

يمكن القول أن المجموعات متساوية عندما يكون لها نفس العناصر بغض النظر عن الترتيب ، ونرمز للتساوي بالرمز (=) ، فعلى سبيل المثال إذا كانت :-

$$A = \{a, h, m, e, d\}$$
$$B = \{d, e, m, h, a\}$$

حيث أن عناصر المجموعة A هي نفسها عناصر المجموعة B فإن:-

$$A = B$$

وعلى ذلك فإن شرط تساوي مجموعتين هو :-

$$A \subseteq B \quad , B \subseteq A$$

(٣) أنواع المجموعات :-

مثال (٧):-

إذا كانت A هي مجموعة أرقام العدد 3234 ، وكانت D هي مجموعة أرقام العدد 2243 ، فهل $D = A$

الحل :

ان $S = \{2, 3, 4\}$، $D = \{2, 3, 4\}$ وبما ان عناصر المجموعة A هي نفسها عناصر المجموعة D ، اذن

$$A = D$$

(٣) أنواع المجموعات :-

٣-٤ المجموعة الخالية:-

هي مجموعة لا تحتوى على عناصر، فمثلاً المجموعة التي تشمل الدول الأوربية التي تقع في شمال أفريقيا ، ويرمز لهذه المجموعة بالرمز { } أو $\emptyset$

(٣) أنواع المجموعات :-

مثال(٨) :-

إذا كانت :-

$$A = \{X : x \text{عدد وفردي زوجي}\}$$

أكتب مجموعة العناصر التي تشملها المجموعة A .

الحل :-

حيث أنه لا يوجد من الأرقام ما هو يمثل عدد فردي و زوجي معاً ، إذاً تعتبر المجموعة السابقة مجموعة خالية :-

$$A = \{\ \} = \emptyset$$

(٣) أنواع المجموعات :-

٣-٥ المجموعة المنتهية (المغلقة) :-

تعتبر المجموعة منتهية إذا كانت لها بداية و لها نهاية ، أي أن عناصرها معرفة تعريفاً تاماً ، ويطلق عليها أيضاً المجموعة المغلقة ، فعلى سبيل المثال كل من المجموعات التالية مجموعة منتهية أو مغلقة :-

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{10, 30, 90, 110\}$$
$$C = \{a, h, m, e, d\}$$

(٣) أنواع المجموعات :-

٣-٦ المجموعة غير المنتهية (المفتوحة) :-

المجموعة غير المنتهية ، هي المجموعة اللانهائية ، أي أن عناصرها غير معرفة فهي مجموعة لا نهائية ، فعلى سبيل المثال تعتبر كل من المجموعات التالية تعتبر مجموعة مفتوحة أي أنها غير منتهية :-

$$A = \{X : x \text{ طالب في جامعة الدمام}\}$$
$$B = \{X : \text{عدد صحيح } 0 \le x\}$$
$$C = \{X : \text{عدد صحيح } x < 20\}$$

(٣) أنواع المجموعات :-

٣-٧ المجموعة المنتظمة :-

وهي المجموعة التي تتزايد أو تتناقص بشكل ثابت ، مما يجعلنا على علم بعناصرها على الرغم من كونها غير منتهية في بعض الأحيان ، فمثلاً المجموعة A هي مجموعة غير منتهية تأخذ الشكل

$$A = \{ 100, 200, 300, 400, \dots\dots\dots\dots \}$$

فالمجموعة السابقة مجموعة منتظمة حيث أن عناصرها تتزايد بمقدار ثابت و هو 100 ، مما يمكننا من النبؤ بقيم العناصر التالية ، كما قد تكون المجموعة منتهية ومنتظمة كما فى المجموعة التالية :-

$$B = \{ 10, 20, 30, 40, \dots\dots\dots, 90, 100\}$$

(٣) أنواع المجموعات :-

٣-٨ المجموعة المكملة :-

إذا كانت U هي المجموعة الشاملة ، وكانت المجموعة A هي مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة ، فإننا يمكن أن نطلق على مجموعة العناصر غير الموجودة في المجموعة A وموجودة في المجموعة U مصطلح المجموعة المكملة ونرمز لها بالرمز $\bar{A}$، فعلى سبيل المثال إذا كانت كل من المجموعات U و A تأخذ الشكل التالي :-

$$U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$$
$$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

وبالتالي فإن المجموعة $\bar{A}$ تأخذ الشكل :-

$$\bar{A} = \{ 6, 7, 8, 9, 10 \}$$

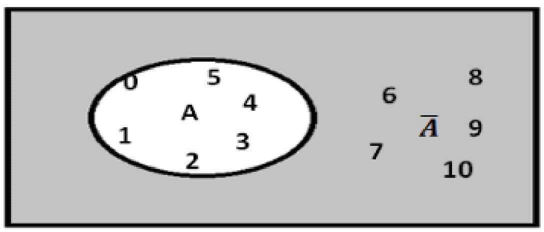
(٣) أنواع المجموعات :-

مثال:-

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

وبالتالي فإن المجموعة $\bar{A}$ تأخذ الشكل :-

$$\bar{A} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$



(٣) أنواع المجموعات :-

مثال (٩) :-

إذا علمت أن :-

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$
$$A = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$
$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

أوجد :-

1- $\bar{A}$
2- $\bar{B}$

الحل :-

1- $\bar{A} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 15\}$
2- $\bar{B} = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

المحاضرة الثانية

تابع الفصل الاول – العمليات على المجموعات Sets

(٤) العمليات على المجموعات:-

أولاً: تقاطع المجموعات:-

اذا كانت $A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B=\{2, 4, 6, 8, 9, 12, 15\}$

نلاحظ انمجموعة العناصر المشتركة بين المجموعتين A، Bهي المجموعة

$D=\{2,4,6\}$.

وتسمى المجموعة Dبمجموعة A تقاطع B.

وتكتب Aتقاطع B، او Bتقاطع A، وتقرأ $B\cap A$ ، او $A\cap B$ويرمز لها بالرمز
بطريقة الصفة المميزة $A\cap B = \{X: X \in A \text{ and } X \in B\}$

وبشكل عام ، فان تقاطع مجموعتين مثل A،B هو المجموعة التي تنتمي عناصرها
لكل من المجموعتين A، B معا ، ويرمز لها $A\cap B$، او$A\cap B$.

(٤) العمليات على المجموعات:-

مثال١٠:

اذا كانت$A=\{2,3,4,5,10\}$ و كانت $B = \{x: 8 ،2$ عدد فردي محصور بين $\}$
اوجد $B\cap A$

الحل :

$A=\{2,3,4,5,10\}$ ، $B = \{3, 5, 7\}$، ومجموعة التقاطع بين $B\cap A$ هي مجموعة
كل العناصر المشتركة بين المجموعتين A، B .

أي ان $B\cap A=\{3,5\}$

(٤) العمليات على المجموعات:-

ثانياً: اتحاد المجموعات:-

اذا كانت المجموعة: {اسامة ، غسان، محمد، سعيد}=A، هي مجموعة الطلبة المتفوقين في مبحث الرياضيات في صفك ، { سائد، اسامة، محمد}=B، هي مجموعة الطلبة المتفوقين في مبحث العلوم في صفك ، واراد مدير المدرسة القيام برحلة للطلبة المتفوقين في مبحث الرياضيات او في مبحث العلوم الى نادي العلوم والرياضيات في مدرسة مجاورة.

ما هي مجموعة الطلبة التي ستشارك في الرحلة؟

(٤) العمليات على المجموعات:-

ان مجموعة الطلبة التي ستشارك في الرحلة تشمل كل طالب من المتفوقين في الرياضيات أو العلوم ، أي أن المجموعة التي ستشارك في الرحلة هي

{أسامة، غسان، محمد، سعيد، سائد} = D

وتسمى هذه المجموعة مجموعة اتحاد المجموعتين A ، B وتكتب: $B \cup A = B \cup A$
وتقرأ A اتحاد B.

وبشكل عام فان اتحاد مجموعتين A، B هو المجموعة التي تنتمي عناصرها الى A اوالى B او الى كليهما ونرمز اليها بالرمز $\cup AB$ او $B \cup A$

وتكتب بطريقة الصفة المميزة $A \cup B = \{X : X \in A$ او $X \in B\}$.

مثال (١٢):

اذا كانت:مجموعة احرف كلمة بيروت=A، { ل، ب، ت، ع }=B، اوجد $B \cup A$؟

الحل :

$B \cup A =$ {ب،ي، ر، و، ت، ل، ع}.

(٤) العمليات على المجموعات:-

مثال١٤:

اذا كانت: $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ، $A=\{2,7,8\}$ ، $B=\{2,3,5,7\}$ ، فأوجد كلا مما يلي:

1. $\bar{A}$ 2. $\bar{B}$ 3. $A\cup B$ 4. $A\cap B$ 5. $\bar{A}\cap\bar{B}$ 6. $A\cap S$

7. $B\cup S$ 8. A-B 9. B-A 10. $A\cap\bar{B}$ 11. $B\cap\bar{A}$

(٤) العمليات على المجموعات:-

الحل:

1. $\bar{A}=\{1,3,4,5,6,9\}$
2. $\bar{B}=\{1,4,6,8,9\}$
3. $A\cup B=\{2,7,8,5,3\}$
4. $A\cap B=\{2,7\}$
5. $\bar{A}\cap\bar{B}=\{1,4,6,9\}$
6. $A\cap S=\{8,7,2\}=A$
7. $B\cup S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}=S$
8. $A-B=\{8\}$
9. $B-A=\{3,5\}$
10. $A\cap\bar{B}=\{8\}$
11. $B\cap\bar{A}=\{3,5\}$

(٥) مبدأ العد :-

قاعدة الضرب Multiplication Rule:

اذا كان هنالك تجربة تحصل في m من الطرق وتجربة اخرى تحدث في n من الطرق، فان عدد الطرق التي تحدث فيها التجربتين معا هو $m\times n$

مثال١٥:

اذا كان لدينا الارقام 2, 4,6,8، فكم عددا يمكن تكوينه من منزلتين اذا كان:

1. يسمح بتكرار العدد.
2. لا يسمح بتكرار العدد.

(٥) مبدأ العد :-

الحل:

1.عدد الارقام التي تأخذها المنزلة الاولى هو $m=4$

عدد الاقام التي تأخذها المنزلة الثانية هو $n=4$ (لان تكرار العدد مسموح).

عدد الاعداد المكونة من منزلتين هو

$$m\times n=4\times 4=16$$

2.عدد الطرق هو

لان تكرار الارقام غير مسموح فان المنزلة الثانية تنقص رقم واحد من الارقام الاربعة وهو الرقم الذي وضع في المنزلة الاولوبهذا يكون عدد الارقام التي يمكن تكوينها دون تكرار الارقامهي:

$$m\times n=4\times 3=12$$

(٥) مبدأ العد :-

قاعدة الجمع: Additional Rule

اذا كان هنالك تجربة تحصل في m من الطرق وتجربة اخرى تحدث في n من الطرق، فان عدد الطرق التي تحدث فيها احد التجربتين يساوي m + n

مثال١٦:

في كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع كان قسم المحاسبة يطرح 3 مقررات وقسم الادارة يطرح 6 مقررات، اراد طالب ان يسجل في مقرر واحد من احد الاقسام الثلاثة. بكم طريقة يمكن له التسجيل في هذه الاقسام

الحل:

عدد الطرق المتاحة امامة هي: $3+6=9$

ملاحظة: يمكن تعميم قاعدتي الضرب والجمع على اكثر من تجربتين.

(٦) التباديل:-

هي الطريقة التي يتم بها ترتيب عدد من الأشياء كلها او جزءا منها.

نظرية:

إذا كانت A مجموعة منتهية عدد عناصرها n وإردنا سحب r عنصرمنها فان عدد التبديلات لترتيب r عنصر من n عنصر هو

$$_{n}p_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث $n! = n(n-1)(n-2).....321$

(٦) التباديل:-

مثال١٧:

إذا كان لدينا مجموعة مثل $A = \{4,6,8,3,5\}$ واردنا كتابة اعداد ذات 3 منازل. فكم عددا يمكن تكوينه من هذه المجموعة

الحل:

عدد عناصر المجموعة A هو 5 اي n=5 ونريد سحب 3 عناصر اي r=3

فيكون عدد الترتيبات التي تكون عددا مكون من 3 منازل هي

$$_{5}p_{3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60$$

(٦) التباديل:-

مثال١٨:

اراد امين مكتبة ترتيب 5 كتب مختلفة من اصل 10 كتب مختلفة في رف المكتبة مع الاخذ بعين الاعتبار ترتيب هذه الكتب. فكم طريقة يمكنه ترتيب هذه الكتب؟

الحل:

عدد الترتيبات هو

$$ {}_{10}p_5 = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = \frac{10.9.8.7.6.5!}{5!} = 30240 $$

(٧) التوافيق:-

هي عدد الطرق التي يتم اختيار r مجموعة جزئية من مجموعة n من العناصر دون الاهتمام بعملية الترتيب.

وبالرموز عدد الطرق التي يتم فيها اختيار r عنصر من n عنصر يساوي

$$ \binom{n}{r} = C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

حيث ان $n! = n\,(n-1)(n-2)\ldots 3\times 2\times 1$ (مضروب n)

(٧) التوافيق:-

مثال١٩:

بكم طريقة يمكن تكوين لجنة مكونة من 10 طلاب في صف يتكون من 15 طالب ؟

الحل: $n = 15$ و $r = 10$

عدد الطرق التي يمكن تكوين فيها اللجنة هي

$$\binom{n}{r} = C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\binom{15}{10} = \frac{15!}{10!(15-10)!} = \frac{15!}{10!5!} = \frac{15.14.13.12.11\ 10!}{10!.5.4.3.2.1} = \frac{360360}{120} = 3003$$

(٧) التوافيق:-

مثال٢٠:

اذا كان لدينا الحروف a,b,c,d,e كم كلمة يمكن تكوينها من 3 حروف دون الاهتمام بعملية ترتيب الحروف؟

الحل:

عدد الكلمات المكونة من 3 حروف دون الاهتمام بالترتيب هي

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4.3!}{3!.2} = \frac{20}{2} = 10$$

(٧) التوافيق:-

مثال٢١:

كم توفيقة يمكن اختيار 3 اعداد من الاعداد: 5,6,3,8,7,5 ؟

الحل:

$N = 6, \quad r = 3$

عدد التوافيق يساوي:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6.5.4.3!}{3!.3.2} = 20$$ طريقة

ملاحظة : يراعى في التباديل الترتيب أما في التوافيق فمن غير الضروري ذلك .

المحاضرة الثانية

تمارين للمراجعة على الفصل الاول

١- ....هي المجموعة التي تتضمن جميع العناصر التي تكون تحت الدراسة.

أ- المجموعة الجزئية
ب- المجموعة الشاملة
ج- المجموعة الخالية
د- المجموعة المنتهية

٢- اذا علمت أن :-

A= {2,4,6,8,10}, B={6,2,9,13,16}

فإن المجموعة الشاملة تساوي:-

أ- U={2,4,6,8,9,10,13,16}
ب- U= {2,6}
ج- U={4,8,9,10,13,16}
د- U={2,4,6,8,9,10}

٣- ....هي المجموعة التي يكون لها بداية ولها نهاية.

أ- المجموعة الجزئية
ب- المجموعة الشاملة
ج- المجموعة الخالية
د- المجموعة المنتهية

٤- ....هي المجموعة اللانهاية العناصر

أ- المجموعة غير المنتهية
ب- المجموعة الشاملة
ج- المجموعة الخالية
د- المجموعة المنتهية

٥- ....هي المجموعة التي تتزايد أو تتناقص بشكل ثابت.

أ- المجموعة الجزئية
ب- المجموعة الشاملة
ج- المجموعة المنتظمة
د- المجموعة المنتهية

٦- اذا علمت أن :-

U= {40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50}, A={40,45,48,49,50}

فإن المجموعة $\bar{A}$ تساوي:-

أ- {40, 41,42,43,44, 46,47,50}

ب- {40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50}

ج- {41,42,43,44, 46,47}

د- {40,45,48,49,50}

٧- إذا كانت المجموعة A={5,10,15,20} و المجموعة B={0,5,8,10,15,20,25} ففي هذه الحالة فإن العلاقة بين كل من المجموعتين تأخذ أي من الأشكال التالية :

أ- A=B

ب- A∃B

ج- A⊂B

د- B⊂A

٨- أي من العلاقات التالية هي علاقة صحيحة :

أ- $\bar{A} \cap A = \emptyset$

ب- AU $\bar{A}$=U

ج- (أ) و (ب) معاً

د- لا شيء مما سبق

٩- إذا كانت المجموعة A={2,4,6,8,10} والمجموعة B={1,3,5,7,9} فإن المجموعة {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} تعبر عن أي من العلاقات التالية :-

أ- A∩B

ب- AUB

ج- A⊂B

د- لا شيء مما سبق

١٠- إذا كانت المجموعة الكلية U={10,20,30,40,50,60,70,80,90,100} وكانت المجموعة A={10,30,50,70,90} فإن المجموعة $\bar{A}$ تساوي :

أ- {20,30,40,50,60,100}

ب- {20,40,60,80,100}

ج- {50,60,70,80,90}

د- لا شيء مما سبق

١١- إذا كان $A=\{1,2,3,5,7\}$ و $B=\{2,4,6,8\}$ أوجد $(A \cup B)$:-

أ- {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

ب- {8,7,6,5,4,3,2}

ج- {8,7,6,5,4,3,2,1}

د- {1,2,3,4,5,6,7}

١٢- إذا كان $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ و $A=\{2,4,6,8,10\}$ أوجد $\bar{A}$:-

أ- {1,3,5,6,7,9}

ب- {2,3,4,5,6,7,8,9,10}

ج- {1,3,5,7,9}

د- {2,4,6,8,10}

أجب عن الفقرات (١٣) و(١٤) باستخدام المعلومات التالية:-

إذا كانت $A=\{51,52,53,s,r\}$ و $B=\{53,54,55,s,t\}$
والمجموعة الشاملة $U=\{51,52,53,54,55,t,s,r,z\}$
فأوجد :-

١٣- $(A \cap B)$:-

أ- {51,52,53,54,55,s,r,t}

ب- {53,s}

ج- {54,55,t}

د- {54,55,t,z}

أجب عن الفقرات (١٣) و(١٤) باستخدام المعلومات التالية:-

إذا كانت $A=\{51,52,53,s,r\}$ و $B=\{53,54,55,s,t\}$
والمجموعة الشاملة $U=\{51,52,53,54,55,t,s,r,z\}$
فأوجد :-

١٤- $\bar{A}$:-

أ- {53,54,55,t,z}

ب- {t,z}

ج- {54,55,t,z}

د- {51,52,53,r,z}

أجب عن الفقرات من ١٥ إلى ٢١ باستخدام المعلومات التالية:-

U = { 10, 20 , 30 , 40 , 50 , 60 , 70 , 80 , 90 , 100}

A= {20 , 50 , 90 }

B= {20, 40 , 70 , 90}

حيث أن U مجموعة شاملة، فأوجد:-

١٥- $\overline{A}$:-

أ- {30,40,60,70,80,100}

ب- {20 , 50 , 90 }

ج- {10, 20 , 30 , 40 , 50 , 60 , 70 , 80 , 90 , 100}

د- {10,30,40,60,70,80,100}

أجب عن الفقرات من ١٥ إلى ٢١ باستخدام المعلومات التالية:-

U = { 10, 20 , 30 , 40 , 50 , 60 , 70 , 80 , 90 , 100}

A= {20 , 50 , 90 }

B= {20, 40 , 70 , 90}

حيث أن U مجموعة شاملة، فأوجد:-

١٦- $\overline{B}$:-

أ- {30,40,60,70,80,100}

ب- {10 ,30, 50,60,80 ,100 }

ج- {10, 20 , 30 , 40 , 50 , 60 , 70 , 80 , 100}

د- {10,30,40,60,70,80,100}

أجب عن الفقرات من ١٥ إلى ٢١ باستخدام المعلومات التالية:-

U = { 10, 20 , 30 , 40 , 50 , 60 , 70 , 80 , 90 , 100}

A= {20 , 50 , 90 }

B= {20, 40 , 70 , 90}

حيث أن U مجموعة شاملة، فأوجد:-

١٧- $A \cup B$:-

أ- {30,40,60,70,80,100}

ب- {20 ,40, 50 ,70 , 90 }

ج- {10, 20 , 30 , 40 , 50 , 60 , 70 , 80 , 90 , 100}

د- {10,30,40,60,70,80,100}

أجيب عن الفقرات من ١٥ إلى ٢١ باستخدام المعلومات التالية:-

U = { 10, 20 , 30 , 40 , 50 , 60 , 70 , 80 , 90 , 100}

A= {20 , 50 , 90 }

B= {20, 40 , 70 , 90}

حيث أن U مجموعة شاملة، فأوجد:-

١٨- $A \cap B$:-

أ- {30,40,60,70,80,100}

ب- {20 , 50 , 90 }

ج- { 10, 20 , 30 , 40 , 50 , 60 , 70 , 80 , 90 , 100}

د- $\boxed{\{20,90\}}$

أجيب عن الفقرات من ١٥ إلى ٢١ باستخدام المعلومات التالية:-

U = { 10, 20 , 30 , 40 , 50 , 60 , 70 , 80 , 90 , 100}

A= {20 , 50 , 90 }

B= {20, 40 , 70 , 90}

حيث أن U مجموعة شاملة، فأوجد:-

١٩- $\overline{A} \cap \overline{B}$:-

أ- {30,40,60,70,80,100}

ب- {20 , 50 , 90 }

ج- $\boxed{\{10, 30, 60, 80, 100\}}$

د- {20,90}

أجيب عن الفقرات من ١٥ إلى ٢١ باستخدام المعلومات التالية:-

U = { 10, 20 , 30 , 40 , 50 , 60 , 70 , 80 , 90 , 100}

A= {20 , 50 , 90 }

B= {20, 40 , 70 , 90}

حيث أن U مجموعة شاملة، فأوجد:-

٢٠- $A \cap U$:-

أ- U

ب- $\boxed{A}$

ج- B

د- C

أجب عن الفقرات من١٥ إلى ٢١ باستخدام المعلومات التالية:-

U = { 10, 20 , 30 , 40 , 50 , 60 , 70 , 80 , 90 , 100}

A= {20 , 50 , 90 }

B= {20, 40 , 70 , 90}

حيث أن U مجموعة شاملة، فأوجد:-

٢١- $A \cup U$:-

أ- U

ب- A

ج- B

د- C

٢٢- اذا كان لدينا الارقام ,5,7,9 ,3. فكم عددا يمكن تكوينه من منزلتين اذا كان يسمح بتكرار العدد:-

أ- 2

ب- 4

ج- 8

د- 16

٢٣- اذا كان لدينا الارقام ,4,6,8 ,2. فكم عددا يمكن تكوينه من منزلتين اذا كان لا يسمح بتكرار العدد:-

أ- 4

ب- 8

ج- 12

د- 16

٢٤- في كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع كان قسم المحاسبة يطرح 5 مقررات وقسم الادارة يطرح 7 مقررات، اراد طالب ان يسجل في مقرر واحد فقط . بكم طريقة يمكن له التسجيل:-

أ- 12

ب- 7

ج- 18

د- 35

٢٥- إذا كان لدينا مجموعة مثل A = {5,7,9,3,2} واردنا كتابة اعداد ذات 3 منازل. فكم عددا يمكن تكوينه من هذه المجموعة.

أ- 30

ب- 60

ج- 120

د- 5

٢٦- اراد امين مكتبة ترتيب 3 كتب مختلفة من اصل 6 كتب مختلفة في رف المكتبة مع الاخذ بعين الاعتبار ترتيب هذه الكتب. فبكم طريقة يمكنه ترتيب هذه الكتب.

أ- 720
ب- 6
ج- 120
د- 3

٢٧- اراد امين مكتبة ترتيب 4 كتب مختلفة من اصل 10 كتب مختلفة في رف المكتبة مع الاخذ بعين الاعتبار ترتيب هذه الكتب. فبكم طريقة يمكنه ترتيب هذه الكتب.

أ- 3628800
ب- 720
ج- 5040
د- 151200

٢٨- بكم طريقة يمكن تكوين لجنة مكونة من 10 طلاب في صف يتكون من 15 طالب.

أ- 360360
ب- 3003
ج- 120
د- 10

٢٩- بكم طريقة يمكن تكوين لجنة مكونة من 5 طلاب في صف يتكون من 12 طالب.

أ- 792
ب- 120
ج- 5040
د- 3003

٣٠- اذا كان لدينا الحروف a,b,c,d,e كم كلمة يمكن تكوينها من 3 حروف دون الاهتمام بعملية ترتيب الحروف.

أ- 5
ب- 10
ج- 2
د- 20

المحاضرة الرابعة (الفصل الثاني)

نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها

مفهوم الاحتمال :-

هو إمكانية وقوع أمر ما لسنا على ثقة تامة بحدوثه، ويلعب الاحتمال دوراً أساسياً في الحياة اليومية بالتنبؤ بإمكانية وقوع حدث ما وهو النظرية التي يستخدمها الإحصائي لتساعده في معرفة مدى تمثيل العينة العشوائية محل الدراسة للمجتمع المأخوذ منه العينة، وتنحصر قيمة الاحتمال بين الصفر والواحد الصحيح والصفر للاحتمال المستحيل في حين الواحد الصحيح للاحتمال المؤكد والاحتمال يبحث في ثلاثة مسائل هامة معتمدة على القواعد الخاصة بالاحتمال التي سنذكرها في حينها والمسائل الثلاثة هي:

1. حساب الاحتمال المتمثل بالتكرار النسبي.
2. حساب الاحتمال بدلالة احتمالات أخرى معلومة من خلال عمليات مثل الاتحاد والتقاطع والفرق.
3. طرق إجراء التقدير كالتوزيعات الاحتمالية.

١- التجربة العشوائية:-

هي تلك التجربة التي تكون جميع نتائجها معلومة مسبقا ولكن لا يمكن التنبؤ بحدوث أي من هذه النتائج بصفة مؤكدة مثلا:

-رمي حجر نرد مرة واحدة يعتبر تجربة عشوائية، حيث نعلم جميع قيم نتائج التجربة وهي إما ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ ولكن لا يمكن تحديد أي الأرقام يظهر إلى الأعلى بصورة مؤكدة قبل إجراء التجربة.

-رمي عملة معدنية مرة واحدة أو عدد من المرات يعتبر تجربة عشوائية معروف جميع نتائجها قبل أن تبدأ التجربة، ولكن لا يمكن الجزم بظهور أي منها في رمية معينة.

-المشاركة في سباق الخيل لحصان معين يعتبر تجربة عشوائية فهو إما أن يفوز أو يخسر أو يتعادل.

مثال(١): -

١. التجربة العشوائية بإلقاء قطعة النقود التي عناصرها المجموعة {صورة ، كتابة} وقد يقع أي منهم وتعرف الصورة والكتابة بعناصر فضاء العينة حيث يكون فرصة الصورة او الكتابة يساوي 1/2.

٢. التجربة العشوائية بإلقاء حجر النرد الذي عناصره المجموعة {1, 2, 3, 4, 5, 6} وقد يقع أي منهم حيث يكون فرصة او احتمال ظهور اي عدد هو 1/6، وهكذا ...

٢- فراغ العينة:-

وهو المجموعة الشاملة التي تحتوي على جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ويرمز له بالرمز Ω ويطلق علية الحالات الممكنة.

وبافترض أننا نقوم بإجراء تجربة ما كرمي زهرة النرد مثلاً ونلاحظ كل النتائج الممكنة وهي ظهور أحد الأوجه الستة ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ ونفترض أننا مهتمون بظهور رقم فردي أي ١ أو ٣ أو ٥ من التجربة.

وهكذا فإن عملية رمي الزهرة تسمى تجربة (Experiment) وظهور رقم فردي هو محل اهتمامنا يسمى حادثاً (Event) ومجموعة جميع الحالات الممكنة الظهور تسمى بالفراغ العيني (Sample Space) ويلاحظ أن الحادث قد يكون حالة او اكثر من الفراغ العيني .

مثال(٢):-

أوجد فضاء العينة وعدد عناصرها للتجارب العشوائية التالية:

١- تجربة رمي قطعة النقود مرة واحدة وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي.

٢- تجربة رمي قطعتي نقود معا وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي لكل قطعة.

الحل:

١- تجربة رمي قطعة نقد مرة واحدة:-

(T: ترمز لظهور الكتابة) (H: ترمز لظهور الصورة)

ولذلك فإن فضاء العينة S ={H, T }.

٢- تجربة رمي قطعتي نقود معا او واحدة تلو الاخرى.

(T: ترمز لظهور الكتابة) (H: ترمز لظهور الصورة)

إن النتائج الممكنة هي: S={(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)}

عدد العناصر في فضاء العينة هو: n(S) = 2n = 22 = 4

ويمكن ايجاد عناصر فضاء العينة لهذه التجربة باستخدام طريقة الضرب الديكارتي للمجموعات فيمكن ايجاد فضاء العينة لهذه التجربة العشوائية كما يلي:

S = {H,T}× {H,T} = {(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)}

مثال(٣):-

أوجد فضاء العينة وعدد عناصرها للتجارب العشوائية التالية:

١- تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي.

٢- تجربة رمي حجر النرد مرتين متتاليتين وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي لكل رمية.

الحل:-

١- تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة:

إن النتائج الممكنة هي 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 ولذلك فإن فضاء العينة هو:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

٢- تجربة رمي حجر النرد مرتين:

يمكن إيجاد فضاء العينة لتجربة رمي حجر النرد مرتين بعدة طرق، نذكر من هذه الطرق:

طريقة حاصل الضرب الديكارتي (الجدول) وطريقة الشجرة.

سوف نذكرهما في هذا المثال طريقة الجدول او ما تسمى بطريقة الضرب الديكارتي وفيما بعد عند الحديث عن الاحتمالات سنتطرق لطريقة الشجرة.

أولا :إيجاد فضاء العينة باستخدام طريقة الجدول ذو البعدين كما يلي: -

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

أو ما تسمى بطريقة الضرب الديكارتي لمجموعتين يمثلان فضاء العينة لا جراء تجربتين عشوائيتين فيكتب فضاء العينة كما يلي:

S={1,2,3,4,5,6}×{1,2,3,4,5,6}

={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),

(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),

(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

وعدد عناصر فضاء العينة باستخدام قاعدة الضرب يساوي:

= 6×6=36

٣ – الحادث:-

وهو مجموعة جزئية من فراغ العينة وتمثل مجموعة النتائج التي تحقق الحدث وتسمى أيضا الحالات المواتية Favorable Cases ، فمثلا الحصول على رقم زوجي في تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة تكون الحادثة هي {٢ ، ٤ ، ٦} ، ويمكن أن تحتوي الحادثة على عنصر واحد أو أكثر.

أنواع الحوادث :-

١. الحادث البسيط (Simple event): وهو الحادث المكون من عنصر واحد مثل {٥} في تجربة إلقاء حجر النرد.
٢. الحادث المركب (Compound event): الحادث المكون من أكثر من عنصر مثل {6، 4، 2} حادث العدد زوجي في تجربة إلقاء حجر النرد.
٣. الحادث المستحيل(Impossible Event): الحادث الذي لا يحوي أي عنصر كحدث ظهور العدد 7 في تجربة إلقاء حجر النردΦ.

أنواع الحوادث :-

٤. الحادث المؤكد (Sure Event): الحادث الذي يضم كافة عناصر فضاء العينة كحدث ظهور عدد أقل من 7 في تجربة إلقاء حجر النرد.
٥. الحوادث المتنافية (Mutually Exclusive Events) يقال عن الحادثين A و B أنهما متنافيان إذا استحال حدوثهما معا. فمثلاً عند رمي عملة معدنية لا يمكن الحصول على وجهين في وقت واحد.

أنواع الحوادث :-

٦. الحوادث المستقلة (Independent Events) يعتبر الحادثين A أو B حادثين مستقلين إذا كان وقوع إحداهما أو عدم وقوعه لا يؤثر في وقوع الآخر. فمثلاً عند رمي قطعة عملة واحدة مرتين متتاليتين فإن نتيجة الرمية الثانية لا تتأثر بنتيجة الأولى.
٧. الحودث المنتظمة (uniform events): المتساوية في احتمالاتها. ففي تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة يكون:

$$=P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = P(1)$$

٨. الأحداث المكملة (Complementary events): الحدثان اللذان اتحادهم يساوي فضاء العينة بمعنى Aحدث فإنالحدث المكمل حيث:S = A

أنواع الحوادث :-

٩. الحوادث الشاملة (Exhaustive Events) تسمى الحوادث A ، B ، C ... حوادث شاملة في تجربة ما إذا كان لابد من حدوث إحداها عند إجراء التجربة.

فمثلاً عند اختيار طالب من الجامعة لمعرفة حالته ما إذا كان مدخنا أو غير مدخن تعتبر هذه الحالات حوادث شاملة لأنه لابد للفرد أن يكون له صفة واحدة من هذه الصفات. كذلك فإن الحصول على العدد ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ عند رمي حجر النرد تعتبر حوادث شاملة لأنه لابد من حدوث إحداها.

مثال(٥):-

لتكن لدينا تجربة هي إلقاء حجر النرد مرة واحدة. أكتب مجموعة فضاء العينة ثم عبر عمليا عن الأحداث التالية: (الحادث A: الحصول على العدد 4) (الحادث B: الحصول على عدد زوجي) (الحادث C: الحصول على عدد أولي) (الحادث D: الحصول على عدد فردي)

الحل:

فضاء العينة لهذه التجربة هو $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وهو جميع النتائج الممكنة من اجراء هذه التجربة

الحادث A: الحصول على العدد 4 (حدث بسيط) $A=\{4\}$,

الحادث B: الحصول على عدد زوجي (الحادث المركب)
$B=\{2, 4, 6\}$

الحادث C: الحصول على عدد أولي $C =\{2, 3, 5\}$

الحادث D: الحصول على عدد فردي $D =\{1, 3, 5\}$

نظرية الاحتمال Probability Theory:-

أنواع الأحتمالات (Probability Types):-

١- الاحتمال المنتظم (Uniform Probability) :-

وهو تساوي احتمالات عناصر فضاء العينة، فاحتمال الحصول على صورة أو كتابة على الوجه العلوي عند رمي قطعة نقد مرة واحده هو $\frac{1}{2}$ واحتمال الحصول على أي عدد عند إلقاء حجر النرد مرة واحدة هو $\frac{1}{6}$.

ويخضع للقانون: احتمال حدوث الحدث A هو

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } S}$$

٢- الاحتمال الضمني أو الشخصي (Subjective Probabilities):-

الاحتمال الذي يعتمد فيه الشخص على خبرته في الظاهرة محل الدراسة كاحتمال فوز فريق في مباراة او احتمال فوز لاعب كرة قدم بالفوز بأفضل لاعب في اوروبا.

٣- الاحتمالات التكرارية النسبية (The Relative Frequency):-

ويتم تحديده كما يلي: نسبة وقوع الحدث على مدى طويل مع ثبات الظروف المحيطة بالحدث. كاحتساب مرات وقوعه في عدد كبير من المحاولات أي: عدد مرات ظهوره الحادث في جميع المحاولات ويساوي

$$P(A) = \frac{\text{عدد مرات ظهور الحادث } A}{\text{عدد مرات إجراء التجربة}}$$

مثال(٧):-

إذا تم رمي حجر نرد وقطعة نقد معا. ما هو احتمال الحصول على الصورة والعدد 6 ؟

نلاحظ هنا بأن نتيجة رمي حجر النرد مستقلة عن نتيجة رمي قطعة النقد.

فيكون

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{2} * \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

مثال(٨):-

عند القاء قطعة نقدية مرتين و قطعتين بنفس الوقت . أحسب احتمال الحصول على صورة في الرمية الأولى وفي الرمية الثانية.

فضاء العينة في هذه التجربة هو: S= { (HH,HT,TH,TT}

والحادث الذي يمثل ظهور الصورة في الرمية الاولى هو A= { H} وفي الرمية الثانية هو B={H}.

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ويمكن حل هذا السؤال بطريقة اخرى كما يلي:

ليكن الحادث A يمثل ظهور الصورة في الرميتين فيكون احتمال وقوع الحادث A هو A={HH}

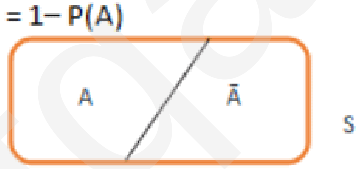
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } S} = \frac{1}{4}$$

قواعد الاحتمالات (Probability Rules):-

١- الحادث المتمم (Complement Event):-

الحادث المتمم للحادثA هو $\bar{A}$ أو A' واحتماله هو احتمال عدم تحقق الحادث A، ونكتب :

$$P(\bar{A}) + P(A) = 1 \iff P(\bar{A}) = 1- P(A)$$



مثال(٩):-

إذا تم رمي حجر نرد مرة واحدة، ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي، ماهو الحادث المتمم وما هو احتماله؟

في هذه التجربة يكون فضاء العينة هو:

S = {1,2,3,4,5,6}, أي: n(S) = 6.

نرمز للحادث الذي يمثل الاعداد الزوجية في هذه التجربة A ,A = {2,4,6} :

فيكون n(A) = 3

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6}$$

الحدث المتمم هو الحصول على عدد غير زوجي.

لنرمز لمتممة A ب $\bar{A}$ فيكون الحادث هو $\bar{A}$ = { 1,3,5} ويكون عدد عناصره هو: $3n(\bar{A})$

واحتماله:

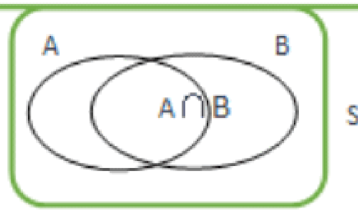
$$P(\bar{A}) = 1- P(A) = 1-\frac{3}{6} = \frac{3}{6}.$$

٢- احتمال وقوع حدث "A" أو "B":-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

احتمال حدوث أحد الحدثين على الأقل

احتمال حدوث الحدثين معاً



احتمال وقوع حدث "A" أو "B" عندما يكون الحادثان "A" و "B" متنافيان أو منفصلان.

مثال(١١):-

إذا كان احتمال وفاة شخص هو 0.05 فما احتمال أن يعيش؟

الحل:

المطلوب هو الحادث المتمم للاحتمال المعطى أي أن مجموعهم يساوي الواحد الصحيح

ويفرض أن:

A: حدث أن يعيش الرجل

$P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.05 = 0.95$

مثال(١٢):-

بين فيما إذا كانت الأحداث الآتية شاملة (دالة احتمال) حيث احتمالاتها 0.1، 0.3، 0.6 مع العلم بأنها متنافية فيما بينها؟

الحل:

حتى تكون شاملة يجب أن يكون مجموعها يساوي الواحد الصحيح وبجمعها نجد أن:

(0.1+ 0.3 + 0.6 = 1) فالأحداث شاملة.

مثال(١٣):-

بين إن كانت الأحداث الأربع الآتية شاملة (دالة احتمال) حيث احتمالاتها 0.0,0.1,0.3,0.6.

الحل:

حتى تكون شاملة يجب أن لا يكون أياً منها لا يساوي صفر ولكن وجود الاحتمال المساوي للصفر يعني الحدث الاول لم يحدث فالأحداث غير شاملة.

مثال(١٤):-

إذا كان احتمال النجاح في مادة المحاسبة هو 0.45 واحتمال النجاح في مادة المالية هو 0.65 واحتمال النجاح في المادتين معاً هو 0.37 أوجد احتمالالنجاح في أحدالمادتين على الأقل.

الحل:

بتطبيق صيغة الاحتمالات للحوادث المتصلة بفرض أنَّ:

A :احتمال النجاح في مادة المحاسبة

B:احتمال النجاح في مادة المالية

$A \cap B$:احتمال النجاح في المادتين معاً

فأنَّ احتمال وقوع احدهما على الاقل (يعني المطلوب ايجاد احتمال الاتحاد بينهما) فيكون

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.45 + 0.65 - 0.37 = 0.73$

المحاضرة الخامسة (الفصل الثاني)

نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها

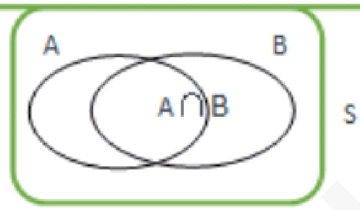
نظرية الاحتمال Probability Theory:-

٢- احتمال وقوع حدث "A" أو "B":-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

احتمال حدوث أحد الحدثين على الأقل

احتمال حدوث الحدثين معاً



احتمال وقوع حدث "A" أو "B" عندما يكون الحادثان "A" و "B" متنافيان أو منفصلان.

مثال(١١):-

إذا كان احتمال وفاة شخص هو 0.05 فما احتمال أن يعيش؟

الحل:

المطلوب هو الحادث المتمم للاحتمال المعطى أي أن مجموعهم يساوي الواحد الصحيح

ونفرض أن:

A: حدث أن يعيش الرجل

$P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.05 = 0.95$

مثال(١٢):-

بين فيما إذا كانت الأحداث الآتية شاملة (دالة احتمال) حيث احتمالاتها 0.1، 0.3، 0.6 مع العلم بأنها متنافية فيما بينها؟

الحل:

حتى تكون شاملة يجب أن يكون مجموعها يساوي الواحد الصحيح وبجمعها نجد أن:

(0.1+ 0.3 + 0.6 = 1) فالأحداث شاملة.

مثال(١٣):-

بين إن كانت الأحداث الأربع الأتية شاملة (دالة احتمال) حيث احتمالاتها 0.0,0.1,0.3,0.6.

الحل:

حتى تكون شاملة يجب أن لا يكون أياً منها لا يساوي صفر ولكن وجود الاحتمال المساوي للصفر يعني الحدث الاول لم يحدث فالأحداث غير شاملة.

مثال(١٤):-

إذا كان احتمال النجاح في مادة المحاسبة هو 0.45 واحتمال النجاح في مادة المالية هو 0.65 واحتمال النجاح في المادتين معاً هو 0.37 أوجد احتمالالنجاح في أحدالمادتين على الأقل.

الحل:

بتطبيق صيغة الاحتمالات للحوادث المتصلة بفرض أنَّ:

A :احتمال النجاح في مادة المحاسبة

B:احتمال النجاح في مادة المالية

$A \cap B$:احتمال النجاح في المادتين معاً

فأنَّ احتمال وقوع احدهما على الاقل (يعني المطلوب ايجاد احتمال الاتحاد بينهما) فيكون

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.45 + 0.65 - 0.37 = 0.73$

٣- الاحتمال الشرطي Conditional Probability:-

نعرف الحادثين A و B على فضاء العينة S، يعرف الاحتمال الشرطي للحادث A اذا علم بوقوع الحادث B كما يلي :

$$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad , P(B) > 0$$

مثال(١٥):-

إذا تم إلقاء حجر نرد مرة واحدة فأجب عما يلي:

١. أوجد احتمال الحصول على عدد أقل من 4 .

٢. أوجد احتمال الحصول على نتيجة أقل من 4 إذا علمت أن الوجه العلوي لحجر النرد عدد فردي.

٣. أوجد احتمال الحصول على عدد أكبر من أو يساوي 4 إذا علمت أن النتيجة عدد فردي.

الحل:

ليكن الحادث A يمثل الاعداد التي اقل من 4

ليكن الحادث B يمثل ظهور عدد فردي على الوجه العلوي لحجر النرد

والحادث C يمثل ظهور عدد اكبر من او يساوي العدد. 4

فتكون الحوادث هي:

A = { 1,2,3}, و B = { 1,3,5}, وC={4,5,6}.

1- $P(A) = P(A) = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{3}{6}$

2- $P(A/B) = P(A\cap B)/P(B)$

$A\cap B = \{ 1,2,3\} \cap \{ 1,3,5\} = \{ 1,3\}$

$P(A\cap B) = P(A) = P(A) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{2}{6}$

$P(A/B) = P(A\cap B)/P(B) = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$

3- $P(C) = \frac{n(c)}{n(B)} = \frac{3}{6}$

$C \cap B = \{4,5,6\} \cap \{1,3,5\} = \{5\}$

$$P(C \cap B) = \frac{1}{6}$$

فبهذا تكون

$P(C|B) = \frac{P(C\cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$

مثال(١٦):-

صندوق يحتوي على 5 كرات 2 حمراء و3 بيضاء. سحبت كرة وسجل لونها ثم اعدناها للصندوق فاذا كررت العملية ٣ مرات.

١- أحسب احتمال الحصول على 2 كرة حمراء مع الارجاع؟

٢- أحسب احتمال الحصول على 3 كرات حمراء مع الارجاع؟

٣- أحسب احتمال الحصول على 2 كرة حمراء بدون ارجاع الكرة المسحوبة في كل مرة؟

٤- أحسب احتمال الحصول على3 كرات حمراء بدون الإرجاع الكرة المسحوبة في كل مرة؟

الحل:

نرمز للكرة الحمراء R والكرة البيضاء W

1- $P(R1R2) = P(R1 \cap R2) = P(R1)\, P(R2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = 4/25$

2- $P(R1R2R3) = P(R1 \cap R2 \cap R3) = P(R1)\, P(R2)\, P(R3) = = \frac{2}{5} * \frac{2}{5} * \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$

ولكن نلاحظ في حالة عدم ارجاع الكرة ان النتائج كما يلي:

3- $P(R1R2) = P(R1 \cap R2) = P(R1)\, P(R2/R1) = = \frac{2}{5} * \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$

4- $P(R1R2R3) = P(R1 \cap R2 \cap R3) = P(R1)\, P(R2/R1)\, P(R3/(R1 \cap R2)) = \frac{2}{5} * \frac{1}{4} * 0$
$= 0$

مثال(١٧):-

كيس يحتوي على 6 كرات زرقاء و 4 كرات حمراء إذا سحبت كرتان الواحدة تلوى الأخرى بدون إرجاع. ما احتمال أن تكون كل من الكرتان حمراء ؟

الحل:

بما ان السحب بدون ارجاع فهذا يعني ان الحادثين غير مستقلين عندما نسحب الكرة الأولى هذا سوف يؤثر على عدد الكرات في السحبة الثانية حيث ان عدد الكرات الحمراء سوف تقل والعدد الكلي للكرات أيضا يقل كرة واحدة وهي التي سحبناها في المرة الأولى فيكون ناتج الاحتمال هو:

$$P(R\cap R) = P(R) \times P(R\backslash R) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90}$$

مثال(١٨):-

في المثال السابق، ما احتمال أن تكون كل من الكرتان زرقاء ؟

الحل:

بعد سحب الكرة الاولى سوف تنقص كرة وتؤثر على السحبة الثانية. اذن احتمال الكرة الأولى زرقاء × احتمال أن تكون الكرة الثانية زرقاء بعد سحب الكرة الأولى زرقاء

$$P(B\cap B) = P(B) \times P(B\backslash B) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

مثال(١٩):-

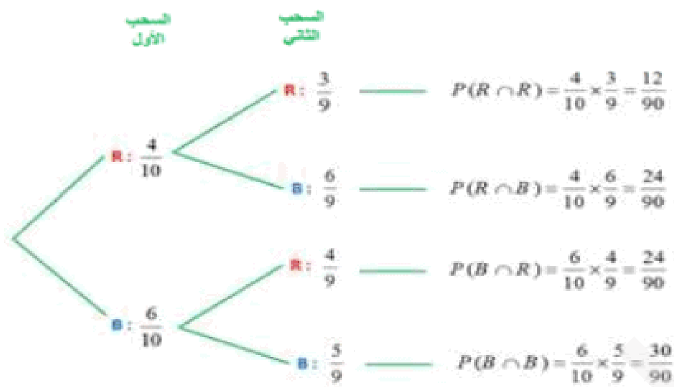
في المثال السابق، ما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟

الحل:

احتمال الأولى حمراء × احتمال الثانية زرقاء بشرط الأولى حمراء =

$$P(R\cap B) = P(R) \times P(B\backslash R) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{24}{90}$$

والشكل التالي يوضح شجرة الاحتمال



مثال(٢٠):-

عند رمي حجر نرد مرة واحدة، إذا كان العدد الظاهر عدد زوجي فما احتمال أن يكون العدد 2 ؟

الحل:

هنا لدينا حادثان الاول ظهور عدد زوجي عند رمي حجر النرد مرة واحده، والحادث الثاني هو ظهور العدد 2.

أي A : يشير الى ظهور العدد الزوجي فيكون $A = \{2, 4, 6\}$ فيكون $P(A) = \frac{3}{6}$

B : ظهور العدد 2 اي $B = \{2\}$ وبهذا يكون احتمال ظهور العدد 2 اذا علم بظهور عدد زوجي هو

$A\cap B = \{2\}$ فيكون فيكون $P(A\cap B) = \frac{1}{6}$

$$P(B\backslash A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

مثال(٢٢):-

إذا رسب 25% من الطلبة في أحد الصفوف بمدرسة ما في الرياضيات، ورسب 10% منهم في الرياضيات والكيمياء. فإذا تم اختير طالب عشوائيا، ما احتمال رسوبه في الكيمياء إذا كان راسبا في الرياضيات؟

الحل :

نفرض A : رسوب الطالب في الرياضيات، و B: رسوب الطالب في الكيمياء

$$P(B\backslash A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0.10}{0.25} = 0.40$$

٥- استقلال الحوادث Independent Events:-

الفكرة الاساسية في الاحتمال الشرطي هو وجود تأثير من وقوع الحادث الاول على وقوع الحادث الثاني. فنتوقع هنا ان يتأثر وقوع الحادث الثاني من وقوع الحادث الاول. في العموم نتوقع كالتالي:

$$P(A) \neq P(A \backslash B)$$

ولكن الحالة $P(A)= P(A\backslash B)$ لها تغير هام. اذا بقي الاحتمال A يحدث نفسه ، سواء لم يقع B ، نقول بأن الحادثين مستقلين احصائيا اي اذا حدث الحادث A اي الشخص مدخن لا يؤثر على وقوع حدث الاصابة بالسرطان. فيكون الحادثان A وB مستقلان اذا تحقق الشرط التالي:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

أو يمكن استخدام احد الشروط التالية لإثبات ان الحادثين مستقلين:

$P(A)= P(A\backslash B)$
$P(B)= P(B\backslash A)$
$P(A)= P(A\backslash \overline{B})$
$P(B)= P(B\backslash \bar{A})$

كما ويمكن تعميم شرط الاستقلال على n من الحوادث فتكون الحوادث $A_1, A_2, \dots, A_n$ مستقلة اذا حققت الشرط التالي:

$$P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$$

أمثلة على الحوادث المستقلة:-

- عند سحب كرة واحدة عشوائيا من كل من صندوقين مختلفين، بما أن سحبي للكرة من الصندوق الأول لا يؤثر على سحبي للكرة من الصندوق الثاني إذن الحدثان مستقلان
- رمي قطعة نقدية وحجر نرد مرة واحدةيما أن النواتج في القطعة النقدية لا تؤثر على النواتج في حجر النرد فيكون الحدثان مستقلان
- نجاح طالب في مقرر الاحصاء و نجاحه في مقرر المحاسبة سواء نجح الطالب في الاحصاء أو رسب فيه لا يؤثر على نجاحه أو رسوبه في المحاسبة. إذن الحدثان مستقلان.
- سحبت كرة عشوائيا من كيس فيه 10 كرات ثم أعيدت ثم سحبت كرة ثانية بما إننا ارجعنا الكرة الأولى فعدد الكرات لم يتغير وبالتالي السحبة الأولى لم تؤثر على السحبة الثانية. فيكون الحدثان مستقلان.

ملاحظة: دائما في التجارب العشوائية التي تتعلق بسحب الكرات من صندوق مع ارجاع الكرة وسحب الكرة الثانية فانه تكون نتائج احتمال سحب الكرات مستقلة عن بعضها البعض أي احتمال سحب الكرة الثانية لا يتأثر باحتمال سحب الكرة الاولى.

- نجاح طالب في الامتحان العملي للفيزياء ونجاحه في مقرر الفيزياء بما أن الامتحان العملي يؤثر في النجاح في المقرر .. إذن الحدثان غير مستقلان
- سحب كرة عشوائيا من كيس به 10 كرات دون إعادتها، ثم سحب كرة ثانية ففي هذه الحالة عدد الكرات في الكيس يتغير وبالتالي سوف يؤثر على احتمال سحب الكرة الثانية. فيكون الحدثان غير مستقلان.

من هذا المثال ندرك الحقيقة التالية:

في حالة عدم الارجاع عند سحب الكرة الاولى فان المجموع الكلي يتأثر مما يؤثر في احتمال سحب الكرة الثانية مما يدل على ان الحادثين غير مستقلين.

مثال(٢٣):-

كيس يحتوي على 6 كرات زرقاء و 4 كرات حمراء إذا سحبت كرة عشوائيا ثم أعيدت، ثم سحبت كرة ثانية.

١- ما احتمال أن تكون الكرة حمراء في المرتين؟
٢- ما احتمال أن تكون الكرة زرقاء في المرتين؟
٣- ما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟
٤- ما احتمال أن تكون إحداهما حمراء والأخرى زرقاء؟

الحل:

بما أن السحب كان مع الإرجاع إذن الحدثان مستقلان

١. احتمال أن تكون الكرة حمراء في المرتين: مجموع الكرات في الكيس 10 وعدد الكرات الحمراء 4 مما يعني ان احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية حمراء=

$$P(R\cap R) = P(R) \times P(R) = \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$$

2. احتمال أن تكون الكرتان زرقاوين في المرتين:-

$$P(B\cap B) = P(B) \times P(B) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$$

3. احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء:عدد الكرات الحمراء 4 من أصل 10 كراتعدد الكرات الزرقاء 6 من أصل 10 كرات

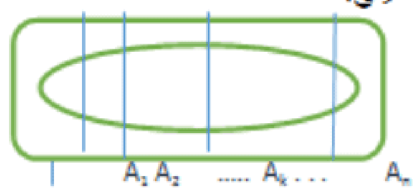
$$P(R\cap B) = P(R) \times P(B) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$$

4. احتمال أن تكون إحداهما حمراء والأخرى زرقاء : في هذه الحالة نأخذ بعين الاعتبار انه قد تكون الكرة الاولى حمراء او الثانية وكذلك للكرة الزرقاء. فيكون احتمال أن تكون أحدهما حمراء والأخرى زرقاء = احتمال الأولى حمراء والثانية زرقاء + احتمال الأولى زرقاء والثانية حمراء. لهذا يجب ان نضرب الاحتمال لسحب الكرة الاولى حمراء والثانية زرقاء في 2 كما يلي:

$$P(R\cap B) = 2 \times P(R) \times P(B) = 2 \times \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$$

٦- نظرية بييز Theory Bayes:

لتكن A1, A2,..., Ak, ..., An أحداث متنافية وشامله حيث اتحادها يشكل فضاء العينة S، وE حادث ما يتحقق عن طريق جميع الحوادث A1 .....An، إذا علمنا أن E تحقق، نحسب احتمال تحققه عن طريق الحدث Ak كما يلي:



$$P(A_k \backslash E) = \frac{P(A_k)P(E \backslash A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(E \backslash A_k)} = \frac{P(E \cap A_k)}{P(E)}$$

مثال(٢٤):-

تم تعيين الموظف (A1) في مكتب محاسبة حيث تولى طبع 20 % من الفواتير. يشغل المكتب شخصين أخرين إحداهما (A2) يطبع 30% من الفواتير والأخر (A3) 50%. يرتكب الشخص الاول أخطاء في 5% من الفواتير، بينما نسبة الخطأ لدى الثاني (A2) 2% ولدى الثالث (A3) 1%. تم أخذ فاتورة بشكل عشوائي فتبين أن بها أخطاء. استبعد الشخص الأول أن يكون هو من أنجز الفاتورة بحجة أنه لا ينجز إلا 20% من الفواتير، ورد عليها الشخصان الثاني والثالث بأن نسبة الأخطاء لديهما هو الأكبر(5%).

١. أحسب احتمال أن يكون الموظف الاول (A1) هو الذي حرر الفاتورة وقارن مع احتمال أن يكون مصدر الخطأ هو A2 أو A3.
٢. أحسب مجموع الاحتمالات الثلاث.
٣. أحسب احتمال أن تكون فاتورة مختارة عشوائيا من مجموع المراسلات، أن تكون بها أخطاء.

الحل:-

١-

$$P(A_1/A)=\frac{P(A_1)P(A/A_1)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(A/A_k)}=\frac{0.2*0.05}{(0.2*0.05)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)}=0.238$$

$$P(A_2/A)=\frac{P(A_2)P(A/A_2)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(A/A_k)}=\frac{0.3*0.02}{(0.2*0.05)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)}=0.2857$$

$$P(A_3/A)=\frac{P(A_3)P(A/A_3)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(A/A_k)}=\frac{0.5*0.01}{(0.2*0.05)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)}=0.476$$

يظهر من الحساب أن الاحتمال الأكبر هو أن كون A_3 هو الذي حرر الفاتورة.

٢- مجموع الاحتمالات $P(A1/A) + P(A2/A) + P(A3/A) = 1$ لأنها تمثل احتمالات الأحداث المتنافية الثلاث.

٣- احتمال وجود خطأ في مراسلة ما:

$$P(A)=\sum P(A_k)P(A/A_k)=(0.2*0.005)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)=0.012$$

مثال(٢٥):-

تستقبل مدرسة ثانوية تلاميذ السنة الأولى من ثلاث متوسطات M1,M2,M3، 25% من التلاميذ الذين يأتون من المتوسط M1 و40% من M2 و 35% من M3 . 2% من M1 و 5% من M2 و 3% من M3 يعيدون السنة. اذا اخترنا عشوائيا تلميذا واحدا.

١- احسب احتمال ان الطالب الذي اختير عشوائيا كان من المعيدين للسنة.

٢- اذاعلمتان الطالب كان من المعيدين فما احتمال ان يكون من المتوسط M3.

مثال(٢٥):-

تستقبل مدرسة ثانوية تلاميذ السنة الأولى من ثلاث متوسطات M1,M2,M3، 25% من التلاميذ الذين يأتون من المتوسط M1 و40% من M2 و 35% من M3 . 2% من M1 و 5% من M2 و 3% من M3 يعيدون السنة. اذا اخترنا عشوائيا تلميذا واحدا.

١- احسب احتمال ان الطالب الذي اختير عشوائيا كان من المعيدين للسنة.

٢- اذاعلمتان الطالب كان من المعيدين فما احتمال ان يكون من المتوسط M3.

الحل:

E : ترمز الى اختيار طالب من المعيدين للسنة

A1 :يرمز الى طلاب المتوسط M1

A2 :يرمز الى طلاب المتوسط M2

A3 :يرمز الى طلاب المتوسط M3

1. $P(E)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i).P(E\backslash A_i)$

$= P(A_1).P(E\backslash A_1)+P(A_2).P(E\backslash A_2)+P(A_3).P(E\backslash A_3)$

$=(0.25)(0.02)+(0.40)(0.05)+(0.35)(0.03)$

$= 0.005+0.02+0.0105=0.0355$

2. $P(A_3\backslash E)=\frac{P(A_3).P(E\backslash A_3)}{P(E)}=\frac{0.0105}{0.0355}=0.29577$

المحاضرة السادسة - نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها

(تمارين للمراجعة على الفصل الثاني)

١- رمي حجر نرد مرد واحدة ، أحسب التالي:

- احتمال الحصول على رقم ٥
- احتمال الحصول على رقم زوجي
- احتمال الحصول على رقم أكبر من ٢
- احتمال الحصول على رقم أقل من ٧
- احتمال الحصول على رقم ٧

الحل:

حيث أن فراغ العينة لهذه التجربة هو S = {1,2,3,4,5,6} ، فإن الاحتمالات الممكنة هي:-

- $P_{(A=5)} = \frac{1}{6}$
- $P_{(A=2,4,6)} = \frac{3}{6}$
- $P_{(A>2)} = \frac{4}{6}$
- $P_{(A<7)} = \frac{6}{6} = 1$
- $P_{(A=7)} = \frac{0}{6} = 0$

٢- في تجربة رمي حجري نرد معا لنفرض الحادثين

A : حادث يمثل ظهور اربع نقاط على احد الوجهين فقط

B: حادث يمثل ظهور وجهين مجموع نقاطهما أصغر من ٨

أوجد احتمال ما يلي:

1.P(A) 2. P(B) 3. $P(\bar{A})$ 4. $P(\bar{B})$ 5.P(A∩ B)

6. P(A∪ B)

الحل:

يمكن تعريف كل من الاحداث A ، B كما يلي: -

- (A)={(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(1,4),(2,4),(3,4).(5,4),(6,4)}
- (B)={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(6,1)}
- $P(A \cap B) = \{(4,1), (4,2), (4,3), (1,4), (2,4), (3,4)\}$
- $P(A \cup B)$ ={(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(1,4),(2,4),(3,4).(5,4),(6,4),(1,1),(1,2),(1,3),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(2,5),(5,1),(5,2)}
- N(S)=36, n(A)= 10, n(B) =21, n(A∩ B) = 6 ,n(AU B)= 25

وعلى ذلك فإن الاحتمالات المطلوبة تساوي:-

1- $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{36}$

2- $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)} = \frac{21}{36}$

3- $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{10}{36} = \frac{26}{36}$

4- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{21}{36} = \frac{15}{36}$

5- $P(A\cap B)= \frac{n(A\cap B)}{n(S)} = \frac{6}{36}$

6- $P(A \cup B)= \frac{n(A\cup B)}{n(S)} = \frac{25}{36}$

٣- رمي حجر نرد مرة واحدة ، احسب:

أ- احتمال الحصول على رقم ٥ أو ٦.

ب- احتمال الحصول على رقم زوجي.

الحل:

أ- حيث أن الحصول على رقم ٥ أو ٦ حادثتان متنافيتان ، أي أن:

A1={الحصول على الرقم ٥} ، و A2= {الحصول على الرقم ٦} فإن:

$P(A1 \cup A2)=(1/6)+(1/6)=1/3$

ب- وحيث أن الحصول على رقم زوجي يعني الحصول على رقم ٢ أو رقم ٤ أو رقم ٦ وكلها حوادث متنافي، أي أن:

A1={الحصول على الرقم ٢} ، و A2= {الحصول على الرقم ٤} ، و A3= {الحصول على الرقم ٦} فإن:

$P(A1 \cup A2 \cup A3)=(1/6)+(1/6) +(1/6) = 1/2$

٤- لاعب شطرنج يلعب مع الحاسوب مرتين ، احتمال فوزه بالمرة الاولى 0.7 واحتمال فوزه بالمرة الثانية هو 0.6 واحتمال فوزه في المرتين هو 0.65 ، ما احتمال خسارته في المرتين؟

الحل:

بفرض أن A : حادث يمثل الربح في المرة الاولى، وB : حادث يمثل فوزه في المرة الثانية.

فإن احتمال خسارته في المرتين هو:

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A\cap B)]$

$= 1 - [0.7 + 0.6 - 0.65] = 1 - [0.65] = 0.35$

٥- عند رمي قطعة نقود منتظمة خمس مرات ما احتمال ظهور صورة واحدة على الاقل؟

<u>الحل :</u>

$n(S)= nr = (2)^5 = 32$

لتكن A : حادث يمثل ظهور صورة واحدة على الاقل.

وليكون $\overline{A}$: حادث يمثل عدم ظهور اي صورة

فيكون: $\overline{A} = \{ TTTTT\}$

$P(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{n(S)} = \frac{1}{32}$

$P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32} P(A) = -1$

٦- استطلع مدير شركة الموظفين من كلا الجنسين حول رغبتهم بقيام الشركة بدورة تدريبية اثناء اجازة الاسبوع فكانت النتائج كما يلي:

الجنس	يرغبون	لا يرغبون	مترددون	المجموع
ذكور	10	5	5	20
اناث	7	3	2	12
المجموع	17	8	7	32

اذا اختير احد الموظفين عشوائيا، أجب عما يلي:

1. ما احتمال أن يكون هذا الموظف ممن يرغبون بإقامة الدورة؟
2. ما احتمال أن يكون هذا الموظف ممن يرغبون بالدورة علما أنه من الذكور؟
3. ما احتمال أن يكون هذا الموظف مترددا علما انه انثى؟
4. ما احتمال ان يكون انثى اذا علمت انه ممن يرغب بإقامة الدورة؟

<u>الحل:</u>

ليكن

A : حادث يمثل الموظف ممن يرغبون بالدورة.

B : حادث يمثل الموظف من الذكور.

C : حادث يمثل موظف من المترددين للدورة.

D : حادث يمثل ان الموظف انثى.

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{17}{32}$

$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{32}}{\frac{20}{32}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

$P(C \backslash D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{2}{32}}{\frac{12}{32}} = \frac{2}{12}$

$P(D \backslash A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{32}}{\frac{12}{32}} = \frac{7}{12}$

٧- الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعيه	اعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، ثم احسب الاحتمالات التالية:

- أن يكون أعزبا
- أن يكون متزوجا
- أن يكون من القسم الأول
- أن يكون من القسم الأول أو الثاني
- أن يكون من القسم الأول وأعزب

الحل:

- نفرض أن الحادثة A أن يكون العامل أعزب أي A = {أن يكون العامل أعزب} فيكون الاحتمال المطلوب:

$P(A)= 23/50= 0.46$

- نفرض أن الحادثة B أن يكون العامل متزوج أي أن B = {أن يكون العامل متزوج} فيكون الإحتمال المطلوب:

$P(B)= 27/50= 0.54$

- نفرض أن الحادثة C أن يكون العامل من القسم الأول أي أن C = {أن يكون العامل من القسم الأول} فيكون الإحتمال المطلوب:

$P(C)= 12/50= 0.24$

- نفرض أن الحادثة D أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني أي أن D = {أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني} فيكون الاحتمال المطلوب:

$P(D)= (12+22)/50=34/50= 0.68$

- نفرض أن الحادثة E أن يكون العامل من القسم الأول و أعزب أي أن E = {أن يكون العامل من القسم الأول وأعزب} فيكون الاحتمال المطلوب:

$P(E)= 5/50= 0.1$

٨- الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	اعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، ثم احسب الاحتمالات التالية:

أ- احتمال أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني.

ب- احتمال أن يكون العامل متزوجا أو من القسم الأول

ت- احتمال أن يكون العامل من القسم الثالث أو أعزب

الحل:

أ- نفرض أن الحادثة A1 أن يكون العامل من القسم الأول أي أن A1 = {أن يكون العامل من القسم الأول}

$P(A1)=12/50$

نفرض أن الحادثة A2 أن يكون العامل من القسم الثاني أي أن A2 = {أن يكون العامل من القسم الثاني}

$P(A2)=22/50$

فيكون الاحتمال المطلوب:

$P(A1 \cup A2) = P(A1)+P(A2) = (12/50)+(22/50) = 34/50 = 0.68$

ب- نفرض أن الحادثة A1 أن يكون العامل متزوجا أي أن A1 = {أن يكون العامل متزوج}

$P(A1)=27/50$

نفرض أن الحادثة A2 أن يكون العامل من القسم الأول أي أن A2 = {أن يكون العامل من القسم الأول}

$P(A2)=12/50$

فيكون الاحتمال المطلوب:

$P(A1 \cup A2) = P(A1)+P(A2)-P(A1 \cap A2) = (27/50)+(12/50)-(7/50) = 32/50 = 0.64$

ت- نفرض أن الحادثة A1 أن يكون العامل من القسم الثالث أي أن A1 = {أن يكون العامل من القسم الثالث}

$P(A1)=16/50$

نفرض أن الحادثة A2 أن يكون العامل أعزب أي أن A2 = {أن يكون العامل أعزب}

$P(A2)=23/50$

فيكون الاحتمال المطلوب:

$P(A1 \cup A2) = P(A1)+P(A2)-P(A1 \cap A2) = (16/50)+(23/50)-(10/50) = 29/50 = 0.58$

٩- إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الرياضيات 0.64 واحتمال نجاحه في مقرر الإحصاء ومقرر الرياضيات معا 0.32 فما هو احتمال نجاحه في مقرر الإحصاء؟ علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات.

الحل:
نفرض أن A1={نجاح الطالب في مقرر الإحصاء}
A2={نجاح الطالب في مقرر الرياضيات}
وبذلك يكون:

$P(A2)=0.64$
$P(A1 \cap A2)=0.32$

ويكون المطلوب في هذه المسألة هو حساب $P(A1|A2)$ وبتطبيق العلاقة:

$$P(A1|A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0.32}{0.64} = 0.5$$

إذا احتمال نجاح الطالب في مقرر الإحصاء علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات هو 0.5

١٠- الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	اعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، ثم احسب الاحتمالات التالية:

أ- احسب احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج؟

ب- احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث؟

الحل:
نفرض أن A1={أن يكون العامل من القسم الأول}

A2={أن يكون العامل متزوج}
B3={أن يكون العامل من القسم الثالث}
B4={أن يكون العامل أعزب}
فيكون بالتالي:
أ- احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج هو:

$$\frac{\text{احتمال أن يكون من القسم الأول ومتزوج}}{\text{احتمال أن يكون متزوج}}$$

$$P(A1|A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{7}{50}}{\frac{27}{50}} = \frac{7}{27}$$

إذا احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج هو 0.259
ب- احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث هو:

$$\frac{\text{احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث}}{\text{احتمال أن يكون من القسم الثالث}}$$

$$P(B1|B2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{10}{50}}{\frac{16}{50}} = \frac{10}{16}$$

إذا احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث هو 0.625

١١- اذا شارك اللاعب A باحتمال 0.6 واللاعب B باحتمال 0.8 وكان احتمال مشاركة اللاعب A علما بأن الطالب B قد شارك هو 0.55 . فإذا شارك الطالب A في المباراة ما احتمال عدم مشاركة اللاعب B .

الحل:
المطلوب هو حساب الاحتمال

$$P(\bar{B}\backslash A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)}$$

$$P(\bar{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B)$$

ولكن من المعطيات $P(A\backslash B) = 0.55$ منها نجد قيمة الاحتمال $P(A \cap B)$ كما يلي:

$$P(A\backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.55$$

$$P(A \cap B) = 0.55 \times P(B) = (0.55)(0.8) = 0.44$$

$$P(\bar{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.44 = 0.16$$

$$P(\bar{B}\backslash A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{0.16}{0.6} \cong 0.267$$

١٢- تقدم شخصان لنفس الاختبار. احتمال نجاح الاول 0.7 واحتمال نجاح الاخر 0.9
أ- ما احتمال نجاحهما معا؟
ب- ما احتمال نجاح احدهما على الاقل؟

الحل:
بفرض أن A : حادث يمثل نجاح الطالب الاول، و B : حادث يمثل نجاح الطالب الثاني
لان نجاح الطالبين مستقلين عن بعضهما البعض فان:

a) $P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = (0.7)\,(0.9) = (0.63)$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0.7 + 0.9 - 0.63 = 0.97$

١٣- صندوق يحتوي على 10 كرات منها 4 كرات حمراء و 6 كرات صفراء. سحبت 3 كرات بشكل عشوائي على التوالي بدون ارجاع. أحسب

أ- احتمال ان تكون كرتان حمراء وكرة صفراء

ب- احتمال ان تكون الكرات الثلاث صفراء

الحل:

بفرض أن A : حادث يمثل كرتان حمراء وكرة صفراء، وB : حادث يمثل الكرات الثلاث حمراء

a) $P(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{36}{120}$

b) $P(B) = \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120}$

١٤- اذا اعطيت قيم الاحتمالات التالية:-

$P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.3$ $P(A \cup B) = 0.85$

أوجد ما يلي:

1. $P(A\cap B)$, 2. $P(A\cap \bar{B})$, 3. $P(\bar{A} \cap B)$, 4. $P(A \backslash B)$, 5. $P(\bar{A} \backslash \bar{B})$, 6. $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

الحل:

1. $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   $0.85 = 0.7 + 0.3 - P(A\cap B)$
   $P(A\cap B) = 0.7 + 0.3 - 0.85 = 0.15$
2. $P(A\cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.15 = 0.55$
3. $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.15 = 0.15$
4. $P(A\backslash B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.3} = 0.50$
5. $P(\bar{A}\backslash \bar{B}) = \frac{P(\bar{A}\cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\overline{A\cup B})}{1-P(B)} = \frac{1-P(A\cup B)}{1-0.3} = \frac{1-0.85}{0.7} = \frac{0.15}{0.7} = 0.21429$
6. $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.15 = 0.85$

١٥- مصنع يقوم بإنتاج سلعة معينة به ثلاث آلات، تنتج الآلة الأولى 20% من إجمالي إنتاج السلعة وتنتج الآلة الثانية نسبة 35% والثالثة بنسبة 45% ، فإذا كانت نسبة الإنتاج المعيب في الثلاث آلات على الترتيب هو 2% و 2.5% و 3% ، سحبت وحدة عشوائيا من إنتاج المصنع فوجد أنها معيبة، احسب الاحتمالات التالية:

أ- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الأولى؟

ب- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الثانية؟

الحل:

نفرض أن

A1={إنتاج الآلة الأولى} P(A1)=0.2

A2={إنتاج الآلة الثانية} P(A2)=0.35

A3={إنتاج الآلة الثالثة} P(A3)=0.45

B= {إنتاج سلعة معينة}

فيكون:

P(B|A1)=0.02

P(B|A2)=0.025

P(B|A3)=0.03

تكون السلعة من إنتاج الآلة الأولى إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.2\times0.02}{(0.2\times0.02)+(0.35\times0.025)+(0.45\times0.03)}=0.152$$

واحتمال أن تكون السلعة من إنتاج الآلة الثانية إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.35\times0.025}{(0.2\times0.02)+(0.35\times0.025)+(0.45\times0.03)}=0.333$$

١٦- مستشفى به أربعة أقسام، نسب عمال النظافة في هذه الأقسام هي 30% ، 40% ، 20% ، 10% على التوالي، إذا كانت نسب العمال المدخنين بهذه الأقسام هي 15% ، 18% ، 12% ، 9% على التوالي، اختير عامل عشوائيا فوجد أنه مدخن ، احسب الاحتمالات التالية:

أ- أن يكون العامل من القسم الأول؟

ب- أن يكون العامل من القسم الثاني؟

ت- أن لا يكون العامل من القسم الأول؟

الحل:

نفرض أن

A1={أن يكون العامل من القسم الأول} P(B|A1)=0.15 P(A1)=0.3

A2={أن يكون العامل من القسم الثاني} P(B|A2)=0.18 P(A2)=0.4

A3={أن يكون العامل من القسم الثالث} P(B|A3)=0.12 P(A3)=0.2

A4={أن يكون العامل من القسم الرابع} P(B|A4)=0.09 P(A4)=0.1

احتمال أن يكون العامل من القسم الأول إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.3\times0.15}{(0.3\times0.15)+(0.4\times0.18)+(0.2\times0.12)+(0.1\times0.09)}=0.3$$

واحتمال أن يكون العامل من القسم الثاني إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.4\times0.18}{(0.3\times0.15)+(0.4\times0.18)+(0.2\times0.12)+(0.1\times0.09)}=0.48$$

واحتمال أن لا يكون العامل من القسم الأول إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_1^c|B)=1-0.3=0.7$$

محاضرة البث المباشر الاول (حل مسائل)

إذا كان $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8\}$ أوجد $(A \cup B)$:-

أ- {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

ب- {8,7,6,5,4,3,2}

ج- $\boxed{\{8,7,6,5,4,3,2,1\}}$

د- {1,2,3,4,5,6,7}

إذا كان $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ و $A=\{2,4,6,8,10\}$ أوجد $\overline{A}$:-

أ- {1,3,5,6,7,9}

ب- {2,3,4,5,6,7,8,9,10}

ج- $\boxed{\{1,3,5,7,9\}}$

د- {2,4,6,8,10}

بكم طريقة يمكن تكوين لجنة مكونة من 10 طلاب في صف يتكون من 15 طالب.

أ- 360360

ب- $\boxed{3003}$

ج- 120

د- 10

بكم طريقة يمكن تكوين لجنة مكونة من 5 طلاب في صف يتكون من 12 طالب.

أ- $\boxed{792}$

ب- 120

ج- 5040

د- 3003

.......هي المجموعة التي يكون لها بداية ولها نهاية.

أ- المجموعة الجزئية.

ب- المجموعة الشاملة.

ج- المجموعة الخالية.

د- $\boxed{\text{المجموعة المنتهية.}}$

..............هي المجموعة اللانهاية العناصر.

أ- $\boxed{\text{المجموعة غير المنتهية.}}$

ب- المجموعة الشاملة.

ج- المجموعة الخالية.

د- المجموعة المنتهية.

اذا علمت أن :-

U = {10, 20 , 30 , 40 , 50 , 60 , 70 , 80 , 90 , 100}

A= {20 , 50 , 90 }

B= {20, 40 , 70 , 90}

حيث أن U مجموعة شاملة، فأوجد:-

$A \cap U$:-

أ- U

ب- $\boxed{A}$

ج- B

د- C

$A \cup U$:-

أ- $\boxed{U}$

ب- A

ج- B

د- C

أي من العلاقات التالية هي علاقة صحيحة :

أ- $\boxed{\bar{A} \cap A = \emptyset}$

ب- $A \cup \bar{A} = U$

ج- (أ) و (ب) معاً

د- لا شيء مما سبق

رمي حجر نرد مرة واحدة ، احسب:

أ- احتمال الحصول على رقم ٥ أو ٦.

ب- احتمال الحصول على رقم زوجي

الحل:

أ- حيث أن الحصول على رقم ٥ أو ٦ حادثتان متنافيتان ، أي أن:

A1={الحصول على الرقم ٥} ، و A2= {الحصول على الرقم ٦} فإن:

$P(A1 \cup A2)=(1/6)+(1/6)=1/3$

ب- وحيث أن الحصول على رقم زوجي يعني الحصول على رقم ٢ أو رقم ٤ أو رقم ٦ وكلها حوادث متنافي، أي أن:

A1={الحصول على الرقم ٢} ، و A2= {الحصول على الرقم ٤} ، و A3= {الحصول على الرقم ٦} فإن:

$P(A1 \cup A2 \cup A3)=(1/6)+(1/6) +(1/6) = 1/2$

لاعب شطرنج يلعب مع الحاسوب مرتين ، احتمال فوزه بالمرة الاولى 0.7 واحتمال فوزه بالمرة الثانية هو 0.6 واحتمال فوزه في المرتين هو 0.65 ، ما احتمال خسارته في المرتين؟

الحل:

بفرض أن A : حادث يمثل الربح في المرة الاولى، وB : حادث يمثل فوزه في المرة الثانية.

فإن احتمال خسارته في المرتين هو:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) =1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= 1 - [0.7 + 0.6 - 0.65] = 1 - [0.65] = 0.35$$

عند رمي قطعة نقود منتظمة خمس مرات ما احتمال ظهور صورة واحدة على الاقل؟

الحل :

$n(S)= nr = (2)^5 = 32$

لتكن A : حادث يمثل ظهور صورة واحدة على الاقل.

وليكون $\overline{A}$: حادث يمثل عدم ظهور اي صورة

فيكون: $\overline{A} = \{ TTTTT\}$

$P(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{n(S)} = \frac{1}{32}$

$P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32} P(A) = -1$

استطلع مدير شركة الموظفين من كلا الجنسين حول رغبتهم بقيام الشركة بدورة تدريبية اثناء اجازة الاسبوع فكانت النتائج كما يلي:

الجنس	يرغبون	لا يرغبون	مترددون	المجموع
ذكور	10	5	5	20
اناث	7	3	2	12
المجموع	17	8	7	32

اذا اختير احد الموظفين عشوائيا، أجب عما يلي:

1. ما احتمال أن يكون هذا الموظف ممن يرغبون بإقامة الدورة؟
2. ما احتمال أن يكون هذا الموظف ممن يرغبون بالدورة علما أنه من الذكور؟
3. ما احتمال أن يكون هذا الموظف مترددا علما انه انثى؟
4. ما احتمال ان يكون انثى اذا علمت انه ممن يرغب بإقامة الدورة؟

الحل:

الحل:

ليكن

A : حادث يمثل الموظف ممن يرغبون بالدورة.

B : حادث يمثل الموظف من الذكور.

C : حادث يمثل موظف من المترددين للدورة.

D : حادث يمثل ان الموظف انثى.

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{17}{32}$

$P(A\backslash B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{32}}{\frac{20}{32}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

$P(C\backslash D) = \frac{P(C\cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{2}{32}}{\frac{12}{32}} = \frac{2}{12}$

$P(D\backslash A) = \frac{P(D\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{32}}{\frac{12}{32}} = \frac{7}{12}$

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحاله الاجتماعيه	اعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، ثم احسب الاحتمالات التالية:

- أن يكون أعزبا
- أن يكون متزوجا
- أن يكون من القسم الأول
- أن يكون من القسم الأول أو الثاني
- أن يكون من القسم الأول وأعزب

الحل:

- نفرض أن الحادثة A أن يكون العامل أعزب أي A = {أن يكون العامل أعزب} فيكون الاحتمال المطلوب:

$P(A)= 23/50= 0.46$

- نفرض أن الحادثة B أن يكون العامل متزوج أي أن B = {أن يكون العامل متزوج} فيكون الإحتمال المطلوب:

$P(B)= 27/50= 0.54$

- نفرض أن الحادثة C أن يكون العامل من القسم الأول أي أن C = {أن يكون العامل من القسم الأول} فيكون الإحتمال المطلوب:

$P(C)= 12/50= 0.24$

- نفرض أن الحادثة D أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني أي أن D = {أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني} فيكون الاحتمال المطلوب:

$P(D)= (12+22)/50=34/50= 0.68$

- نفرض أن الحادثة E أن يكون العامل من القسم الأول و أعزب أي أن E = {أن يكون العامل من القسم الأول وأعزب} فيكون الاحتمال المطلوب:

$P(E)= 5/50= 0.1$

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الدي يعمل به:

الحاله الاجتماعيه	اعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، ثم احسب الاحتمالات التالية:

أ- احتمال أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني.
ب- احتمال أن يكون العامل متزوجا أو من القسم الأول
ت- احتمال أن يكون العامل من القسم الثالث أو أعزب

الحل:

أ- نفرض أن الحادثة A1 أن يكون العامل من القسم الأول أي أن A1 = {أن يكون العامل من القسم الأول}

$P(A1)=12/50$

نفرض أن الحادثة A2 أن يكون العامل من القسم الثاني أي أن A2 = {أن يكون العامل من القسم الثاني}

$P(A2)=22/50$

فيكون الاحتمال المطلوب:

$P(A1 \cup A2) = P(A1)+P(A2) = (12/50)+(22/50) = 34/50 = 0.68$

ب- نفرض أن الحادثة A1 أن يكون العامل متزوجا أي أن A1 = {أن يكون العامل متزوج}

$P(A1)=27/50$

نفرض أن الحادثة A2 أن يكون العامل من القسم الأول أي أن A2 = {أن يكون العامل من القسم الأول}

$P(A2)=12/50$

فيكون الاحتمال المطلوب:

$P(A1 \cup A2) = P(A1)+P(A2)-P(A1 \cap A2) = (27/50)+(12/50)-(7/50) = 32/50 = 0.64$

ت- نفرض أن الحادثة A1 أن يكون العامل من القسم الثالث أي أن A1 = {أن يكون العامل من القسم الثالث}

$P(A1)=16/50$

نفرض أن الحادثة A2 أن يكون العامل أعزب أي أن A2 = {أن يكون العامل أعزب}

$P(A2)=23/50$

فيكون الاحتمال المطلوب:

$P(A1 \cup A2) = P(A1)+P(A2)-P(A1 \cap A2) = (16/50)+(23/50)-(10/50) = 29/50 = 0.58$

إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الرياضيات 0.64 واحتمال نجاحه في مقرر الإحصاء ومقرر الرياضيات معا 0.32 فما هو احتمال نجاحه في مقرر الإحصاء؟ علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات.

الحل:

نفرض أن A1={نجاح الطالب في مقرر الإحصاء}

A2={نجاح الطالب في مقرر الرياضيات}

وبذلك يكون:

$P(A2)=0.64$

$P(A1 \cap A2)=0.32$

ويكون المطلوب في هذه المسألة هو حساب $P(A1|A2)$ وبتطبيق العلاقة :

$$P(A1|A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0.32}{0.64} = 0.5$$

إذا احتمال نجاح الطالب في مقرر الإحصاء علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات هو 0.5

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	اعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، ثم احسب الاحتمالات التالية:

أ- احسب احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج؟

ب- احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث؟

الحل:

نفرض أن A1={أن يكون العامل من القسم الأول}

A2={أن يكون العامل متزوج}

B3={أن يكون العامل من القسم الثالث}

B4={أن يكون العامل أعزب}

فيكون بالتالي:

أ- احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج هو:

احتمال أن يكون من القسم الأول ومتزوج

احتمال أن يكون متزوج

$$P(A1 | A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{7}{50}}{\frac{27}{50}} = \frac{7}{27}$$

إذا احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج هو 0.259

ب- احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث هو:

احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث

احتمال أن يكون من القسم الثالث

$$P(B1 | B2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{10}{50}}{\frac{16}{50}} = \frac{10}{16}$$

إذا احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث هو 0.625

اذا شارك اللاعب A باحتمال 0.6 واللاعب B باحتمال 0.8 وكان احتمال مشاركة اللاعب A علما بأن الطالب B قد شارك هو 0.55 . فإذا شارك الطالب A في المباراة ما احتمال عدم مشاركة اللاعب B .

الحل:

المطلوب هو حساب الاحتمال

$$P(\overline{B} \backslash A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)}$$

$$P(\overline{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B)$$

ولكن من المعطيات $P(A \backslash B) = 0.55$ منها نجد قيمة الاحتمال $P(A \cap B)$ كما يلي:

$$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.55$$

$$P(A \cap B) = 0.55 \times P(B) = (0.55)(0.8) = 0.44$$

$$P(\overline{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.44 = 0.16$$

$$P(\overline{B} \backslash A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{0.16}{0.6} \cong 0.267$$

- تقدم شخصان لنفس الاختبار. احتمال نجاح الاول 0.7 واحتمال نجاح الاخر 0.9
أ- ما احتمال نجاحهما معا؟
ب- ما احتمال نجاح احدهما على الاقل؟

الحل:
بفرض أن A : حادث يمثل نجاح الطالب الاول، و B : حادث يمثل نجاح الطالب الثاني
لان نجاح الطالبين مستقلين عن بعضهما البعض فان:

a) $P(A\cap B) = P(A)\,P(B) = (0.7)\,(0.9) = (0.63)$

b) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
$= 0.7 + 0.9 - 0.63 = 0.97$

صندوق يحتوي على 10 كرات منها 4 كرات حمراء و 6 كرات صفراء. سحبت 3 كرات بشكل عشوائي على التوالي بدون ارجاع. أحسب
أ- احتمال ان تكون كرتان حمراء وكرة صفراء
ب- احتمال ان تكون الكرات الثلاث صفراء

الحل:
بفرض أن A : حادث يمثل كرتان حمراء وكرة صفراء، وB : حادث يمثل الكرات الثلاث حمراء

a) $P(A) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{36}{120}$

b) $P(B) = \dfrac{\binom{4}{3}\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{4}{120}$

اذا اعطيت قيم الاحتمالات التالية:-
$P(A) = 0.7, \quad P(B) = 0.3 \quad P(A\cup B) = 0.85$

أوجد ما يلي:
1. $P(A\cap B)$

الحل:
1. $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
$0.85 = 0.7 + 0.3 - P(A\cap B)$
$P(A\cap B) = 0.7 + 0.3 - 0.85 = 0.15$

مصنع يقوم بإنتاج سلعة معينة به ثلاث آلات، تنتج الآلة الأولى 20% من إجمالي إنتاج السلعة وتنتج الآلة الثانية نسبة 35% والثالثة بنسبة 45% ، فإذا كانت نسبة الإنتاج المعيب في الثلاث آلات على الترتيب هو 2% و 2.5% و 3% ، سحبت وحدة عشوائيا من إنتاج المصنع فوجد أنها معيبة، احسب الاحتمالات التالية:
أ- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الأولى؟
ب- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الثانية؟

الحل:
نفرض أن
A1={إنتاج الآلة الأولى} $P(A1)=0.2$
A2={إنتاج الآلة الثانية} $P(A2)=0.35$
A3={إنتاج الآلة الثالثة} $P(A3)=0.45$
B= {إنتاج سلعة معيبة}
فيكون:

$P(B\,|\,A1)=0.02$

P(B|A2)=0.025

P(B|A3)=0.03

تكون السلعة من إنتاج الآلة الأولى إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.2\times0.02}{(0.2\times0.02)+(0.35\times0.025)+(0.45\times0.03)}=0.152$$

واحتمال أن تكون السلعة من إنتاج الآلة الثانية إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.35\times0.025}{(0.2\times0.02)+(0.35\times0.025)+(0.45\times0.03)}=0.333$$

مستشفى به أربعة أقسام، نسب عمال النظافة في هذه الأقسام هي 30% ، 40% ، 20% ، 10% على التوالي، إذا كانت نسب العمال المدخنين بهذه الأقسام هي 15% ، 18% ، 12% ، 9% على التوالي، اختير عامل عشوائيا فوجد أنه مدخن ، احسب الاحتمالات التالية:

أ- أن يكون العامل من القسم الأول؟

ب- أن يكون العامل من القسم الثاني؟

ت- أن لا يكون العامل من القسم الأول؟

الحل:

نفرض أن

A1={أن يكون العامل من القسم الأول} P(B|A1)=0.15 P(A1)=0.3

A2={أن يكون العامل من القسم الثاني} P(B|A2)=0.18 P(A2)=0.4

A3={أن يكون العامل من القسم الثالث} P(B|A3)=0.12 P(A3)=0.2

A4={أن يكون العامل من القسم الرابع} P(B|A4)=0.09 P(A4)=0.1

احتمال أن يكون العامل من القسم الأول إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.3\times0.15}{(0.3\times0.15)+(0.4\times0.18)+(0.2\times0.12)+(0.1\times0.09)}=0.3$$

واحتمال أن يكون العامل من القسم الثاني إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.4\times0.18}{(0.3\times0.15)+(0.4\times0.18)+(0.2\times0.12)+(0.1\times0.09)}=0.48$$

واحتمال أن لا يكون العامل من القسم الأول إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_1^c|B)=1-0.3=0.7$$

تمارين للمراجعة

(١) أحد المصانع يمتلك ثلاث آلات (A , B , C)، فإذا علمت أن الآلة A تنتج 40% من انتاج المصنع والآلة B تنتج 35% من الانتاج، أما الآلة C فتنتج 25% من الانتاج ، وكان نسبة الانتاج المعيب من الآلة A هو 5%، والانتاج المعيب من الآلة B هو 4%، أما الانتاج المعيب من الآلة C فقد بلغ 3%، فإن احتمال وجود وحدة معيبة عند سحب وحدة واحدة من انتاج هذه المصنع تساوي :-

أ- $0.40 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04 + 0.25 \times 0.03$
ب- $0.05 + 0.04 + 0.03$
ج- $0.40 + 0.35 + 0.25$
د- $0.40 \times 0.95 + 0.35 \times 0.96 + 0.25 \times 0.97$

(٢) أحد المصانع يمتلك ثلاث آلات (A , B , C)، فإذا علمت أن الآلة A تنتج 40% من انتاج المصنع والآلة B تنتج 35% من الانتاج، أما الآلة C فتنتج 25% من الانتاج ، وكان نسبة الانتاج المعيب من الآلة A هو 5%، والانتاج المعيب من الآلة B هو 4%، أما الانتاج المعيب من الآلة C فقد بلغ 3%، فإن احتمال وجود وحدة معيبة من انتاج الآلة الأولى عند سحب وحدة واحدة من انتاج هذه المصنع تساوي :-

أ- $\frac{0.40\times0.05}{0.40\times0.05+0.35\times0.04+0.25\times0.03}$
ب- $\frac{0.35\times0.04}{0.40\times0.05+0.35\times0.04+0.25\times0.03}$
ج- $\frac{0.25\times0.03}{0.40\times0.05+0.35\times0.04+0.25\times0.03}$
د- 0.05

(٣) أحد المصانع يمتلك ثلاث آلات (A , B , C)، فإذا علمت أن الآلة A تنتج 40% من انتاج المصنع والآلة B تنتج 35% من الانتاج، أما الآلة C فتنتج 25% من الانتاج ، وكان نسبة الانتاج المعيب من الآلة A هو 5%، والانتاج المعيب من الآلة B هو 4%، أما الانتاج المعيب من الآلة C فقد بلغ 3%، فإن احتمال وجود وحدة معيبة من انتاج الآلة الثانية عند سحب وحدة واحدة من انتاج هذه المصنع تساوي :-

أ- $\frac{0.35\times0.04}{0.40\times0.05+0.35\times0.04+0.25\times0.03}$
ب- $\frac{0.40\times0.05}{0.40\times0.05+0.35\times0.04+0.25\times0.03}$
ج- $\frac{0.25\times0.03}{0.40\times0.05+0.35\times0.04+0.25\times0.03}$
د- 0.05

(٤) أحد الكليات بها ثلاث أقسام ، قسم المحاسبة وبه 50% من الطلاب، وقسم الأدارة وبه 40% من الطلاب، وقسم المالية وبه 10% من الطلاب، فإذا علمت أن احتمال الرسوب بقسم المحاسبة هو 10%، واحتمال الرسوب بقسم الادارة هو 15%، واحتمال الرسوب بقسم المالية 5%، فإذا تم اختيار احد طلاب هذه الكلية عشوائياً فإن احتمال أن يكون الطالب راسب تساوي :-

أ- $0.50 \times 0.10 + 0.40 \times 0.15 + 0.10 \times 0.05$
ب- $0.10 + 0.15 + 0.05$
ج- $0.50 + 0.40 + 0.10$
د- $0.50 \times 0.90 + 0.40 \times 0.85 + 0.10 \times 0.95$

(٥) إذا اعطيت قيم الاحتمالات التالية :-

$P(A) = 0.65 \qquad P(B) = 0.60 \qquad P(A \cap B) = 0.48$

فإن الاحتمال $P(A \cup B)$ يساوي:-

أ- 0.77
ب- 0.35
ج- 0.4
د- 0.39

(٦) إذا اعطيت قيم الاحتمالات التالية :-

$P(A) = 0.75 \qquad P(B) = 0.58 \qquad P(A \cup B) = 0.54$

فإن الاحتمال $P(A \cap B)$ يساوي:-

أ- 0.79
ب- 0.25
ج- 0.42
د- 0.435

(٧) صندوق يحتوي على 15 كرة منها 10 كرات حمراء و5 كرات بيضاء ، سحبت أربع كرات بشكل عشوائي على التوالي بدون ارجاع ، فإن احتمال أن تكون كرتان حمراء وكرتان بيضاء تساوي :-

أ- $\frac{\binom{5}{2}\binom{10}{2}}{\binom{15}{4}}$
ب- $\frac{\binom{5}{2}\binom{15}{2}}{\binom{10}{4}}$
ج- $\frac{10}{15}$
د- $\binom{5}{2}\binom{10}{2}$

(٨) صندوق يحتوي على 15 كرة منها 10 كرات حمراء و5 كرات بيضاء ، سحبت أربع كرات بشكل عشوائي على التوالي بدون ارجاع ، فإن احتمال أن تكون كرتان حمراء وكرتان بيضاء تساوي :-

أ- 0.32967
ب- 0.032967
ج- 0.007326
د- 450

(٩) إذا كان احتمال النجاح في اختبار الاحصاء 0.85 واحتمال النجاح في اختبار الرياضيات 0.75، واحتمال النجاح في المقررين معاً هو 0.7، فإن احتمال النجاح في أحد المقررين على الاقل تساوي :-

أ- 0.9
ب- 0.6375
ج- 0.3
د- 0.35

(١٠) تقدم شخصان لنفس الاختبار ، فإذن كان احتمال نجاح الأول 0.8 واحتمال نجاح الثاني 0.7، فإن احتمال نجاحهما معاً يساوي:-

أ- 0.56
ب- 0.94
ج- 1.5
د- 0.06

(١١) اذا كان احتمال النجاح في مقرر مبادئ الاحصاء 0.7 واحتمال النجاح في مقرر الاحصاء للادارة 0.85 ، واحتمال النجاح في المقررين معاً 0.6 ، فإن احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء بالادارة بشرط ان يكون قد نجح في مقرر مبادئ الاحصاء يساوي:-

أ- 0.857
ب- 0.706
ج- 0.824
د- 0.85

(١٢) تقدم شخصان لنفس الاختبار ، فإذن كان احتمال نجاح الأول 0.8 واحتمال نجاح الثاني 0.7، فإن احتمال رسوبهما معاً يساوي:-

أ- 0.06
ب- 0.56
ج- 0.94
د- 1.5

(١٣) الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحاله الاجتماعيه	اعزب	متزوج	المجموع
القسم الاول	10	14	24
القسم الثاني	16	28	44
القسم الثالث	20	12	32
المجموع	46	54	100

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، فإن احتمال أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني يساوي:-

أ- 0.68
ب- 0.24
ج- 0.44
د- 0.1056

(١٤) الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحاله الاجتماعيه	اعزب	متزوج	المجموع
القسم الاول	10	14	24
القسم الثاني	16	28	44
القسم الثالث	20	12	32
المجموع	46	54	100

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، فإن احتمال أن يكون العامل متزوجا أو من القسم الأول يساوي:-

أ- 0.64
ب- 0.54
ج- 0.24
د- 0.78

(١٥) تم رمي قطعة نقود خمس مرات، فإن احتمال ظهور صورة واحدة على الاقل يساوي:-

أ- 0.96875
ب- 0.03125
ج- 0.5
د- 32

(١٦) اذا كان احتمال نجاح الطالب في اختبار الاحصاء هو 0.8 واحتمال نجاحه في الرياضيات 0.7 واحتمال نجاحه في المقررين 0.75، فإن احتمال رسوبة في المقررين يساوي:-

أ- 0.25
ب- 0.75
ج- 0.25
د- 0.56

(١٧) رمي حجر نرد مرة واحد ، فإن احتمال الحصول على الرقم 4 أو 6 على الوجه العلوي يساوي:-

أ- 0.333
ب- 0.167
ج- 0.0278
د- 0.5

(١٨) رمي حجر نرد مرة واحد ، فإن احتمل الحصول على رقم زوجي على الوجه العلوي يساوي:-

أ- 0.5
ب- 0.00463
ج- 0.0278
د- 0.333

المحاضرة السابعة – الفصل الثالث – المتغيرات العشوائية

مفهوم المتغير العشوائي:-

المتغير العشوائي هو الذي يأخذ قيما حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة، ومن ثم مجال هذا المتغير يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين.

العشوائية تعني في الاحتمالات عدم المعرفة المسبقة بنتيجة التجربة.

ولتوضيح مفهوم المتغير العشوائي في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية متزنة ثلاث مرات، حيث يمثل المتغير العشوائي X عدد مرات ظهور الصورة.

قيمة المتغير X	3	2	2	1	2	1	1	0
عناصر فضاء العينة	HHH	HHT	HTH	HTT	THH	THT	TTH	TTT

مثال:-

اذا قمنا برمي حجري نرد متزن مرة واحدة، واردنا رؤية القيم الممكنة الحدوث واحتمالاتها للمتغير العشوائي الذي يمثل القيمة المطلقة للفرق بين القراءتين . يكون هناك 36 ناتج محتمل عند اجراء هذه التجربة حيث كل حجر يحتوي على 6 اوجه ، وهنالك حجران. الجدول التالي يمثل جميع النتائج الممكنة الحدوث .

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

التوزيعات الاحتمالية Probability Distribution :-

نخلص من الامثلة السابقة أن المتغير العشوائي يمثل حجر الزاوية في معظم النظريات الاحصائية وفيه يتم تحديد العلاقة بين قيم المتغير العشوائي و الاحتمالات المرافقة لها بواسطة التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية.

كما يقوم المتغير العشوائي بتوفير الاحتمالات المرافقة للقيم التي يمكن ان يأخذها المتغير العشوائي أو الفترات التي يمكن ان يقع فيها.

كذلك وبحسب طبيعة المسألة فإن طبيعة المتغير العشوائي نفسه تقسم الى نوعين من المتغيرات العشوائية التي تتحكم في التوزيعات الاحتمالية :

١- المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة):

Discrete Random Variables

إذا كانت قيم المتغير العشوائي تأخذ قيم صحيحة وليست كسرية نقول أن المتغير منفصلاً (discrete).

ففي مثالنا عن حجر النرد (زهرة النرد) حيث مجال تغير المتغير العشوائي هو مجموعة الأعداد الطبيعية (الصحيحة الموجبة) من 1 إلى 6 نجد أن هذا المتغير العشوائي متقطع لأنه لا يمكن أن يأخذ جميع القيم المحصورة ضمن حدي المجال مثل القيم 1.5 أو 5.25أو ....

٢- المتغيرات العشوائية المستمرة (المتصلة): Continuous Random Variables

هي المتغيرات التي يمكن أن تأخذ قيماً كسرية.

فمثلا المتغير العشوائي الممثل للمسافة التي يقطعها السهم ما بين 5 الى 50متر هو متغير عشوائي متصل ، لأنه يمكن أن يأخذ اية قيمة واقعة بين 0 و 50 متر ان كانت صحيحة أو كسرية.

سنرمز فيما يلي بحرف كبير للمتغير العشوائي مثل X , Y كما سنرمز بحروف صغيرة مثل x , y لقيم هذا المتغير العشوائي.

وبالتالي يمكن تعريف المتغير العشوائي المتصل بأنه هو ذلك المتغير الذي لا يمكن عد عناصره. وعلى الرغم من ان المتغير العشوائي المنفصل قد يحدث في كثير من التجارب المختلفة ، حسب طبيعة التجربة في الادارة و الاقتصاد و العلوم التطبيقية ، الا انه يرتبط بالعد ويأخذ قيمًا صحيحة موجبة.

فمثلا عدد العملاء لشركة معينة يعتبر متغير عشوائي منفصل ، وكذلك عدد الحوادث المرورية التي يتوقع حدوثها في الاسبوع القادم في احدى المدن ، عدد الوحدات المعيبة و المنتجة بواسطة اله معينة يعتبر متغير عشوائي منفصل .

مفهوم التوزيع الاحتمالي:-

إذا قمنا برمي قطعتي نقود متجانستين وبدأنا بمراقبة ظهور الصورة، فإذا رمزنا لظهور الصورة بالرمز H، والحصول على الكتابة بالرمز T، فإن المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور الصورة، يمكننا تسجيل الحوادث الأربعة الممكنة في الجدول التالي:

عدد الصور (X)	القطعة الثانية	القطعة الأولى
0	T	T
1	H	T
2	T	H
3	H	H

نظرًا لأن القطعتين النقديتين مستقلتان عن بعضهما (حوادث مستقلة) وبما أن احتمال الحصول على H هو 0.5 واحتمال الحصول على T هو 0.5، فإن احتمال الحصول على حادث معين من القطعتين ينتج عن ضرب الاحتمالات ولدينا:

- احتمال عدم الحصول على صورة، $x = 0$ هو $0.25 = (0.5)(0.5)$ أي هو احتمال الحصول على صفر صورة من القطعتين.
- احتمال الحصول على صورة 1 = x هو $0.25 = (0.5)(0.5)$ أي هو احتمال الحصول على صورة واحدة فقط من القطعتين (من القطعة الأولى أو القطعة الثانية).
- احتمال الحصول على صورتين $x = 2$ هو $0.25 = (0.5)(0.5)$ أي هو احتمال الحصول على صورتين من القطعتين .

ويمكن تشكيل الجدول التالي والذي يسمى بجدول التوزيع الاحتمالي:

P(x)	X	I
0.25	0	1
0.5	1	2
0.25	3	3
1		∑

مثال:-

إذا كان عدد أيام العمل في شركة ما في السنة 250 يومًا حيث يتم تسجيل الغائبين كل يوم، وكانت التجربة العشوائية هي تسجيل أيام الغياب. وفي هذه الحالة يكون المتغير العشوائي $X = \{0, 1, 2, \ldots, 250\}$ مثال لمتغير عشوائي منفصل محدود أو منتهي.

مثال:-

في تجربة رمي قطعة نقد متزنة مرتين، وكان X متغيرًا عشوائيًا يمثل عدد مرات ظهور الصورة على الوجه العلوي للقطعة. أحسب الاحتمالات التالية:

$P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$

$P(X \geq 1)$, $P(X \leq 1)$, $P(0 < X < 2)$

الحل:

كون أن قطعة النقود متزنة فإن:

$P(H) = P(T) = 0.5$

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

بما أن X يمثل عدد مرات ظهور الصورة فإن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X هي {0, 1, 2} حيث:

$\{X = 0\} = \{TT\}, \quad \{x = 1\} = \{HT, TH\}, \quad \{x = 2\} = \{HH\}$

وباستخدام الاستقلال للحوادث فإن:

$P(x = 0) = P(\{TT\}) = P(\{T\})P(\{T\}) = (0.5)(0.5) = 0.25$

$P(x = 1) = P(\{HT, TH\}) = P(\{HT\}) + P(\{TH\}) = P(\{H\})P(\{T\}) + P(\{T\})P(\{H\}) = (0.5)(0.5) + (0.5)(0.5) = 0.25 + 0.25 = 0.5$

$P(x = 2) = P(\{HH\}) = P(\{H\})P(\{H\}) = (0.5)(0.5) = 0.25$

$P(x \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0.5 + 0.25 = 0.75$

$P(x \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.25 + 0.5 = 0.75$

$P(0 < x < 1) = P(X = 1) = 0.5$

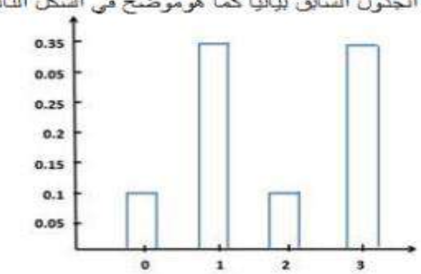
مثال:-

إذا ألقيت قطعة نقود متزنة ثلاث مرات، أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد مرات ظهور الصورة على الوجه العلوي للقطعة.

الحل:

X	0	1	2	3	المجموع
P(X) = x	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

ويمكن تمثيل بيانات الجدول السابق بيانيًا كما هوموضح في الشكل التالي:



مثال:-

صندوق يحتوي على 10 كرات منها 4 كرات حمراء و 6 كرات سوداء، سحب من الصندوق كرتان على التوالي وبدون ارجاع. وكان المتغير العشوائي x يمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة. أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

الحل:

نرمز للكرة الحمراء بالرمز R وللكرة السوداء بالرمز B، فيكون فضاء العينة لهذه التجربة كما يلي:

$S = \{RR, RB, BR, BB\}$

وبذلك تكون قيم المتغير العشوائي X هي: 0, 1, 2 وعليه يحسب احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي كما يلي:

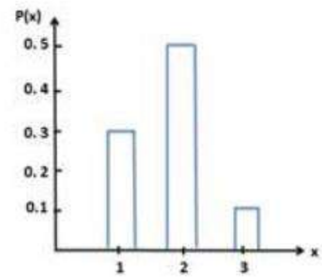
باستخدام استقلال الحوادث والحادث المشروط نجد أن:

- $P(X=0)=P(\{B1B2\})=P(B1)P(B2\backslash B1)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$
- $P(X = 1) = P(\{R1\ B2,\ B1\ R2\}) = P(R1)P(B2\backslash R1) + P(B1)P(R2\backslash B1) = \frac{4}{10}\times\frac{6}{9}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{48}{90}=\frac{8}{15}$
- $P(X) = 2 = P(\{R1\ R2\}) = P(R1)P(R2\backslash R1) = \frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$

وبالتالي فإن التوزيع الاحتمالي لعدد الكرات الحمراء يكون

X	0	1	2	المجموع
P(X = x)	$\frac{5}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

ويمثل بيانيًا كالتالي:



التوقع الرياضي Mathematical Expectation :-

اذا كان X متغيرا عشوائيا منفصلاً ،وكان Y = H(x) دالة في X فان التوقع الرياضي لـ H(x) يعرف كالتالي:

$E\ [H(x)] = \sum H(x)P(X=x)$

بينما في حالة كان X متغيرا عشوائيا متصلا فان التوقع للدالة H(x) هو:-

$E\ [H(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} H\ (x)\ .\ f(x)\ \ .\ dx$

كما ذكرنا سابقا، عندما يأخذ المتغير العشوائي قيما محددة، فان دالة الاحتمال لهذا المتغير تعطي مباشرة الاحتمالات المرافقة للقيم المختلفة التي يأخذها المتغير العشوائي المنفصل. و تأخذ أهمية التوقع الرياضي في أنها تعطي تصورا عن شكل المتغير العشوائي أو توزيعه. كما تأخذ المقاييس الاحصائية الأخرى كالتباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X أهميتها أيضاً.

لتقريب مفهوم التوقع الرياضي نفرض أن ثلاث قطع نقود رميت عشرة مرات، فاذا كان عدم ظهور H قد حدث مرتين و ظهور H مرة واحدة قد حدث 3 مرات، ظهور H مرتين قد حدث 3 مرات و ظهور H قد حدث 3 مرات فما معدّل H في الرمية الواحدة لقطع النقود الثلاثة؟

$$\frac{2x3 + 3x2 + 3x1 + 0x2}{10} = \frac{6 + 6 + 3 + 0}{10} = 1.5$$

هذا هو معدل و ليس من الضروري أن يكون حادثا ممكنا، أي أنه لا يوجد 1.5 في رمي قطع النقود الثلاث مرة واحدة.

مثال:-

يؤخر محمد مبلغ 2 مليون ريالا يريد استثمارها في شراء أسهم وسنوات، فاذا كانت X تشير الى جملة الاستثمار وكان توزيع X الاحتمالي هو:

X	P(x)	xP(x)
مليون ريال	0.2	
2 مليون ريال	0.3	
3 مليون ريال	0.2	
4 مليون ريال	0.2	
5 مليون ريال	0.1	
المجموع =15 مليون ريال	1.00	

واذا قرر محمد الدخول في هذا النوع من الاستثمار فماذا توقع أن يحصل عليه؟

الحل:

X	P(x)	xP(x)
مليون ريال	0.2	0.2
2 مليون ريال	0.3	0.6
3 مليون ريال	0.2	0.6
4 مليون ريال	0.2	0.8
5 مليون ريال	0.1	0.5
المجموع =15 مليون ريال	1.00	2.7

$$\mu = \sum x\,P(x) = 2.7$$

مثال:-

اذا كان التوزيع الاحتمالي للخسارة المالية الناجمة من حوادث السيارات هو:

الخسارة المالية بالريال	P(x)	xP(x)
100	0.40	
500	0.20	
800	0.15	
1500	0.10	
3000	0.09	
10000	0.06	
المجموع = 15900	1.00	

أوجد القيمة المتوقعة للخسارة السنوية الناجمة عن حادث سيارة.

الحل

الخسارة المالية بالريال	P(x)	xP(x)
100	0.40	40
500	0.20	100
800	0.15	120
1500	0.10	150
3000	0.09	270
10000	0.06	600
المجموع = 15900	1.00	1280

$$\mu = E(X) = \sum [x\,P(X = x)]$$

$$\mu = 1280$$

الخسارة المتوقعة الناجمة عن حادث سيارة في السنة = 1280 ريالا

المحاضرة الثامنة

1- تابع الفصل الثالث – المتغيرات العشوائية
2- الفصل الرابع – التوزيعات الاحتمالية

التباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي:-

يمكننا تعريف متوسط وتباين التوزيع كالتالي:-

$$\sigma^2 = \sum[x^2P(x)] - \mu^2$$

وحيث أن الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين فان الانحراف المعياري يكون:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum[x^2P(x)] - \mu^2}$$

مثال:-

يؤخر محمد مبلغ 2 مليون ريالا يريد استثمارها في شراء أسهم وسنوات، فاذا كانت x تشير الى جملة الاستثمار وكان توزيع X الاحتمالي هو:

X	P(x)	xP(x)
مليون ريال	0.2	
2 مليون ريال	0.3	
3 مليون ريال	0.2	
4 مليون ريال	0.2	
5 مليون ريال	0.1	
المجموع =15 مليون ريال	1.00	

واذا قرر محمد الدخول في هذا النوع من الاستثمار
أوجد تباين x والانحراف المعياري له

x	P(x)	xP(x)	x - μ	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2 P(x)$
1	0.2	0.2	-1.7	2.89	0.578
2	0.3	0.6	-0.7	0.49	0.147
3	0.2	0.6	0.3	0.09	0.018
4	0.2	0.8	1.3	1.69	0.338
5	0.1	0.5	2.3	5.29	0.529
المجموع	1.0	2.7			1.61

وبالتالي نجد التباين حيث:

$$\sigma^2 = \sum(x-\mu)^2 P(x) = 1.61$$

$$\sigma = \sqrt{1.61} \approx 1.269$$

مثال:-

أوجد تباين المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة عند القاء ثلاث قطع نقود معدنية مرة واحدة.

الحل:

يبين الجدول التالي التوزيع الاحتمالي للمتغير X، حساب التباين للمتغير X الذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة عند القاء ثلاث قطع نقود معدنية متزنة مرة واحدة.

x	x^2	P(x)	xP(x)	x^2 P(x)
0	0	1/8	0	0
1	1	3/8	3/8	3/8
2	4	3/8	6/8	12/8
3	9	1/8	3/8	9/8
المجموع			$\frac{12}{8}$=1.5	3

$$E(x^2) = \sum x^2 P(x) = \frac{24}{8} = 3$$

$$\sigma^2 = \sum [x^2P(x)] - \mu^2$$

$$\sigma^2 = 3 - (1.5)^2 = 3 - 2.25 = 0.75$$

لذا فان الانحراف المعياري هو :

$$\sigma = \sqrt{0.75} = 0.86603$$

اذا كانت x ترمز للقيم العشرة: 9 ,8 ,7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0 وكان احتمال الحصول على أي قيمة منها يساوي 0.1 أوجد تباين المتغير العشوائي.

x	x^2	P(x)	xP(x)	x^2P(x)
0	0	0.1	0.0	0
1	1	0.1	0.1	0.1
2	4	0.1	0.2	0.4
3	9	0.1	0.3	0.9
4	16	0.1	0.4	1.6
5	25	0.1	0.5	2.5
6	36	0.1	0.6	3.6
7	49	0.1	0.7	4.9
8	64	0.1	0.8	6.4
9	81	0.1	0.9	8.1
$E(x) = \sum = 4.5$ $E(x^2) = \sum x^2P(x) = 28.5$				

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$$

$$\sigma^2 = 28.5 - (4.5)^2 = 28.5 - 20.25 = 8.25$$

$$\sigma^2 = \sqrt{8.25} \approx 2.87$$

مثال:-

عند رمي قطعة نقود مرة واحدة. أوجد كلا من التوزيع الاحتمالي والتوقع والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي x اذا كان متوقعا أن يأخذ المتغير x القيمة (1) للدلالة على ظهور الصورة وأن يأخذ المتغير العشوائي x القيمة (0) للدلالة على عدم ظهور الصورة.

الحل:

القطعة متزنة فان احتمال أن تظهر صورة من رمية واحدة يساوي احتمال أن لا تظهر صورة، وبالتالي فان التوزيع x الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل والذي يمثل عدد الصور في رمية واحدة كما بالجدول التالي:

X=x	0	1	المجموع
P(X=x)	0.5	0.5	1

التوقع:

$$E(x) = \mu = \sum_{x=0}^{1} xP(x) = 0\,.\,(0.5) + 1\,(0.5) = 0.5$$

التباين :

$$\sum_{x=0}^{1} x^2 P(x) - \mu^2 = [\,0^2(0.5) + 1^2(0.5) - (0.5)^2 = 0.5 - 0.25 = 0.25$$

الانحراف :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.25} = 0.5$$

٢- الفصل الرابع
التوزيعات الاحتمالية

مقدمة:-

يعتبر الوصول إلى شكل التوزيع الاحتمالي الذى يتحكم فى ظاهره معينه سواء من خلال الطرق التجريبية– مثل فرض توزيع معين واختبار جودة توفيقه – أو من خلال الطرق الرياضية– كما هو الحال عند استخدام طريقة بيرسون لتحديد التوزيع الاحتمالي الأمثل -من الأمور ذات الأهمية بمكان فهو يساعد على وصف الظاهرة والتعرف على خصائصها والتنبؤ بما سيحدث لها في المستقبل. وتنقسم التوزيعات الاحتمالية حسب طبيعة المتغير العشوائي محل الدراسة إلى:-

١- التوزيعات الاحتمالية المتقطعة أو المنفصلة:-

ويمكن تطبيق دوال كثافة الاحتمال الخاصة بهذه التوزيعات على المتغيرات العشوائية التي لا تأخذ قيماً كسريه، وتعتبر التوزيعات الاحتمالية الآتية من أشهر التوزيعات المتقطعة Discrete Distributions:-

- **توزيع ذو الحدين .**
- **توزيع بواسون .**

١-١- توزيع ذو الحدين

يستخدم هذا التوزيع في الحالات التي يكون للظاهرة محل الدراسة نتيجتان فقط متنافيتان، النتيجة محل الاهتمام وتسمى بحالة النجاح، والأخرى تسمى بحالة الفشل، ومن أمثلة ذلك:

- عند إعطاء مريض نوع معين من الأدوية، لها نتيجتان: (استجابة للدواء، أو عدم استجابة)
- عند فحص عبوة بداخلها نوع معين من الفاكهة، لها نتيجتان (الوحدة إما أن تكون سليمة، أو تكون معيبة)
- عند إلقاء قطعة عملة، لها نتيجتان (ظهور الوجه الذي يحمل الصورة، أو الوجه الذي يحمل الكتابة)
- نتيجة الطالب في الاختبار (نجاح، رسوب)
- استخدام المزارع لبرنامج معين في الزراعة (يستخدم، أو لا يستخدم)

إذا كررت محاولة من المرات، بحيث أن كل محاولة لها نتيجتان فقط متنافيتان هما:

- النتيجة محل الاهتمام " حالة نجاح " وتتم باحتمال ثابت في كل محاولة هو
- النتيجة الأخرى " حالة فشل " وتتم باحتمال ثابت أيضا هو

وبافتراض أن هذه المحاولات مستقلة، بمعنى أن نتيجة كل محاولة ليس لها علاقة بنتيجة المحاولة الأخرى، وإذا كان المتغير العشوائي x يعبر عن عدد حالات النجاح "عدد النتائج محل الاهتمام" في الـ n محاولة، فإن مدى المتغير العشوائي x والذي يعبر عن عدد حالات النجاح هو: $X:\{x=0,1,2,\dots n\}$

إذا فتوزيع ذو الحدين هو أحد التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، ويستخدم لإيجاد احتمال وقوع حدث معين (نجاح) عدداً من المرات مقداره x من بين n من المحاولات لنفس التجربة (ونرمز لهذا الاحتمال بالرمز P(X) وذلك عندما تتحقق الشروط التالية :

- هناك ناتجان ممكنان فقط ومتنافيان لكل محاولة .
- المحاولات وعددها n مستقلة عن بعضها البعض .
- احتمال وقوع الحدث المعين في كل محاولة (النجاح) P ثابت ولا يتغير من محاولة لأخرى .

وبالتالي يمكن حساب الاحتمال من خلال المعادلة التالية :

$$P(X)=\frac{n!}{X!(n-X)!}P^{x}(1-P)^{n-x}$$

حيث n! (وتقرأ " مضروب n ") = n. (n-1). (n-2)...3.2.1 .

ويكون متوسط توزيع ذي الحدين $\mu=np$

وانحراف المعياري $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$

مثال:-

القيت قطعة نقود متزنة 3 مرات أوجد :

1-الاقتران الاحتمالي للحصول على الصورة فيها.

2- احتمال الحصول على صورة واحدة فقط .

3-احتمال عدم الحصول على اية صورة .

4-احتمال الحصول ثلاث صور .

5-احتمال الحصول على صورتين فقط .

الحل:

ان هذه التجربة تتبع ذات الحدين

ويكون فيها $n=3$ ، $p=\frac{1}{2}$ ، $q=\frac{1}{2}$

p: احتمال النجاح وهو ظهور الصورة.

: احتمال الحصول على الصورة في المحاولة الواحدة ، "بيرونولي " $P=\frac{1}{2}$

احتمال الفشل وهو ظهور الكتابة $q = (1-p) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

عدد النجاحات في المحاولات هو x.

عدد مرات الحصول على الصور في المحاولات الثلاث.

1-الاقتران الاحتمالي للحصول على الصور هو :

$P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x} \quad , \quad x=0,1,2,\dots,n$

$P(X=x)=\binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x} \quad , \quad x=0,1,2,3$

2-احتمال الحصول على صورة واحدة فقط :

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} (\tfrac{1}{2})^1 (\tfrac{1}{2})^{3-1} = 3(\tfrac{1}{2}) (\tfrac{1}{2})^2 = 3(\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{3}{8}$$

3-احتمال عدم احصول على اية صورة :

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} (\tfrac{1}{2})^0 (\tfrac{1}{2})^{3-0} = (\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{1}{8}$$

1-احتمال الحصول على 3 صورة :

$$P(X = 3) = \binom{3}{3} (\tfrac{1}{2})^3 (\tfrac{1}{2})^{3-3} = (\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{1}{8}$$

2- احتمال الحصول على صورتين :

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} (\tfrac{1}{2})^2 (\tfrac{1}{2})^{3-2} = 3\ (\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{3}{8}$$

مثال:

رمي حجر نرد منتظم 6 مرات اوجد :

1-الاقتران الاحتمالي لعدد ظهور الوجه 2

2-احتمال عدم ظهور الوجه 2.

3-احتمال الحصول على الوجه 2 ثلاث مرات .

4- احتمال الحصول على الوجه 2 مرتين على الاكثر .

5-احتمال الحصول على الوجه 2 ثلاث مرات على الاكثر .

الحل :

ان هذه التجربة تتبع توزيع ذات الحدين حيث ان $n=6$

P هو احتمال الحصول على الوجه 2 في المحاولة الواحدة

اذن $p=\frac{1}{6}$

q = احتمال عدم الحصول على الوجه2 في المحاولة الواحدة

$q = 1 - p = 1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

X: عدد مرات الحصول على الوجه 2 في المحاولات الست (6)

١ ـ الاقتران الاحتمالي لعدد ظهور الوجه 2 هو :

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$= \binom{6}{x} \left(\tfrac{1}{6}\right)^x \left(\tfrac{5}{6}\right)^{6-x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \dots, 6$$

2 ـ احتمال عدم الحصول على الوجه 2 :

$$P(X=0) = \binom{6}{0} \left(\tfrac{1}{6}\right)^0 \left(\tfrac{5}{6}\right)^{6-0} = \left(\tfrac{5}{6}\right)^6$$

3ـ احتمال الحصول على الوجه 2 ثلاث مرات :

$$P(X=3) = \binom{6}{3} \left(\tfrac{1}{6}\right)^3 \left(\tfrac{5}{6}\right)^{6-3} = 20 \left(\tfrac{1}{6}\right)^3 \left(\tfrac{5}{6}\right)^3 = 0.0535833$$

4ـ احتمال الحصول على الوجه 2 مرتين على الاكثر:

$$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$P(X=0) = \binom{6}{0} \left(\tfrac{1}{6}\right)^0 \left(\tfrac{5}{6}\right)^{6-0} = \left(\tfrac{5}{6}\right)^6$$

$$P(X=1) = \binom{6}{1} \left(\tfrac{1}{6}\right)^1 \left(\tfrac{5}{6}\right)^{6-1} = \left(\tfrac{5}{6}\right)^5$$

$$P(X=2) = \binom{6}{2} \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \left(\tfrac{5}{6}\right)^{6-2} = \frac{15}{36} \left(\tfrac{5}{6}\right)^4$$

$$P(X \le 2) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^6 + \left(\tfrac{5}{6}\right)^5 + \frac{15}{36} \left(\tfrac{5}{6}\right)^4 = 0.9377141$$

الوسط الحسابي والتباين لذى الحدين :-

الوسط الحسابي :-

$$E(X) = np$$

أما التباين فيساوي:-

$$\sigma_x^2 = nPq$$

مثال:

اذا كانت xتمثل عدد الصور التي تظهر عند القاء اربع قطع نقود معدنية متزنة . اوجد الوسط الحسابي والتباين باستخدام المعادلات؟

الحل:

في هذا المثال نجد ان $n=4$, $p=0.5$, $q=0.5$وبالتالي فان الوسط الحسابي هو :

$E(x) = np = 4 \times 0.5 = 2$

$\sigma^2 = npq = 4 \times (0.5)\ (0.5) =$

مثال:

اذا كانتx تمثل عدد الصور التي تظهر عند القاء اربع قطع نقود معدنية متزنة اوجد الاحتمالات التاليه لتوزيع x:

1-احتمال ظهور الصورة على قطعة واحدة فقط .

2-احتمال ظهور الصورة على قطعتين فقط .

3-احتمال ظهور الصورة على ثلاث قطع فقط .

4-احتمال ظهور الصورة على القطع الاربع .

5-احتمال عدم ظهور الصورة على الاربع فقط .

الحل :-

1-احتمال ظهور الصورة على قطعة واحده فقط

$$P(X=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1}=4\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{4}{16}$$

2-احتمال ظهور الصورة على قطعتين فقط

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2}=\frac{6}{16}$$

3-احتمال ظهور الصورة على ثلاث قطع فقط

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3}=\frac{4}{16}$$

4-احتمال ظهور الصورة على القطع الاربع

$$P(X=4)=\binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-4}=\frac{1}{16}$$

5-احتمال عدم ظهور الصورة على القطع الاربع

$$P(X=0)=\binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-0}=\frac{1}{16}$$

المحاضرة التاسعة - تابع الفصل رابع – التوزيعات الاحتمالية

١-٢- توزيع بواسون : Poisson's Distribution

يعد توزيع بواسون من التوزيعات الاحتمالية المنفصلة الهامه ، لوصف العشوائية التي تعبر عن عدد الحوادث النادرة الظهور في فترة زمنية معينة او منطقة محددة او حجم معين. وفيما يلي بعض الامثلة على هذا النوع من التوزيعات والحوادث التي يتعامل معها.

امثلة على توزيع بواسون :

1-عدد حوادث السيارات على طريق زراعي خلال اسبوع معين

2-عدد المكالمات الهاتفية التي تصل الى سنترال المستشفى خلال 5 دقائق

3-عدد الاخطاء المطبعية في الصفحات المختلفة لكتاب معين

4-عدد الزبائن الذين يدخلون مطعم معين خلال 10 دقائق

يعتبر توزيع بواسون حالة خاصة من قانون ذي الحدين عندما تصبح عدد التجارب n كبير جداً بينما يكون احتمال الحدث p ضعيفاً .

متغيرة بواسون العشوائية X هو متغير منفصل تأخذ القيم الصحيحة : x=0,1,2,... ودالته الاحتمالية هي:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad X=0,1,2,3,....$$

X : ترمز لعدد حالات النجاح الممكنة في مساحة او حجم او زمن محدد.

حيث λ: تمثل معدل عدد النجاحات في مساحة او حجم او زمن محدد e=2.71828 يمثل العدد النيبيري.

اما بالنسبة للتوقع والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X الذي يتوزع توزيع بواسون

$$\mu = E(X) = \lambda$$

$$\sigma^2 = var(X) = \lambda$$

منحنى توزيع براسون ملتو نحواليمين ، ايان له التواء موجباً وكلما زادت قيمة λاي كلما زادت قيمة np فان شكل المنحنى يقترب اكثر فاكثر من منحنى التوزيع الطبيعي..

اذا كان متوسط عدد المكالمات التي تلقاها قسم الشرطة ما بين الساعة التاسعة والساعة العاشرة هو 1.8مكالمة اوجد الاحتمالات التالية:

١. احتمال عدم وجود اي مكالمة
٢. احتمال وجود مكالمة واحدة
٣. احتمال وجود مكالمتين
٤. احتمال مكالمتين على الاقل
٥. احتمال مكالمة او مكالمتين

الحل:

يمثل عدد المكالمات في الدقيقة لذا فان x يخضع لتوزيع براسون بمعدل عدد المكالمات في الدقيقة 1.8يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad X=0,1,2,3,....$$

$$= \frac{e^{-1.8}1.8^{x}}{x!} \qquad X=0,1,2,3,....$$

1. احتمال عدم وجود اي مكالمة.

$$P(x = 0) = \frac{e^{-1.8}1.8^{0}}{0!} = e^{1.8} = 0.16529$$

2. احتمال وجود مكالمة واحدة .

$$P(x = 1) = \frac{e^{-1.8}1.8^{1}}{1!} = 0.29752$$

3. احتمال وجود مكالمتين.

$$P(x = 2) = \frac{e^{-1.8} 1.8^2}{2!} = 0.26776$$

4. احتمال وجود مكالمتين على الاقل.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - P[P(x = 0) + P(x = 1)] = 1 - [0.16529 + 0.29752] = 0.53719$$

5. احتمال وجود مكالمة او مكالمتين.

$$P[(x = 1) \cup (x = 2)] = P(x = 1) + P(x = 2) = 0.29752 + 0.26776 = 0.56528$$

نظرا لأن الحادثتين $(x = 1)$و $(x = 2)$منفصلين.

مثال:

اذا كان معدل عدد حوادث الطرق في منطقة معينة هو 8 حوادث يومياً أوجد

1. احتمال ان يقل عدد الحوادث عن ثلاث حوادث يومياً.
2. احتمال ان يزيد عدد الحوادث عن حادثين يومياً.
3. احتمال ان يكون هناك 10 حوادث خلال 3 ايام.

الحل:

x: عدد حوادث الطرق في منطقة معينة يومياً

λ: معدل عدد حوادث الطرق في هذه المنطقة يومياً λ= 8

فيكون x خاضعاً لتوزيع براسون . والتوزيع الاحتمالي لـ x:

$$P(X = x) = \frac{e^{-8}8^{x}}{x!}, \qquad x = 0,1,2,...$$

1- $P(x \le 2) = \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-8}8^{x}}{x!}$

$= e^{-8} [\frac{8^0}{0!} + \frac{8^1}{1!} + \frac{8^2}{2!}]$

$= e^{-8} [1 + 8 + 32] = 41\, e^{-8} = 0.01375$

2- $P(x \ge 3) = 1 - P(x < 3) = 1 - P(x \le 2) = 1 - 0.01375 = 0.98625$

3-بما ان المطلوب هو احتمال ان يكون عدد الحوادث 10 خلال 3 ايام

فان x تمثل عدد حوادث الطرق خلال 3 ايام .

λ : تمثل معدل عدد الحوادث في 3 ايام : أي

$= 3(8) = 24$

فيكون:

$$P(x = 10) = \frac{e^{-24}24^{10}}{10!} = 0.0006596$$

مثال:

اذا كان متوسط عدد الحوادث الاسبوعية على احدى الطرق في مدينة الدمام هو 3 حوادث. احسب:

1- احتمال أن يقع في احد الاسابيع حادثان على الاقل.

2- احتمال ان يقع خمسة حوادث في اسبوعين على الطريق نفسه.

3- متوسط عدد الحوادث على ذلك الطريق في سنة ما.

الحل:

x متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بالمعلمة 3 = λ في الاسبوع

- احتمال ان يقع حادثان على الاقل في اسبوع ما :

$$P(x \geq 2) = \sum_{x=2}^{\infty} P\,(x = 2) = 1 - P\,(x \leq 1)$$
$$= 1 - [P(x = 0) + P(x = 1)]$$
$$= 1 - [\frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!}]$$
$$= 1 - e^{-3}\,[1 + 3] = 1 - 4e^{-3} = 1 - 0.199 = 0.801$$

- احتمال ان يقع خمسة حوادث في اسبوعين على الطريق نفسه.

بما أن 3 = λ في الاسبوع يكون معدل 6 = λ

$$P(x = 5) = \frac{e^{-6}6^5}{5!} = 19.275/120 = 0.161$$

- متوسط عدد الحوادث على ذلك الطريق في سنة ما من المعلوم أن بالسنة 52 اسبوعا.

وعليه فان متوسط عدد الحوادث λ على ذلك الطريق في سنة ما يساوي

$$\mu = \lambda = 52 \times 3 = 156$$

٢- التوزيعات الاحتمالية المتصلة:-

- لقد ذكرنا بان التوزيع الاحتمالي يعتمد على طبيعة المتغير العشوائي كالمتغيرات المنفصلة والمتقطعة – الوثابة او التي تأخذ قيما صحيحة وغير سالبة ومحددة العدد مثل القيم (... ,0, 1, 2)
- وتسمى التوزيعات الاحتمالية لمثل هذه المتغيرات بالتوزيعات الاحتمالية المنفصلة للمتغير العشوائي المتقطع (Disjoint)سنقوم في هذا الفصل بدراسة المتغيرات العشوائية التي يمكن ان تأخذ عددا غير محدود من القيم تختلف كل منهما عن الأخرى بمقادير متناهية في الصفر، وتسمى هذه المتغيرات بالمتغيرات العشوائية المستمرة (Continuous Random Variables).
- كما تسمى توزيعاتهما الاحتمالية بالتوزيعات المستمرة(Continuous Distribuation)

<u>من الامثله على المتغيرات المتصله:</u>

- درجة الحرارة، وزن الطالب، قياس ضغط الدم، المكاييل، المقاييس، الموازين.
- ويتم تغير القيم التي يأخذها المتغير المتصل من خلال فترات او فترة تمثل النطاق الذي يمكن ان تقع فيهما هذه القيم، وفي هذه الحالة يكون عدد القيم التي يمكن ان يأخذها المتغير العشوائي المتصل عددا كبيرا جدا وغير محدود " ما لا نهاية " وذلك بغض النظر عن طول الفترة المحددة للمتغير العشوائي المتصل.
- مثال على ذلك، طول شخص ما بالسنتيميتر فمثلا يقال ان طول هذا الشخص 180سم، بينما في الحقيقة قد يكون الطول الحقيقي قيمة تقريبيةقريبة جدا من 180سم، وفي الواقع تعتبر محاولة معرفة الطول الحقيقي عملية شبه مستحيلة نظرا لأن الشخص يتغير طوله مع الزمن ولو بجزء ضئيل جدا كواحد من البليون من السنتيميتر.

واذا اخذنا فترة 180سم و 181.5سم لوجدنا الاف الاشخاص الذين تقع اطوالهم داخل هذه الفترة وبالتالي فاحتمال ان يكون طول احد الاشخاص قيمة واحدة مثل 181.2سم سيكون صفرا، ذلك لأن الاحتمال في حالة المتغير العشوائي المتصل عبارة عن المساحة تحت منحنى التوزيع الاحتمالي بين اي نقطتين معينتين، زمن المعروف ان المساحة تحت نقطة واحدة تساوي صفرا. وهذه أضافة الى انه حتى من تفسيرنا الاحتمال على انه نهاية التكرار النسبي فان التكرار النسبي للأشخاص الذين اطوالهم 181.2سم بالضبط يساوي صفرا.

لأنه مهما صغرت الفترة حول القيمة يظل هناك اعدادا كبيرة جدا من الأشخاص الذين تقع أطوالهم في الفترة حول 181.2سم تساوي صفرا، وبالتالي فان احتمال اي قيمة معينة بحد ذاتها سيكون صفرا. مما يعني أن من منعات المتغير العشوائي المتصل أن احتمال مساواته لأي قيمة معينة يكون صفرا. و بالتالي لايمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي له بجدول ونعبر عنه بمعادلة فقط. ويكون الاحتمال عبارة عن مساحة تحت منحنى المعادلة وبالطبع ليست جميع النقاط لأن احتمال كل نقطة على حدة يساوي صفرا.

٢-١- التوزيع الطبيعي Normal Distribution:-

يعتمد التوزيع الطبيعي على معلمتين هما متوسط التوزيع μ وتباينه σ^2 والتوزيع الطبيعي هو توزيع اقتراب "دالة" كثافته الاحتمالية متصل ويعطى بالعلامة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^2 (\frac{x-\mu}{\sigma})^2$$

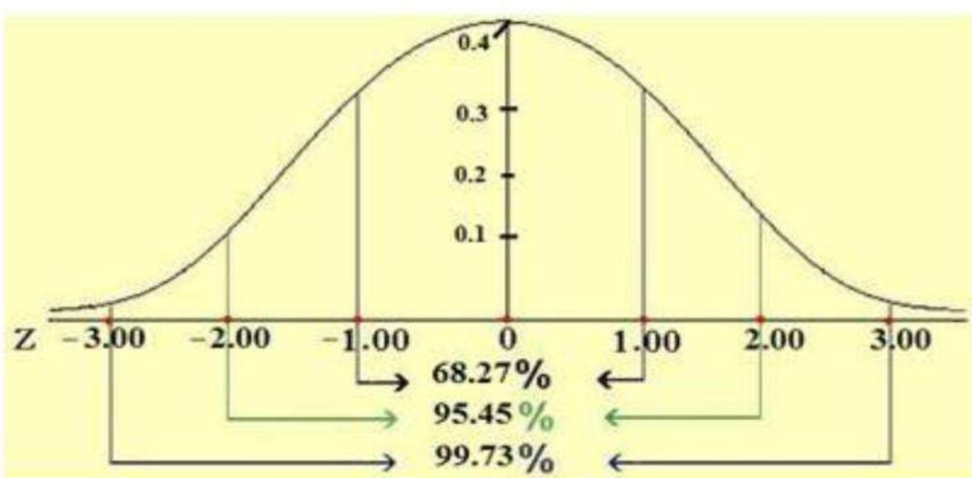
حيث μ هي معدل التوزيع σ^2 , هي تباينة

$\Pi = 3.14159, \quad e = 2.71828$

وعندما تكون قيمة الوسط الحسابي μ للمتغير العشوائي الطبيعي مساوية للصفر والانحراف المعياري مساويا لواحد صحيح، فان التوزيع يأخذ صورة خاصة جدا، حيث تسمى دالة الاحتمال للمتغير العشوائي بدالة كثافة الاحتمال المعياري. كما أن المتغير العشوائي يستخدم له حرف اخر مختلف عنxهوz لتميزه عن غيره من الحالات الاخرى. في هذه الحالة يسمى المتغير العشوائي z بالمتغير العشوائي المعياري حيث يتبع التوزيع الطبيعي المعياري.

Z : N(0.1)

الشكل البياني للمنحنى الطبيعي المعياري يظهر في الشكل السابق ومن هذا الشكل تكون المساحة الواقعة بين Z = +1 , -1 ، هي 68.27% وبين 2 + ,-2 = Zهي95.45%وكذلك بين 3+ , -3 = Zهي99.73%من المساحة الكلية والتي تساوي واحد.



يمثل الجدول التالي المساحة تحت المنحنى والمحصورة بين الاحداثي ,0 = Zوأي قيمة موجبة لـZومن هذا الجدول فان المساحة بين أي نقطتين يمكن الحصول عليها باستخدام تماثل المنحنى حول Z = 0

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
z	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
P	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

مثال:

اذا كان z يمثل متغير عشوائي طبيعي معياري:

Z: N(0.1)

فأوجد التالي:

$-p(-1 < z < 1)$

$-p(-2 < z < 2)$

$-p(-3 < z < 3)$

الحل:

باستخدام الخاصية السابقة للتوزيع الطبيعي والمبينة في الشكل نستطيع ايجاد الاحتمالات المطلوبة كما يلي:

$$-p(-1 < z < 1) = p((0-1) < z < (0+1))$$
$$= p((\mu - \sigma) < z < (\mu + \sigma))$$
$$= 0.6826$$

$$-p(-2 < z < 2) = p((0-2) < z < (0+2))$$
$$= p((\mu - 2\sigma) < z < (\mu + 2\sigma))$$
$$= 0.9545$$

$$-p(-3 < z < 3) = p((0-3) < z < (0+3))$$
$$= p((\mu - 3\sigma) < z < (\mu + 3\sigma))$$
$$= 0.9973$$

قوانين المساحة تحت التوزيع الطبيعي:

$-p(z > a) = 1 - p(z<a)$

$-p(a < z < b) = p(z<b) - p(z<a)$

$-p(z < -a) = 1 - p(z<a)$

$-p(z > -a) = p(z<a)$

$-p(-a < z < b) = p(z<a) + p(z<b) -1$

$-P(-b < z < -a) = p(z<b) - p(z<a)$

تتم عملية تحويل المتغير العشوائيx الى متغير طبيعي معياري z <الدرجة المعيارية> بالعلاقة:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

مثال:-

تم دراسة متوسط درجات الطالب في كلية الدراسات التطبيقية ووجد أنه يساوي 90 درجة وذلك بانحراف معياري 5 درجات تم اختيار أحد الطالب عشوائياً فإذا علمت أن هذه الظاهرة تتبع التوزيع الطبيعي فأوجد :-

١-احتمال أن تنحصر درجة الطالب بين 85درجة و95 درجة ((p(85<x<95).

٢-احتمال أن تنحصر درجة الطالب بين 80 درجة و 100 درجة ((p(80<x<100).

٣-احتمال أن تنحصر درجة الطالب بين 75 درجة و105 درجة ((p(75<x<105).

٤- احتمال أن تكون درجة الطالب أقل من 95 درجة ((p(x<95) .

٥- احتمال أن تكون درجة الطالب أكبر من 95 درجة ((p(x>95).

٦-احتمال أن تكون درجة الطالب أكبر من 75 درجة ((p(x>75).

٧- احتمال أن تكون درجة الطالب أقل من 80 درجة ((p(x<80).

١ ـاحتمال أن تنحصر درجة الطالب بين 85درجة و95 درجة ((p(85<x<95).

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$\frac{85-90}{5} < Z < \frac{95-90}{5}$$
$$-1 < Z < 1$$
$$P = 68.27\ \%$$

٢ ـاحتمال أن تنحصر درجة الطالب بين 80 درجة و 100 درجة .(p(80<x<100))

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$\frac{80-90}{5} < Z < \frac{100-90}{5}$$
$$-2 < Z < 2$$
$$P = 95.45\ \%$$

٣ ـاحتمال أن تنحصر درجة الطالب بين 75 درجة و105 درجة .(p(75<x<105))

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$\frac{75-90}{5} < Z < \frac{105-90}{5}$$
$$-3 < Z < 3$$
$$P = 99.73\ \%$$

٤ ـ احتمال أن تكون درجة الطالب أقل من 95 درجة((p(x<95) .

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$Z < \frac{95-90}{5}$$
$$Z < 1$$
$$P = \frac{0.6827}{2} + 0.5 = 84.135\ \%$$

٥ـ احتمال أن تكون درجة الطالب أكبر من 95 درجة ((p(x>95)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$Z > \frac{95 - 90}{5}$$
$$Z > 1$$
$$P = 0.5 - \frac{0.6827}{2} = 15.865\ \%$$

٦ـاحتمال أن تكون درجة الطالب أكبر من 75 درجة ((p(x>75).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$Z > \frac{75 - 90}{5}$$
$$Z > -3$$
$$Z < 3$$
$$P = \frac{0.9973}{2} + 0.5 = 99.865\ \%$$

٧ـ احتمال أن تكون درجة الطالب أقل من 80 درجة ((p(x<80)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$Z < \frac{80 - 90}{5}$$
$$Z < -2$$
$$Z > 2$$
$$P = 0.5 - \frac{0.9545}{2} = 2.275\ \%$$

المحاضرة العاشرة

تطبيقات للمراجعة على الفصلين الثالث والرابع

تمرين (١)

في تجربة رمي قطعة نقد متزنة مرتين، وكان X متغيرًا عشوائيًا يمثل عدد مرات ظهور الصورة على الوجه العلوي للقطعة. أحسب الاحتمالات التالية:

$P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$

$P(X \geq 1)$, $P(X \leq 1)$, $P(0 < X < 2)$

الحل:

كون أن قطعة النقود متزنة فإن:

$P(H) = P(T) = 0.5$

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

بما أن X يمثل عدد مرات ظهور الصورة فإن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X هي $\{0, 1, 2\}$ حيث:

$\{X = 0\} = \{TT\}$, $\{x = 1\} = \{HT, TH\}$, $\{x = 2\} = \{HH\}$

وباستخدام الاستقلال للحوادث فإن:

$P(x = 0) = P(\{TT\}) = P(\{T\})P(\{T\}) = (0.5)(0.5) = 0.25$

$P(x = 1) = P(\{HT, TH\}) = P(\{HT\}) + P(\{TH\}) = P(\{H\})P(\{T\}) + P(\{T\})P(\{H\}) = (0.5)(0.5) + (0.5)(0.5) = 0.25 + 0.25 = 0.5$

$P(x = 2) = P(\{HH\}) = P(\{H\})P(\{H\}) = (0.5)(0.5) = 0.25$

$P(x \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0.5 + 0.25 = 0.75$

$P(x \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.25 + 0.5 = 0.75$

$P(0 < x < 1) = P(X = 1) = 0.5$

تمرين (٢)

صندوق يحتوي على 10 كرات منها 4 كرات حمراء و 6 كرات سوداء، سحب من الصندوق كرتان على التوالي وبدون ارجاع. وكان المتغير العشوائي x يمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة. أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

الحل:

نرمز للكرة الحمراء بالرمز R وللكرة السوداء بالرمز B، فيكون فضاء العينة لهذه التجربة كما يلي:

$S = \{RR, RB, BR, BB\}$

وبذلك تكون قيم المتغير العشوائي X هي: 0, 1, 2 وعليه يحسب احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي كما يلي:

باستخدام استقلال الحوادث والحادث المشروط نجد أن:

- $P(X=0)=P(\{B1B2\})=P(B1)P(B2\backslash B1)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$
- $P(X = 1) = P(\{R1\ B2,\ B1\ R2\}) = P(R1)P(B2\backslash R1) + P(B1)P(R2\backslash B1) = \frac{4}{10}\times\frac{6}{9}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{48}{90}=\frac{8}{15}$
- $P(X) = 2 = P(\{R1\ R2\}) = P(R1)P(R2\backslash R1) = \frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$

وبالتالي فإن التوزيع الاحتمالي لعدد الكرات الحمراء يكون

X	0	1	2	المجموع
P(X = x)	$\frac{5}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

تمرين (٣)

يؤخر محمد مبلغ 2 مليون ريالا يريد استثمارها في شراء أسهم وسنوات، فاذا كانت x تشير الى جملة الاستثمار وكان توزيع X الاحتمالي هو:

X	P(x)	xP(x)
مليون ريال	0.2	
2 مليون ريال	0.3	
3 مليون ريال	0.2	
4 مليون ريال	0.2	
5 مليون ريال	0.1	
المجموع =15 مليون ريال	1.00	

واذا قرر محمد الدخول في هذا النوع من الاستثمار فماذا توقع أن يحصل عليه؟

الحل:

X	P(x)	xP(x)
مليون ريال	0.2	0.2
2 مليون ريال	0.3	0.6
3 مليون ريال	0.2	0.6
4 مليون ريال	0.2	0.8
5 مليون ريال	0.1	0.5
المجموع =15 مليون ريال	1.00	2.7

$$\mu = \sum x\,P(x) = 2.7$$

تمرين (٤)

اذا كان التوزيع الاحتمالي للخسارة المالية الناجمة من حوادث السيارات هو:

الخسارة المالية بالريال	P(x)	xP(x)
100	0.40	
500	0.20	
800	0.15	
1500	0.10	
3000	0.09	
10000	0.06	
المجموع = 15900	1.00	

أوجد القيمة المتوقعة للخسارة السنوية الناجمة عن حادث سيارة.

الحل

الخسارة المالية بالريال	P(x)	xP(x)
100	0.40	40
500	0.20	100
800	0.15	120
1500	0.10	150
3000	0.09	270
10000	0.06	600
المجموع = 15900	1.00	1280

$$\mu = E(X) = \sum [x\,P(X = x)]$$

$$\mu = 1280$$

الخسارة المتوقعة الناجمة عن حادث سيارة في السنة = 1280 ريالا

تمرين (٥)

يؤخر محمد مبلغ 2 مليون ريالا يريد استثمارها في شراء أسهم وسنوات، فاذا كانت x تشير الى جملة الاستثمار وكان توزيع X الاحتمالي هو:

X	P(x)	xP(x)
مليون ريال	0.2	
2 مليون ريال	0.3	
3 مليون ريال	0.2	
4 مليون ريال	0.2	
5 مليون ريال	0.1	
المجموع =15 مليون ريال	1.00	

واذا قرر محمد الدخول في هذا النوع من الاستثمار

أوجد تباين x والانحراف المعياري له

x	P(x)	xP(x)	x - μ	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2 P(x)$
1	0.2	0.2	-1.7	2.89	0.578
2	0.3	0.6	-0.7	0.49	0.147
3	0.2	0.6	0.3	0.09	0.018
4	0.2	0.8	1.3	1.69	0.338
5	0.1	0.5	2.3	5.29	0.529
المجموع	1.0	2.7			1.61

وبالتالي نجد التباين حيث:

$$\sigma^2 = \sum (x-\mu)^2\,P(x) = 1.61$$

$$\sigma = \sqrt{1.61} \approx 1.269$$

تمرين (٦)

أوجد تباين المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة عند القاء ثلاث قطع نقود معدنية مرة واحدة.

الحل:

يبين الجدول التالي التوزيع الاحتمالي للمتغير X، حساب التباين للمتغير X الذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة عند القاء ثلاث قطع نقود معدنية متزنة مرة واحدة.

x	x^2	P(x)	xP(x)	x^2 P(x)
0	0	1/8	0	0
1	1	3/8	3/8	3/8
2	4	3/8	6/8	12/8
3	9	1/8	3/8	9/8
المجموع			$\frac{12}{8}$=1.5	3

$$E(x^2) = \sum x^2 P(x) = \frac{24}{8} = 3$$

$$\sigma^2 = \sum [x^2 P(x)] - \mu^2$$

$$\sigma^2 = 3 - (1.5)^2 = 3 - 2.25 = 0.75$$

لذا فان الانحراف المعياري هو :

$$\sigma = \sqrt{0.75} = 0.86603$$

تمرين (٧)

اذا كانت x ترمز للقيم العشرة: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

فان احتمال اية قيمة منها يساوي 0.1 أوجد تباين المتغير العشوائي.

x	x^2	P(x)	xP(x)	x^2P(x)
0	0	0.1	0.0	0.0
1	1	0.1	0.1	0.1
2	4	0.1	0.2	0.4
3	9	0.1	0.3	0.9
4	16	0.1	0.4	1.6
5	25	0.1	0.5	2.5
6	36	0.1	0.6	3.6
7	49	0.1	0.7	4.9
8	64	0.1	0.8	6.4
9	81	0.1	0.9	20.4
$E(x) = \sum = 4.5$ $E(x^2) = \sum x^2 P(x) = 20.4$				

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$$

$$\sigma^2 = 20.4 - (4.5)^2 = 28.5 - 20.25 = 0.15$$

$$\sigma^2 = \sqrt{0.15} \approx 0.387$$

تمرين (٨)

عند رمي قطعة نقود مرة واحدة. أوجد كلا من التوزيع الاحتمالي والتوقع والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي x اذا كان متوقعا أن يأخذ المتغير x القيمة (1) للدلالة على ظهور الصورة وأن يأخذ المتغير العشوائي x القيمة (0) للدلالة على عدم ظهور الصورة.

الحل:

القطعة متزنة فان احتمال أن تظهر صورة من رمية واحدة يساوي احتمال أن لا تظهر صورة، وبالتالي فان التوزيع x الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل والذي يمثل عدد الصور في رمية واحدة كما بالجدول التالي:

X=x	0	1	المجموع
P(X=x)	0.5	0.5	1

التوقع:

$$E(x) = \mu = \sum_{x=0}^{1} xP(x) = 0\,.\,(0.5) + 1\,(0.5) = 0.5$$

التباين :

$$\sum_{x=0}^{1} x^2P(x) - \mu^2 = [\,0^2(0.5) + 1^2(0.5) - (0.5)^2 = 0.5 - 0.25 = 0.25$$

الانحراف :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.25} = 0.5$$

تمرين (٩)

توزيع ذو الحدين

القيت قطعة نقود متزنة 3 مرات أوجد :

1-الاقتران الاحتمالي للحصول على الصورة فيها.

2- احتمال الحصول على صورة واحدة فقط .

3-احتمال عدم الحصول على اية صورة .

4-احتمال الحصول ثلاث صور .

5-احتمال الحصول على صورتين فقط .

الحل:

ان هذه التجربة تتبع ذات الحدين

ويكون فيها $n=3$ ، $p=\frac{1}{2}$ ، $q=\frac{1}{2}$

p: احتمال النجاح وهو ظهور الصورة.

: احتمال الحصول على الصورة في المحاولة الواحدة ، "بيرونولي" $P=\frac{1}{2}$

احتمال الفشل وهو ظهور الكتابة $q = (1-p) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

عدد النجاحات في المحاولات هو x.

عدد مرات الحصول على الصور في المحاولات الثلاث.

1-الاقتران الاحتمالي للحصول على الصور هو :

$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$

$P(X=x) = \binom{3}{x} (\frac{1}{2})^x (\frac{1}{2})^{n-x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3$

2-احتمال الحصول على صورة واحدة فقط :

$P(X = 1) = \binom{3}{1} (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^{3-1} = 3(\frac{1}{2}) (\frac{1}{2})^2 = 3(\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}$

3-احتمال عدم احصول على اية صورة :

$P(X =0) = \binom{3}{0} (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^{3-0} = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

1-احتمال الحصول على 3 صورة :

$P(X = 3) = \binom{3}{3} (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^{3-3} = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

2- احتمال الحصول على صورتين :

$P(X = 2) = \binom{3}{2} (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^{3-2} = 3 (\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}$

تمرين (١٠)

توزيع ذو الحدين

مثال:

رمي حجر نرد منتظم 6 مرات اوجد :

1-الاقتران الاحتمالي لعدد ظهور الوجه 2

2-احتمال عدم ظهور الوجه 2.

3-احتمال الحصول على الوجه 2 ثلاث مرات .

4- احتمال الحصول على الوجه 2 مرتين على الاكثر .

5-احتمال الحصول على الوجه 2 ثلاث مرات على الاكثر .

الحل :

ان هذه التجربة تتبع توزيع ذات الحدين حيث ان $n=6$

p هو احتمال الحصول على الوجه 2 في المحاولة الواحدة

اذن $p=\frac{1}{6}$

q = احتمال عدم الحصول على الوجة2 في المحاولة الواحدة

$q=1-p=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

x: عدد مرات الحصول على الوجه 2 في المحاولات الست (6)

١ ـ الاقتران الاحتمالي لعدد ظهور الوجه 2 هو :

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \quad , \quad x=0,1,2,\dots,n$$

$$=\binom{6}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{6-x} \quad , \quad x=0,1,2,\dots,6$$

2 ـ احتمال عدم الحصول على الوجه 2 :

$$P(X=0)=\binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{6-0}=\left(\frac{5}{6}\right)^6$$

3-احتمال الحصول على الوجه 2 ثلاث مرات :

$$P(X = 3) = \binom{6}{3} \left(\tfrac{1}{6}\right)^3 \left(\tfrac{5}{6}\right)^{6-3} = 20 \left(\tfrac{1}{6}\right)^3 \left(\tfrac{5}{6}\right)^3 = 0.535833$$

4-احتمال الحصول على الوجه 2 مرتين على الاكثر:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X = 0) = \binom{6}{0} \left(\tfrac{1}{6}\right)^0 \left(\tfrac{5}{6}\right)^{6-0} = \left(\tfrac{5}{6}\right)^6$$

$$P(X = 1) = \binom{6}{1} \left(\tfrac{1}{6}\right)^1 \left(\tfrac{5}{6}\right)^{6-1} = \left(\tfrac{5}{6}\right)^5$$

$$P(X = 2) = \binom{6}{2} \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \left(\tfrac{5}{6}\right)^{6-2} = \tfrac{15}{36} \left(\tfrac{5}{6}\right)^4$$

$$P(X \leq 2) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^6 + \left(\tfrac{5}{6}\right)^5 + \tfrac{15}{36} \left(\tfrac{5}{6}\right)^4 = 0.9377141$$

تمرين (١١)

اذا كانت x تمثل عدد الصور التي تظهر عند القاء اربع قطع نقود معدنية متزنة . اوجد الوسط الحسابي والتباين باستخدام المعادلات؟

الحل:

في هذا المثال نجد ان $n=4$, $p=0.5$, $q=0.5$ وبالتالي فان الوسط الحسابي هو :

$E(x) = np = 4 \times 0.5 = 2$

$\sigma^2 = npq = 4 \times (0.5)\ (0.5) =$

تمرين (١٢)

مثال:

اذا كانتx تمثل عدد الصور التي تظهر عند القاء اربع قطع نقود معدنية متزنة اوجد الاحتمالات التاليه لتوزيع x:

1-احتمال ظهور الصورة على قطعة واحدة فقط .

2-احتمال ظهور الصورة على قطعتين فقط .

3-احتمال ظهور الصورة على ثلاث قطع فقط .

4-احتمال ظهور الصورة على القطع الاربع .

5-احتمال عدم ظهور الصورة على الاربع فقط .

الحل :-

1-احتمال ظهور الصورة على قطعة واحده فقط

$$P(X=1)=\binom{4}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^1\left(\tfrac{1}{2}\right)^{4-1}=4\left(\tfrac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}$$

2-احتمال ظهور الصورة على قطعتين فقط

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{4-2}=\frac{6}{16}$$

3-احتمال ظهور الصورة على ثلاث قطع فقط

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{4-3}=\frac{4}{16}$$

4-احتمال ظهور الصورة على القطع الاربع

$$P(X=4)=\binom{4}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^4\left(\tfrac{1}{2}\right)^{4-4}=\frac{1}{16}$$

5-احتمال عدم ظهور الصورة على القطع الاربع

$$P(X=0)=\binom{4}{0}\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\left(\tfrac{1}{2}\right)^{4-0}=\frac{1}{16}$$

تمرين (١٣)

اذا كان متوسط عدد المكالمات التي تلقاها مقسم ما بين الساعة التاسعة والساعة العاشرة هو 1.8مكالمة اوجد ان يكون لدينا ما بين الساعة10:30 و11:30 التالي:

1- احتمال عدم وجود اي مكالمة

2-احتمال وجود مكالمة واحدة

3- احتمال وجود مكالمتين

4-احتمال مكالمتين على الاقل

5-احتمال مكالمة او مكالمتين

الحل:

يمثل عدد المكالمات في الدقيقة لذا فان x يخضع لتوزيع براسون بمعدل عدد المكالمات في الدقيقة 1.8يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad X=0,1,2,3,....$$

$$= \frac{e^{-1.8}1.8^{x}}{x!} \qquad X=0,1,2,3,....$$

1. احتمال عدم وجود اي مكالمة.

$$P(x = 0) = \frac{e^{-1.8}1.8^{0}}{0!} = e^{1.8} = 0.16529$$

2. احتمال وجود مكالمة واحدة .

$$P(x = 1) = \frac{e^{-1.8}1.8^{1}}{1!} = 0.29752$$

3. احتمال وجود مكالمتين.

$$P(x=2)=\frac{e^{-1.8}1.8^2}{2!}=0.26776$$

4. احتمال وجود مكالمتين على الاقل.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - P[P(x=0) + P(x=1)] = 1 - [0.16529 + 0.29752] = 0.53719$$

5. احتمال وجود مكالمة او مكالمتين.

$$P[(x=1) \cup (x=2)] = P(x=1) + P(x=2) = 0.29752 + 0.26776 = 0.56528$$

نظرا لأن الحادثتين $(x=1)$و $(x=2)$منفصلين.

تمرين (١٤)

اذا كان معدل عدد حوادث الطرق في منطقة معينة هو 8 حوادث يومياً أوجد

1. احتمال ان يقل عدد الحوادث عن ثلاث حوادث يومياً.
2. احتمال ان يزيد عدد الحوادث عن حادثين يومياً.
3. احتمال ان يكون هناك 10 حوادث خلال 3 ايام.

الحل:

x: عدد حوادث الطرق في منطقة معينة يومياً

λ: معدل عدد حوادث الطرق في هذه المنطقة يومياً λ= 8

فيكون xخاضعاً لتوزيع براسون . والتوزيع الاحتمالي لـx:

$P(X = x) = \frac{e^{-8} 8^{x}}{x!}, \qquad x = 0,1,2,\ldots$

1- $P(x \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-8} 8^{x}}{x!}$

$= e^{-8} [\frac{8^0}{0!} + \frac{8^1}{1!} + \frac{8^2}{2!}]$

$= e^{-8} [1 + 8 + 32] = 41\, e^{-8} = 0.01375$

2- $P(x \geq 3) = 1 - P(x < 3) = 1 - P(x \leq 2) = 1 - 0.01375 = 0.98625$

3-بما ان المطلوب هو احتمال ان يكون عدد الحوادث 10 خلال 3 ايام

فان x تمثل عدد حوادث الطرق خلال 3 ايام .

λ : تمثل معدل عدد الحوادث في 3 ايام : أي

$= 3\,(8) = 24$

فيكون:

$P(x = 10) = \frac{e^{-24} 24^{10}}{10!} = 0.0006596$

تمرين (١٥)

اذا كان متوسط عدد الحوادث الاسبوعية على احدى الطرق في مدينة الدمام هو 3 حوادث. احسب:

1- احتمال أن يقع في احد الاسابيع حادثان على الاقل.

2- احتمال ان يقع خمسة حوادث في اسبوعين على الطريق نفسه.

3- متوسط عدد الحوادث على ذلك الطريق في سنة ما.

الحل:

x متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بالمعلمة 3 = λ في الاسبوع.

- احتمال ان يقع حادثان على الاقل في اسبوع ما :

$$P(x \geq 2) = \sum_{x=2}^{\infty} P\ (x = 2) = 1 - P\ (x \leq 1)$$
$$= 1 - [P(x = 0) + P(x = 1)]$$
$$= 1 - [\frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!}]$$
$$= 1 - e^{-3}\,[1 + 3] = 1 - 4e^{-3} = 1 - 0.199 = 0.801$$

- احتمال ان يقع خمسة حوادث في اسبوعين على الطريق نفسه.

بما أن 3 = λ في الاسبوع يكون معدل 6 = λ

$$P(x = 5) = \frac{e^{-6}6^5}{5!} = 19.275/120 = 0.161$$

- متوسط عدد الحوادث على ذلك الطريق في سنة ما من المعلوم أن بالسنة 52 اسبوعا.

وعليه فان متوسط عدد الحوادث λ على ذلك الطريق في سنة ما يساوي

$$\mu = \lambda = 52 \times 3 = 156$$

تمرين (١٦)

اذا كان z يمثل متغير عشوائي طبيعي معياري:

Z: N(0.1)

فأوجد التالي:

-p(-1 < z < 1)
-p(-2 < z < 2)
-p(-3 < z < 3)

الحل:

باستخدام الخاصية السابقة للتوزيع الطبيعي والمبينة في الشكل نستطيع ايجاد الاحتمالات المطلوبة كما يلي:

$$-p(-1 < z < 1) = p((0-1) < z < (0+1))$$
$$= p\ ((\mu - \sigma) < z < (\mu + \sigma))$$
$$= 0.6826$$

$$-p(-2 < z < 2) = p((0-2) < z < (0+2))$$
$$= p\ ((\mu - 2\sigma) < z < (\mu + 2\sigma))$$
$$= 0.9545$$

$$-p(-3 < z < 3) = p((0-3) < z < (0+3))$$
$$= p\ ((\mu - 3\sigma) < z < (\mu + 3\sigma))$$
$$= 0.9973$$

تمرين (١٧)

تم دراسة متوسط درجات الطالب في كلية الدراسات التطبيقية ووجد أنه يساوي 90 درجة وذلك بانحراف معياري 5 درجات تم اختيار أحد الطالب عشوائياً فإذا علمت أن هذه الظاهرة تتبع التوزيع الطبيعي فأوجد :-

١-احتمال أن تنحصر درجة الطالب بين 85درجة و95 درجة ((p(85<x<95)).
٢-احتمال أن تنحصر درجة الطالب بين 80 درجة و 100 درجة ((p(80<x<100)).
٣-احتمال أن تنحصر درجة الطالب بين 75 درجة و105 درجة ((p(75<x<105)).
٤- احتمال أن تكون درجة الطالب أقل من 95 درجة((p(x<95)) .
٥- احتمال أن تكون درجة الطالب أكبر من 95 درجة ((p(x>95)).
٦-احتمال أن تكون درجة الطالب أكبر من 75 درجة ((p(x>75)).
٧- احتمال أن تكون درجة الطالب أقل من 80 درجة ((p(x<80)).

١-احتمال أن تنحصر درجة الطالب بين 85درجة و95 درجة ((p(85<x<95)).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$\frac{85-90}{5} < Z < \frac{95-90}{5}$$
$$-1 < Z < 1$$
$$P = 68.27\ \%$$

٢-احتمال أن تنحصر درجة الطالب بين 80 درجة و 100 درجة ((p(80<x<100)).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$\frac{80-90}{5} < Z < \frac{100-90}{5}$$
$$-2 < Z < 2$$
$$P = 95.45\ \%$$

٣-احتمال أن تنحصر درجة الطالب بين 75 درجة و105 درجة ((p(75<x<105)).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$\frac{75-90}{5} < Z < \frac{105-90}{5}$$
$$-3 < Z < 3$$
$$P = 99.73\ \%$$

٤ـ احتمال أن تكون درجة الطالب أقل من 95 درجة((p(x<95) .

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$Z < \frac{95-90}{5}$$
$$Z < 1$$
$$P = \frac{0.6827}{2} + 0.5 = 84.135\ \%$$

٥ـ احتمال أن تكون درجة الطالب أكبر من 95 درجة ((p(x>95)

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$Z > \frac{95-90}{5}$$
$$Z > 1$$
$$P = 0.5 - \frac{0.6827}{2} = 15.865\ \%$$

٦ـاحتمال أن تكون درجة الطالب أكبر من 75 درجة ((p(x>75).

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$Z > \frac{75-90}{5}$$
$$Z > -3$$
$$Z < 3$$
$$P = \frac{0.9973}{2} + 0.5 = 99.865\ \%$$

٧ـ احتمال أن تكون درجة الطالب أقل من 80 درجة ((p(x<80)

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$Z < \frac{80-90}{5}$$
$$Z < -2$$
$$Z > 2$$
$$P = 0.5 - \frac{0.9545}{2} = 2.275\ \%$$

تمرين (١٨)

إذا علمت أن متوسط وزن أحدى السلع الغذائية يساوي 360 جرام وذلك بانحراف معياري 20 جرامات تم اختيار وحدة واحدة من هذه السلع بطريقة عشوائية فإذا علمت أن هذه الظاهرة تتبع التوزيع الطبيعي فأوجد :-

١-احتمال أن ينحصر وزن السلعة بين 340 جرام و380 جرام ((p(340<x<380).

٢-احتمال أن ينحصر وزن السلعة بين 320جرام و 400 جرام ((p(320<x<400).

٣-احتمال أن ينحصر وزن السلعة بين 300 جرام و420 جرام ((p(300<x<420).

٤- احتمال أن يكون وزن السلعة أقل من 380جرام ((p(x<380).

٥- احتمال أن يكون وزن السلعة أكبر من 380 جرام ((p(x>380).

٦-احتمال أن يكون وزن السلعة أكبر من 300 جرام ((p(x>300).

٧- احتمال أن يكون وزن السلعة أقل من 320 جرام ((p(x<320).

١-احتمال أن ينحصر وزن السلعة بين 340 جرام و380 جرام ((p(340<x<380).

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$\frac{340-360}{20} < Z < \frac{380-360}{20}$$
$$-1 < Z < 1$$
$$P = 68.27\ \%$$

٢-احتمال أن ينحصر وزن السلعة بين 320 جرام و 400 جرام ((p(320<x<400).

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$\frac{320-360}{20} < Z < \frac{400-360}{20}$$
$$-2 < Z < 2$$
$$P = 95.45\ \%$$

٣-احتمال أن ينحصر وزن السلعة بين 300 جرام و420 جرام ((p(300<x<420).

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$\frac{300-360}{20} < Z < \frac{420-360}{20}$$
$$-3 < Z < 3$$
$$P = 99.73\ \%$$

٤ـ احتمال أن يكون وزن السلعة أقل من 380جرام ((p(x<380).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$Z < \frac{380 - 360}{20}$$
$$Z < 1$$
$$P = \frac{0.6827}{2} + 0.5 = 84.135\ \%$$

٥ـ احتمال أن يكون وزن السلعة أكبر من 380 جرام ((p(x>380).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$Z > \frac{380 - 360}{20}$$
$$Z > 1$$
$$P = 0.5 - \frac{0.6827}{2} = 15.865\ \%$$

٦ـاحتمال أن يكون وزن السلعة أكبر من 300 جرام ((p(x>300).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$Z > \frac{300 - 360}{20}$$
$$Z > -3$$
$$Z < 3$$
$$P = \frac{0.9973}{2} + 0.5 = 99.865\ \%$$

٧ـ احتمال أن يكون وزن السلعة أقل من 320 جرام ((p(x<320).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$Z < \frac{320 - 360}{20}$$
$$Z < -2$$
$$Z > 2$$
$$P = 0.5 - \frac{0.9545}{2} = 2.275\ \%$$

محاضرة البث المباشر الثاني (حل مسائل)

1- تمارين على التوزيعات الاحتمالية

أوجد تباين المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة عند القاء ثلاث قطع نقود معدنية مرة واحدة.

الحل:

يبين الجدول التالي التوزيع الاحتمالي للمتغير X، حساب التباين للمتغير X الذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة عند القاء ثلاث قطع نقود معدنية متزنة مرة واحدة.

x	x^2	P(x)	xP(x)	x^2 P(x)
0	0	1/8	0	0
1	1	3/8	3/8	3/8
2	4	3/8	6/8	12/8
3	9	1/8	3/8	9/8
المجموع			$\frac{12}{8}$=1.5	3

$$E(x^2) = \sum x^2\, P(x) = \frac{24}{8} = 3$$

$$\sigma^2 = \sum [x^2 P(x)] - \mu^2$$

$$\sigma^2 = 3 - (1.5)^2 = 3 - 2.25 = 0.75$$

لذا فان الانحراف المعياري هو :

$$\sigma = \sqrt{0.75} = 0.86603$$

اذا كانت x ترمز للقيم العشرة: 9 ,8 ,7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0

فان احتمال اية قيمة منها يساوي 0.1 أوجد تباين المتغير العشوائي.

x	x^2	P(x)	xP(x)	x^2P(x)
0	0	0.1	0.0	0.0
1	1	0.1	0.1	0.1
2	4	0.1	0.2	0.4
3	9	0.1	0.3	0.9
4	16	0.1	0.4	1.6
5	25	0.1	0.5	2.5
6	36	0.1	0.6	3.6
7	49	0.1	0.7	4.9
8	64	0.1	0.8	6.4
9	81	0.1	0.9	20.4
$E(x) = \sum = 4.5$ $E(x^2) = \sum x^2 P(x) = 20.4$				

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$$

$$\sigma^2 = 20.4 - (4.5)^2 = 28.5 - 20.25 = 0.15$$

$$\sigma^2 = \sqrt{0.15} \approx 0.387$$

2- تمارين على التوزيع ذو الحدين

تمرين: القيت قطعة نقود متزنة 3 مرات, أوجد:

1- الاقتران الاحتمالي للحصول على الصورة فيها.
2- احتمال الحصول على صورة واحدة فقط.
3- احتمال الحصول على اية صورة.
4- احتمال الحصول على 3 صور.
5- احتمال الحصول على صورتين فقط.

الحل:

ان هذه التجربة تتبع ذات الحدين

ويكون فيها $n=3$ ، $p=\frac{1}{2}$ ، $q=\frac{1}{2}$

p: احتمال النجاح وهو ظهور الصورة.

: احتمال الحصول على الصورة في المحاولة الواحدة ، "بيرونولي " $p=\frac{1}{2}$

احتمال الفشل وهو ظهور الكتابة $q = (1-p) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

عدد النجاحات في المحاولات هو x.

عدد مرات الحصول على الصور في المحاولات الثلاث.

1-الاقتران الاحتمالي للحصول على الصور هو :

$$P(X=x)=\binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad , \quad x=0,1,2,\dots,n$$

$$P(X=x)=\binom{3}{x} \left(\tfrac{1}{2}\right)^x \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-x} \quad , \quad x=0,1,2,3$$

2-احتمال الحصول على صورة واحدة فقط :

$$P(X=1)=\binom{3}{1} \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^{3-1} = 3\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{3}{8}$$

3-احتمال عدم احصول على اية صورة :

$$P(X=0)=\binom{3}{0} \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 \left(\tfrac{1}{2}\right)^{3-0} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{8}$$

1-احتمال الحصول على 3 صورة :

$$P(X=3)=\binom{3}{3} \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \left(\tfrac{1}{2}\right)^{3-3} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{8}$$

2- احتمال الحصول على صورتين :

$$P(X=2)=\binom{3}{2} \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^{3-2} = 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{3}{8}$$

تمرين:

رمي حجر نرد منتظم 6 مرات اوجد :

1-الاقتران الاحتمالي لعدد ظهور الوجه 2

2-احتمال عدم ظهور الوجه 2.

3-احتمال الحصول على الوجه 2 ثلاث مرات .

4- احتمال الحصول على الوجه 2 مرتين على الاكثر .

5-احتمال الحصول على الوجه 2 ثلاث مرات على الاكثر .

الحل :

ان هذه التجربة تتبع توزيع ذات الحدين حيث ان $n=6$

p هو احتمال الحصول على الوجه 2 في المحاولة الواحدة

اذن $p=\frac{1}{6}$

q = احتمال عدم الحصول على الوجه2 في المحاولة الواحدة

$q = 1 - p = 1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

x: عدد مرات الحصول على الوجه 2 في المحاولات الست (6)

١ -الاقتران الاحتمالي لعدد ظهور الوجه 2 هو :

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$= \binom{6}{x} \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{6-x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 6$$

2 -احتمال عدم الحصول على الوجه 2 :

$$P(X = 0) = \binom{6}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{6-0} = \left(\frac{5}{6}\right)^6$$

3-احتمال الحصول على الوجه 2 ثلاث مرات :

$$P(X = 3) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{6-3} = 20 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.535833$$

4-احتمال الحصول على الوجه 2 مرتين على الاكثر:

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X = 0) = \binom{6}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{6-0} = \left(\frac{5}{6}\right)^6$$

$$P(X = 1) = \binom{6}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{6-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

$$P(X = 2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{6-2} = \frac{15}{36} \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$P(X \le 2) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \frac{15}{36} \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.9377141$$

تمرين:

اذا كانت xتمثل عدد الصور التي تظهر عند القاء اربع قطع نقود معدنية متزنة . اوجد الوسط الحسابي والتباين باستخدام المعادلات؟

الحل:

في هذا المثال نجد ان n=4 , p=0.5 , q=0.5وبالتالي فان الوسط الحسابي هو :

$E(x) = np = 4 \times 0.5 = 2$

$\sigma^2 = npq = 4 \times (0.5)\ (0.5) =$

تمرين على توزيع بواسون:

اذا كان متوسط عدد المكالمات التي تلقاها مقسم ما بين الساعة التاسعة والساعة العاشرة هو 1.8مكالمة اوجد ان يكون لدينا ما بين الساعة10:30 و11:30 التالي:

1- احتمال عدم وجود اي مكالمة

2-احتمال وجود مكالمة واحدة

3- احتمال وجود مكالمتين

4-احتمال مكالمتين على الاقل

5-احتمال مكالمة او مكالمتين

الحل:

يمثل عدد المكالمات في الدقيقة لذا فان x يخضع لتوزيع براسون بمعدل عدد المكالمات في الدقيقة 1.8يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x:

$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad X=0,1,2,3,....$

$= \frac{e^{-1.8}1.8^x}{x!} \qquad X=0,1,2,3,....$

1. احتمال عدم وجود اي مكالمة.

$P(x = 0) = \frac{e^{-1.8}1.8^0}{0!} = e^{1.8} = 0.16529$

2. احتمال وجود مكالمة واحدة .

$P(x = 1) = \frac{e^{-1.8}1.8^1}{1!} = 0.29752$

3. احتمال وجود مكالمتين.

$$P(x = 2) = \frac{e^{-1.8}1.8^2}{2!} = 0.26776$$

4. احتمال وجود مكالمتين على الاقل.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - P[P(x = 0) + P(x = 1)] = 1 - [0.16529 + 0.29752] = 0.53719$$

5. احتمال وجود مكالمة او مكالمتين.

$$P[(x = 1) \cup (x = 2)] = P(x = 1) + P(x = 2) = 0.29752 + 0.26776 = 0.56528$$

نظرا لأن الحادثتين $(x = 1)$و $(x = 2)$منفصلين.

تمرين:

اذا كان متوسط عدد الحوادث الاسبوعية على احدى الطرق في مدينة الدمام هو 3 حوادث. احسب:

1- احتمال أن يقع في احد الاسابيع حادثان على الاقل.
2- احتمال ان يقع خمسة حوادث في اسبوعين على الطريق نفسه.
3- متوسط عدد الحوادث على ذلك الطريق في سنة ما.

الحل:

xمتغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بالمعلمة $\lambda = 3$في الاسبوع.

- احتمال ان يقع حادثان على الاقل في اسبوع ما :

$$P(x \geq 2) = \sum_{x=2}^{\infty} P(x = 2) = 1 - P(x \leq 1)$$

$$= 1 - [P(x = 0) + P(x = 1)]$$

$$= 1 - [\frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!}]$$

$$= 1 - e^{-3}[1 + 3] = 1 - 4e^{-3} = 1 - 0.199 = 0.801$$

- احتمال ان يقع خمسة حوادث في اسبوعين على الطريق نفسه.

بما أن $\lambda = 3$في الاسبوع يكون محدل $\lambda = 6$

$$P(x = 5) = \frac{e^{-6}6^5}{5!} = 19.275/120 = 0.161$$

- متوسط عدد الحوادث على ذلك الطريق في سنة ما من المعلوم أن بالسنة 52 اسبوعا.

وعليه فان متوسط عدد الحوادث λعلى ذلك الطريق في سنة ما يساوي

$$\mu = \lambda = 52 \times 3 = 156$$

تمارين على التوزيع الطبيعي

تم دراسة متوسط درجات الطالب في كلية الدراسات التطبيقية ووجد أنه يساوي 90 درجة وذلك بانحراف معياري 5 درجات تم اختيار أحد الطالب عشوائياً فإذا علمت أن هذه الظاهرة تتبع التوزيع الطبيعي فأوجد :-

١-احتمال أن تنحصر درجة الطالب بين 85درجة و95 درجة ((p(85<x<95).

٢-احتمال أن تنحصر درجة الطالب بين 80 درجة و 100 درجة ((p(80<x<100).

٣-احتمال أن تنحصر درجة الطالب بين 75 درجة و105 درجة ((p(75<x<105).

٤- احتمال أن تكون درجة الطالب أقل من 95 درجة((p(x<95) .

٥- احتمال أن تكون درجة الطالب أكبر من 95 درجة ((p(x>95).

٦-احتمال أن تكون درجة الطالب أكبر من 75 درجة ((p(x>75).

٧- احتمال أن تكون درجة الطالب أقل من 80 درجة ((p(x<80).

١-احتمال أن تنحصر درجة الطالب بين 85درجة و95 درجة ((p(85<x<95).

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$\frac{85-90}{5} < Z < \frac{95-90}{5}$$
$$-1 < Z < 1$$
$$P = 68.27\ \%$$

٢-احتمال أن تنحصر درجة الطالب بين 80 درجة و 100 درجة ((p(80<x<100).

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$\frac{80-90}{5} < Z < \frac{100-90}{5}$$
$$-2 < Z < 2$$
$$P = 95.45\ \%$$

٣-احتمال أن تنحصر درجة الطالب بين 75 درجة و105 درجة ((p(75<x<105).

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$\frac{75-90}{5} < Z < \frac{105-90}{5}$$
$$-3 < Z < 3$$
$$P = 99.73\ \%$$

٤ ـ احتمال أن تكون درجة الطالب أقل من 95 درجة((p(x<95)) .

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$Z < \frac{95 - 90}{5}$$
$$Z < 1$$
$$P = \frac{0.6827}{2} + 0.5 = 84.135\ \%$$

٥ ـ احتمال أن تكون درجة الطالب أكبر من 95 درجة ((p(x>95)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$Z > \frac{95 - 90}{5}$$
$$Z > 1$$
$$P = 0.5 - \frac{0.6827}{2} = 15.865\ \%$$

٦ـاحتمال أن تكون درجة الطالب أكبر من 75 درجة ((p(x>75).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$Z > \frac{75 - 90}{5}$$
$$Z > -3$$
$$Z < 3$$
$$P = \frac{0.9973}{2} + 0.5 = 99.865\ \%$$

٧ـ احتمال أن تكون درجة الطالب أقل من 80 درجة ((p(x<80)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$Z < \frac{80 - 90}{5}$$
$$Z < -2$$
$$Z > 2$$
$$P = 0.5 - \frac{0.9545}{2} = 2.275\ \%$$

إذا علمت أن متوسط وزن أحدى السلع الغذائية يساوي 360 جرام وذلك بانحراف معياري 20 جرامات تم اختيار وحدة واحدة من هذه السلع بطريقة عشوائية فإذا علمت أن هذه الظاهرة تتبع التوزيع الطبيعي فأوجد :-

١-احتمال أن ينحصر وزن السلعة بين 340 جرام و380 جرام (($p(340<x<380)$).
٢-احتمال أن ينحصر وزن السلعة بين 320جرام و 400 جرام (($p(320<x<400)$).
٣-احتمال أن ينحصر وزن السلعة بين 300 جرام و420 جرام (($p(300<x<420)$).
٤- احتمال أن يكون وزن السلعة أقل من 380جرام (($p(x<380)$).
٥- احتمال أن يكون وزن السلعة أكبر من 380 جرام (($p(x>380)$).
٦-احتمال أن يكون وزن السلعة أكبر من 300 جرام (($p(x>300)$).
٧- احتمال أن يكون وزن السلعة أقل من 320 جرام (($p(x<320)$).

١-احتمال أن ينحصر وزن السلعة بين 340 جرام و380 جرام ($p(340<x<380)$).

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$\frac{340-360}{20} < Z < \frac{380-360}{20}$$
$$-1 < Z < 1$$
$$P = 68.27\ \%$$

٢-احتمال أن ينحصر وزن السلعة بين 320 جرام و 400 جرام ($p(320<x<400)$).

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$\frac{320-360}{20} < Z < \frac{400-360}{20}$$
$$-2 < Z < 2$$
$$P = 95.45\ \%$$

٣ـاحتمال أن ينحصر وزن السلعة بين 300 جرام و420 جرام (p(300<x<420)).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$\frac{300 - 360}{20} < Z < \frac{420 - 360}{20}$$
$$-3 < Z < 3$$
$$P = 99.73\ \%$$

٤ـ احتمال أن يكون وزن السلعة أقل من 380جرام (p(x<380)).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$Z < \frac{380 - 360}{20}$$
$$Z < 1$$
$$P = \frac{0.6827}{2} + 0.5 = 84.135\ \%$$

٥ـ احتمال أن يكون وزن السلعة أكبر من 380 جرام (p(x>380)).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$Z > \frac{380 - 360}{20}$$
$$Z > 1$$
$$P = 0.5 - \frac{0.6827}{2} = 15.865\ \%$$

٦ـاحتمال أن يكون وزن السلعة أكبر من 300 جرام (p(x>300)).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$Z > \frac{300 - 360}{20}$$
$$Z > -3$$
$$Z < 3$$
$$P = \frac{0.9973}{2} + 0.5 = 99.865\ \%$$

٧- احتمال أن يكون وزن السلعة أقل من 320 جرام ((p(x<320).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$Z < \frac{320 - 360}{20}$$
$$Z < -2$$
$$Z > 2$$
$$P = 0.5 - \frac{0.9545}{2} = 2.275\ \%$$

أسئلة غير محلولة للطلاب (تمارين للمراجعة)

صندوق يحتوي على 15 كرة منها 10 كرات حمراء و5 كرات بيضاء ، سحبت أربع كرات بشكل عشوائي على التوالي مع ارجاع ، فإن احتمال أن تكون كرتان حمراء وكرتان بيضاء تساوي :-

أ- $\frac{\binom{5}{2}\binom{15}{2}}{\binom{10}{4}}$

ب- $\frac{10}{15}$

ج- $\binom{5}{2}\binom{10}{2}$

د- $\frac{\binom{5}{2}\binom{10}{2}}{\binom{15}{4}}$

إذا كان احتمال النجاح في اختبار الاحصاء 0.85 واحتمال النجاح في اختبار الرياضيات 0.75، واحتمال النجاح في المقررين معاً هو 0.7، فإن احتمال النجاح في أحد المقررين على الاقل تساوي :-

أ- 0.6375

ب- 0.3

ج- 0.9

د- 0.35

التوزيع التالي يمثل التوزيع الاحتمالي للارباح الناتجة عن الاستثمار في الاوراق المالية:-

الاحتمال P(x)	الارباح (بالمليون ريال) (x)
0.35	2
0.30	3
0.25	4
0.10	5

من خلال القيم الوارده بالجدول، فإن <u>القيمة المتوقعة</u> للارباح الناتجة عن الاستثمار تساوي:-

أ- **3.1** مليون ريال.

ب- **1** مليون ريال.

ج- **14** مليون ريال.

د- **100** مليون ريال.

ألقيت قطعة نقود متزنة ثلاث مرات ، وكان التوزيع الاحتمالي لعدد مرات ظهور الصورة على الوجه العلوي للقطعة كما يلي:-

X	0	1	2	3
P(X) = x	1/8	3/8	3/8	?

فإن الاحتمال P(X=3) المكمل للجدول السابق يساوي:-

أ- 1/8
ب- 3/8
ج- 2/8
د- 1

رمي حجر نرد منتظم 5 مرات ، فإذا علمت أن هذه التجربة العشوائية تتبع التوزيع ذو الحدين، فإن احتمال الحصول على الوجه 3 في أربع رميات يساوي:-

أ- 0.003215
ب- 0.03215
ج- 0.401878
د- 0.000129

اذا كان متوسط عدد المكالمات التي تلقاها قسم الشرطة ما بين الساعة التاسعة والساعة العاشرة هو 1.8 مكالمة، فإذا علمت أن هذه الظاهرة تتبع توزيع بواسون ، اوجد احتمال الحصول على ثلاث مكالمات فقط :-

أ- 0.2975
ب- 0.1653
ج- 0.5372
د- 0.1607

إذا علمت أن متوسط وزن أحدى السلع الغذائية يساوي 90 جرام وذلك بانحراف معيارى 5 جرامات تم اختيار وحدة واحدة من هذه السلع بطريقة عشوائية فإذا علمت أن هذه الظاهرة تتبع التوزيع الطبيعي، فإن احتمال أن ينحصر وزن السلعة بين 75 جرام و 105 جرام ((p(75<x<105) يساوي:-

أ- %99.73
ب- %95.45
ج- %68.27
د- %84.135

الواجب الاول

السؤال 1

إذا كانت - :

A={ 11, 12, 13, a, d} , B={ 13, 14, 15, a, c}

والمجموعة الشاملة

U = { 11, 12, 13, 14, 15, c, a, d, e}

فأوجد المجموعة المعبرة عن العلاقة - : (A â^© B)

{ 11, 12, 13, 14, 15, a, d, c}

{ 13, a}

{ 14, 15, c}

{ 14, 15, c, e}

السؤال 2

-1اذا علمت أن - :

A= { 4, 8, 12, 16, 20} , B={ 4, 12, 18, 26, 32}

فإن المجموعة الشاملة تساوي - :

{ U={ 4, 8, 12, 16, 18, 20, 26, 32

{ U= { 4, 12

{ U={ 8, 16, 18, 20, 26, 32

{ U={ 4, 8, 12, 16, 18, 20

السؤال 3

. . . . .هي المجموعة التي تتزايد أو تتناقص بشكل ثابت .

المجموعة المنتظمة .

المجموعة الشاملة .

المجموعة المنتهية .

المجموعة الجزئية .

السؤال 4

1- اذا علمت أن - :

U= {80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100}, A={80, 90, 96, 98, 100}

حيث أن U تمثل المجموعة الشاملة ، فإن المجموعة تساوي - :

{80, 82, 84, 86, 88, 92, 94, 100}

{80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100}

$\boxed{\{82, 84, 86, 88, 92, 94\}}$

{80, 90, 96, 98, 100}

السؤال 5

1- إذا علمت أن

A = { 4 , 8 , 12 , 20 , 28} , B= { 8 , 16 , 24 , 32 }

أوجد - : (A U B)

{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40}

{32, 28, 24, 20, 16, 12, 8}

$\boxed{\{32, 28, 24, 20, 16, 12, 8, 4\}}$

{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28}

السؤال 6

إذا علمت أن قسم المحاسبة بالكلية يطرح 6 مقررات وقسم الادارة يطرح 4 مقررات، اراد طالب ان يسجل في مقرر واحد فقط . بكم طريقة يمكن له التسجيل - :

10

24

2

1. 5

السؤال 7

اذا كان لدينا الارقام (1,4,6,8) فكم عددا يمكن تكوينه من منزلتين اذا كان يسمح بتكرار العدد - :

8

2

16

4

السؤال 8

. . . . -1هي المجموعة التي تتضمن جميع العناصر التي تكون تحت الدراسة .

المجموعة الشاملة .

المجموعة الجزئية .

المجموعة الخالية .

المجموعة المنتهية .

السؤال 9

-1إذا كانت المجموعة - :

A={ 10, 20, 30, 40}

و المجموعة

B={ 0, 10, 16, 20, 30, 40, 50}

ففي هذه الحالة فإن العلاقة بين كل من المجموعتين تأخذ أي من الأشكال التالية :

تأخذ أي من الأشكال التالية :

B ↄ A

A ↄ B

A≡B

A=B

سؤال 10

كتب مختلفة على رف المكتبة مع الاخذ 8 كتب مختلفة من أصل 5 اراد امين مكتبة ترتيب بعين الاعتبار ترتيب هذة الكتب فبكم طريقة يمكنة ترتيب هذة الكتب

6720

56

5040

336

الواجب الثاني

السؤال 1
تقدم شخصان لنفس الاختبار ، فإذا كان احتمال نجاح الأول 0.8 واحتمال نجاح الثاني 0.7، فإن احتمال نجاحهما معاً (إذا علمت أنها تمثل حوادث مستقلة) يساوي:-
0.94
$\boxed{0.56}$
0.06
1.5

السؤال 2
إذا اعطيت قيم الاحتمالات التالية:-
p(a) = 0.8 , p(b) = 0.7 , p(a من اليمين إلى اليسار تقاطع b)= 0.6
فإن الاحتمال
p(a من اليمين إلى اليسار اتحاد b)
يساوي:-
0.4
0.56
$\boxed{0.9}$
0.2

السؤال 3
أحد المصانع يمتلك ثلاث آلات a,b,c () ، فإذا علمت أن الآلة -a-3 تنتج 40 %من انتاج المصنع ، والآلة b تنتج 35% من انتاج المصنع ، أما الآلة c فتنتج % 25من الانتاج ، وكانت نسبة المعيب من انتاج الآلة a تساوي 5 % ، والانتاج المعيب من الالة b يساوي 4% والانتاج المعيب من الآلة c يساوي 3%، فإذا تم اختيار احد الوحدات من انتاج المصنع عشوائياً ، اوجد أحتمال أن تكون معيبة.
0.415
0.12
0.9585
$\boxed{0.0415}$

السؤال 4
إذا كان احتمال النجاح في اختبار الاحصاء 0.85 واحتمال النجاح في اختبار الرياضيات 0.75، واحتمال النجاح في المقررين معاً هو 0.7، فإن احتمال النجاح في أحد المقررين على الاقل تساوي:-
0.35
0.3
0.6375
$\boxed{0.9}$

السؤال 5

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية

أعزب

متزوج

المجموع

القسم الأول

10

14

24

القسم الثاني

16

28

44

القسم الثالث

20

12

32

المجموع

46

54

100

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، فإن احتمال أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني يساوي:-

$\boxed{0.68}$

0.1056

0.44

0.24

السؤال 6

رمي حجر نرد مرة واحد ، فإن احتمال الحصول على رقم أكبر من 2 على الوجه العلوي يساوي:-

0.833

$\boxed{0.667}$

0.167

0.5

السؤال 7

تم رمي قطعة نقود خمس مرات، فإن احتمال ظهور صورة واحدة على الاقل يساوي:-

0.5

0.03125

$\boxed{0.96875}$

32

السؤال 8

a-b-cأحد المصانع يمتلك ثلاث آلات) ، فإذا علمت أن الآلة a تنتج 40 % من انتاج المصنع ، والآلة b تنتج 35 % من انتاج المصنع ، أما الآلة c فتنتج 25 %من الانتاج ، وكانت نسبة المعيب من انتاج الآلة a تساوي 5 % ، والانتاج المعيب من الالة b يساوي 4 % والانتاج المعيب من الآلة c يساوي 3 %، فإذا تم اختيار احد الوحدات من انتاج المصنع عشوائياً ، اوجد أحتمال أن تكون معيبة و من انتاج الآلة الأولى.

$\boxed{0.481928}$

0.337349
0.0415
0.180723

السؤال 9

إذا كان احتمال النجاح في مقرر مبادئ الاحصاء 0.7 واحتمال النجاح في مقرر الاحصاء للادارة 0.85 ، واحتمال النجاح في المقررين معاً 0.6 ، فإن احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء للادارة بشرط ان يكون قد نجح في مقرر مبادئ الاحصاء يساوي:-

0.824
0.706
0.85

$\boxed{0.857}$

السؤال 10

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية أعزب متزوج المجموع
القسم الاول 101424
القسم الثاني162844
القسم الثالث201232
المجموع4654100

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، فإن احتمال أن يكون من القسم الأول وأعزب يساوي:-

0.1104
0.01
10

$\boxed{0.1}$

الاختبار الفصلي

السؤال 1

اذا كان معدل عدد الاهداف المسجله لفريق برشلونه هو 3 اهداف بالمباراه ما هو توقع عدد الاهداف في 4 مباريات

10

$\boxed{12}$

3

5

السؤال 2

ما هو عدد الطرق اختيار 3 احرف من الاحرف التاليه a,b,c,d,e,f ؟

$\boxed{120}$

20

60

81

السؤال 3

اذا كان هنالك نادي عدد اعضائة 10000 عضو وكان اعمار الاعضاء يخضع لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي 35 وانحرافه المعياري 10 اوجد عدد الاعضاء الذين تقل اعمارهم عن 30 :

6915

10000

$\boxed{3085}$

0

السؤال 4

ما هو عدد عناصر الفضاء العيني لتجربة تسجيل نتائج 3 مباريات لفريق كرة قدم

9

$\boxed{27}$

6

3

السؤال 5

بكم طريقة يمكن كتابة عدد مكون من منزلتين من الارقام التالية 1,2,3,4,5 بحيث أن التكرار مسموح

10

20

$\boxed{25}$

45

السؤال 6
يعتبر توزيع ذات الحدين توزيعا:

منفصل

متصل
منفصل ومتصل
غيرذلك

السؤال 7
إن عدد طرق إختيار كتاب واحد فقط لطالب لديه الخيار بين 7 كتب في الرياضيات و 3 كتب في الاحصاء و 10 كتب في الاقتصاد هو:

20

210
10
30

السؤال 8
اذا كان x يخص لتوزيع طبيعي وسطه 10 وتابينه 16 ماهي القيمة الخام x المقابلة للقيمة المعيارية z=2
0.5
2

18

42

السؤال 9
اخذت عينه من الماء الموجدود في مسبح ما فوجد انها تحتوي على 4 بكتيريا في 1 سم3 فما هو الانحراف المعياري لعدد البكتيريا في 4 سم3

16

4
12
2

السؤال 10
اذا كان احتمال نجاح طالب في مادة الإحصاء هو 0.6 فان احتمال رسوبه

0.4

-0.6
1
0

السؤال 11
من خصائص التوزيع الطبيعي:
المساحه تحت المنحنى تساوي 1
الوسط يساوي الوسيط
متماثل حول الوسط الحسابي
جميع ما ذكر صحيح

السؤال 12
ماهو عدد الطرق الممكنة لاختيار لجنة مكونة من 3 طلاب من شعبة فيها 10 طلاب
120
1000
720
30

السؤال 13
عدد الاعداد المكونة من ثلاثة منازل التي يمكن تكوينها من 1,2,3,4,5,6 دون السماح بالتكرار هو
18
216
36
120

السؤال 14
التوزيع الطبيعي يعتبر :
توزيع منفصل
توزيع متصل
كلاهما
ليس متصل ولا منفصل

السؤال 15
احتمال الحادث المؤكد هو
1
-1
0
100

السؤال 16
بكم طريقة يمكن سحب 3 كرات على التوالي من صندوق فيه 5 كرات دون السماح بالارجاع ؟
15
20
$\boxed{60}$
125

السؤال 17
p(1) = 0.3 , p(2) = 0.5 , p(4) = 0.2
أوجد التوقع الرياضي:
1.3
1
-1
$\boxed{2.1}$

السؤال 18
اذا كان احتمال ان ينجح محمد هو 0.8 واحتمال ان ينجح محمد وأحمد هو 0.4 فإن احتمال نجاح أحمد إذا علم أن محمد قد نجح يساوي :
0.6
$\boxed{0.5}$
0.4
0.3

السؤال 19
عدد عناصر الفضاء العيني عند رمي حجر نرد 4 مرات
6
24
36
$\boxed{1296}$

السؤال 20
عدد الطرق لاختيار مدينة واحدة لقضاء الاجازة السنوية من بين 5 مدن عربية و 9 مدن اجنبية هو
4
14
$\boxed{45}$

السؤال 21
اذا كانت درجات الطلاب في مقرر الإحصاء للإدارة تتبع توزيع طبيعي بمتوسط 70 درجة وتباين 25 درجة فاذا اختير احد الطلاب عشوائيا فما احتمال ان تكون درجته اقل من 75؟

0.8643

0.8413

0.1587

0.2367

السؤال 22
اذا كان متوسط المكالمات التي تجريها سيدة في اسبوع معين يساوي 6 ، فإن التباين للمكالمات التي تجريها السيدة خلال اسبوعين يساوي :

6

10

12

0

السؤال23
اطلق صياد 3 رصاصات على هدف , فإذا كان احتمال إصابة الهدف هو 0.8 أوجد احتمال اصابة الهدف على الاكثر مرة واحدة

0.896

0.008

0.096

0.104

السؤال 24
ان عدد طرق اختيار كتاب واحد فقط لطالب لديه الخيار بين 7 كتب في الرياضيات و 3 كتب في الاحصاء و 10 كتب في الاقتصاد هو:

10

20

30

210

السؤال 25

بكم طريقة يمكن كتابة عدد مكون من منزلتين من الارقام التاليه 1,2,3,4,5 بحيث ان التكرار مسموح

$\boxed{20}$

25

10

45

السؤال 26

عدد طرق ترتيب 6 طلاب حول دائرة مستديرة يساوي

5

15

24

$\boxed{120}$

السؤال 27

في تجربة القاء حجر نرد مرتين ما هو احتمال ظهور عدد فردي في كلا الرميتين

$\boxed{\frac{1}{4}}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{36}$

$\frac{1}{9}$

السؤال 28

اذا كان $P(1) = 0.3, P(2) = 0.5, P(4) = 0.2$ اوجد التوقع الرياضي

$\boxed{2.1}$

1.3

1

1-

السؤال 29

يكون الحادثان متنافيان اذا كان

$P(A \cap B) =$

- $P(A) - P(B)$
- $\boxed{0}$
- 1
- $P(A) \times P(B)$

السؤال 30

اذا كان التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل x هو 9 اوجد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل y اذا علمت ان y=3x + 1

- 18
- 6
- $\boxed{28}$
- 81

السؤال 31

في تجربة القاء حجر نرد مرة واحدة احتمال الحصول على العدد يقبل القسمه على 3 يساوي

- $\boxed{\frac{1}{2}}$
- $\frac{2}{6}$
- 2
- $\frac{1}{6}$

السؤال 32

في تجربة القاء حجر نرد مرتين ما هو احتمال ان يكون مجموع العددين الظاهرين يساوي 9

- $\frac{3}{19}$
- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{36}$
- $\boxed{\frac{1}{9}}$

السؤال 33

اذا كان $P(A) = 0.4, P(B) = 0.2$ اذا علمت ان الحادثان مستقلان فان $P(A \cup B)$ يساوي

- 0.8
- 0.6
- $\boxed{0.52}$
- 0.08

السؤال 34

اذا كان $P(A) = 0.4, P(B) = 0.2$, $P(A \cap B) = 0.1$, اوجد $P(B - A)$

- $\boxed{0.1}$
- 0.3-
- 0.4
- 0.5

السؤال 35

يكون الحادثان مستقلان اذا كان

$P(A \cap B) =$

0

$\boxed{P(A) \times P(B)}$

$P(A) - P(B)$

1

السؤال 35

اذا كان $P(A) = 0.3,\ P(B) = 0.5,\ P(A \cap B) = 0.2$ اوجد $P(B/A)$

$\frac{4}{5}$

$\frac{3}{5}$

$\frac{2}{3}$

$\boxed{\frac{2}{5}}$

السؤال 36

اذا كان p(1)=a , p(2) = 2a , p(4)= 5a

يمثل توزيعا احتماليا اوجد قيمة : a

3/7

$\boxed{1/8}$

1/5

1

السؤال 37
ماهو عدد الطرق لاختيار 3 احرف من الاحرف التالية a,b,c,d,e,f ؟
60
81
$\boxed{20}$
120

السؤال 38
كم لوحة ارقام دراجات يمكن الحصول عليها اذا كانت اللوحة مكونة من 3 ارقام فقط بشرط أن يبدأ الرقم بالعدد 4؟
1000
20
200
$\boxed{100}$

السؤال 39
اذا كان التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل x هو 9 اوجد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل y اذا علمت أن
$y=3x+1$
$\boxed{28}$
18
6
81

السؤال 40
يحتوي كيس على ثلاث كرات حمراء و خمس كرات بيضاء و كرتان سوداء سحبت كوره واحده ما احتمال ان تكون حمراء
1/3
$\boxed{7/10}$
7
3/10

السؤال 41

احدى الخيارات التاليه لا يمثل ناتج احتمال

- $\frac{2}{7}$
- $\boxed{1.2}$
- 90%
- 0.5

السؤال 42

اوجد باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري $p(0.55 \le z \le 1.1)$

- 0.7088
- 0.8643
- 1
- $\boxed{0.1555}$

السؤال 43

اذا كانت دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المتصل معرفة في الفترة $[a,b]$ فان توقعه الرياضي يعطي بالعلاقة

- $\int_a^b x+f(x)\,dx$
- $\int_a^b x^2 f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx$
- $\boxed{\int_a^b xf(x)\,dx}$

السؤال 44

اذا كان $P(B) = 0.9$, $P(A) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.8$, اوجد $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

- $\boxed{0.2}$
- 1
- 0.6
- 0.4

السؤال 45

السؤال 10

عند رمي حجر نرد مره واحده ما هو احتمال ظهور عدد يقبل القسمة على 2

- 1
- $\frac{1}{6}$
- $\boxed{\frac{1}{2}}$
- 3

السؤال 46

السؤال 5

عائله مكونه من 4 اطفال ما هو تباين عدد الذكور في العائلة

- 1
- 2
- 3
- $\frac{3}{4}$

الجواب:

1

السؤال 47

السؤال 3

مدى المتغير العشوائي المنفصل هو عباره عن مجموعه .... من الاعداد الحقيقية

- غير منتهية
- غير معدودة
- متماثلة
- معدودة

الجواب:

معدودة

السؤال 48

اذا كان معدل عدد الاهداف المسجلة لفريق برشلونه هو 3 اهداف بالمباراه ماهو توقع عدد الاهداف في 4 مباريات ؟

5

3

12

السؤال 49
اذا كان التباين للمتغير العشوائي المنفصل x هو 9 اوجد الانحراف المعياري للمتغير العشوائي المنفصل y اذا علمت ان
y=3x+1

28

$\boxed{9}$

81

السؤال 50
اوجد باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري P(Z>-1.23)

$\boxed{0.8907}$

0.1093
0.1151
0.234

السؤال 51
بكم طريقة يمكن ترتيب 3 اشخاص في صف ؟
3
2
12

$\boxed{6}$

السؤال 52

في تجربة القاء حجر نرد 4 مرات ما هو احتمال عدم ظهور عدد يقبل القسمه على 3 ؟

$\boxed{\frac{16}{81}}$

$\frac{2}{3}$

0

$\frac{13}{27}$

السؤال 53
بكم طريقة يمكن كتابة عدد مكون من منزلتين من الارقام التالية 1,2,3,4,5 بحيث أن التكرار غير مسموح
10
20
25
45

السؤال 54
اذا كان احتمال شفاء مريض من مرض معين هو 0,4 فاذا دخل المستشفى 6 مرضى مصابين فما هو احتمال شفائهم جميعا ؟
0,4
0,046656
0,0786
0,00409

السؤال 55
عند رمي حجر نرد مرتان وكان المتغير العشوائي x يمثل عدد مرات ظهور عدد اقل من 3 احسب التباين
4/9
4/6
2/6
1/2

السؤال 56
أوجد باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري مايلي $P(z \geq 1.23)$

0.8907
0.1093
0.1245
0.1390

السؤال 57
احتمال ظهور عددين مجموعهما 8 عند رمي حجر نرد مرتين هو:
7/36
1/9
5/6
5/36

السؤال 58

اذا كانت درجات الطلاب في مادة الاحصاء للإدارة تتبع توزيع طبيعي بمتوسط 50 درجه وانحراف معياري 10 فان الدرجة المعياريه المناظره للدرجه الخام 60 هي

-1

10

$\boxed{1}$

- 10

السؤال 59

اذا كان $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.2$ اذا عملت ان الحادثات متنافيان فان $P(AUB)$ يساوي

$\boxed{0.6}$

0.8

0.12

0.52

السؤال 60

يمثل حادث $a = \{1,3\}$ ان الحادث في الفضاء العيني $s = \{1,2,3,4,5,6\}$

بسيط

مؤكد

$\boxed{\text{مركب}}$

مستحيل

السؤال 61

اذا كان x يخضع لتوزيع طبيعي $x: N(40,9)$ اوجد $P(x \geq 49)$

$\boxed{0.1587}$

0.0013

0.8413

0.9987

السؤال 62

اذا كان $P(-1) = 0.3, P(2) = 0.5, P(4) = 0.2$ اوجد $P(x \leq -1)$

$\boxed{0.3}$

0.2

0.8

0

السؤال 63

اذا كان $P(-1) = 0.3 , P(2) = 0.5 , P(4) = 0.2$ أوجد $P(x \geq -1)$

0.8

0.5

$\boxed{1}$

0

السؤال 64

السؤال 6

اذا كان x يخضع لتوزيع طبيعي وسطه 10 وتباينه 16 ما هي القيمه المعياريه z المقابله للقيمه الخام x=8

- 0.5-
- 1-
- 0.5
- $\boxed{0.125-}$

السؤال 65

اذا كان x يخضع لتوزيع طبيعي وسطه 10 وتباينه 16 ما هي القيمه الخام x المقابله للقيمه المعياريهz=2

42

2

0.5

$\boxed{18}$

السؤال 66
ما هو عدد الطرق الممكنه لاختيار لجنه مكونه من 3 طلاب من شعبه فيها 10 طلاب

$\boxed{120}$

720

30

1000