هذا السؤال مستوحى من أحد نماذج الاختبارات السابقة مع تصرف بسيط:

أي القيود التالية صحيح ويمكنها أن تكون في برنامج خطي وأيهما خطأ:

(أ) $X1 + X2 < 1$

(ب) $X1 + X2 = 36$

(ج) $X1 - X2 <= 0$

(د) $X1 + X2 <= 0$

(أ): $X1 + X2 < 1$

التقييم	قيد خاطئ

السبب: لا يمكن أن يكون القيد على شكل متباينة أي بعلامة < أو > فقط بل يستوجب أن يكون =< أو >= أو =.

(ب): $X1 + X2 = 36$

التقييم	قيد صحيح

السبب: لا مانع أن يكون القيد بإشارة = طالما لا ينافي شرط عدم السالبية ، فالأشكال المقبولة للقيود هي => أو =< أو =.

(ج): $X1 - X2 <= 0$

التقييم	قيد صحيح

السبب: بنقل X2 للطرف الأيمن للمعادلة سيكون شكل القيد كما يلي: $X1 <= X2$

ولا مانع بأن يكون القيد بهذا الشكل فكلا المتغيرين ليس سالباً وبإمكانه أن يكون ضمن قيود برنامج خطي كأن أقول على سبيل المثال: أن تكون كمية الحديد المستخدمة X1 أقل من كمية الخشب X2 .

(د): $X1 + X2 <= 0$

التقييم	قيد خاطئ

السبب: مع أنه يبدو للوهلة الأولى صحيحاً ، لكن بالتمعن نجد أنه يخالف أهم شرط في البرمجة الخطية ألا وهو شرط عدم السالبية ، وسأقول بشرح ذلك بطريقتين:

الأولى: ماذا لو كان X1 يساوي 5 فما هي مجموعة الحل لـ X2 ؟

الجواب: بما أن المتباينة هي من علامة أصغر من أو يساوي 0 فأكبر نتيجة ممكنة لهذا القيد هي 0. وبالتالي ففي أفضل الأحوال ستكون قيمة X2 هي 5- وذلك مخالف لشرط عدم السالبية فلا يمكن أن يأخذ أحد المتغيرين قيمة سالبة.

الثانية: بنقل المتغير X2 إلى الطرف الأيمن للمعادلة سيكون شكل القيد كما يلي: $X1 <= -X2$

الجواب: هنا يظهر جليا الخطأ في القيد حيث يستوجب أن يكون X1 أصغر من **X2-** أي أنه سيكون حتما رقم سالب وهو مخالف لشرط عدم السالبية.

بالتوفيق ،،،

الأساليب الكمية/

إذا أعطيت البرنامج الخطي التالي وطلب منك استخدام الرسم البياني في الحل:

$$Max\ Z = 40\,x_1 + 50\,x_2$$
$$s.t.$$
$$x_1 + 2\,x_2 \le 40$$
$$4\,x_1 + 3\,x_2 \le 120$$
$$x_1\,,\,x_2 \ge 0$$

الحل:

أولاً: نقوم بتحويل متباينات القيود إلى معادلات.

القيد الأول:

$x_1 + 2\,x_2 = 40$

X_1	0	40
X_2	20	0

نرسم الجدول أعلاه ونقوم بالتعويض بـ 0 لـ x_1 وبالتالي ستكون المعادلة $2\,x_2=40$ وبقسمة 40 على معامل x_2 (2) ستكون قيمة x_2 هي 20 وهذه هي النقطة الأولى (0,20)
للنقطة الثانية نقوم بالتعويض بـ0 لكن هذه المرة لـ x_2 وبالتالي ستكون المعادلة $x_1=40$ وتكون بالتالي قيمة x_1 هي 40 وهذه هي النقطة الثانية (40,0)

القيد الثاني:

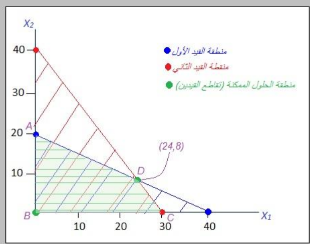
$4\,x_1 + 3\,x_2 = 120$

X_1	0	30
X_2	40	0

نرسم الجدول أعلاه ونقوم بالتعويض بـ 0 لـ x_1 وبالتالي ستكون المعادلة $3\,x_2=120$ وبقسمة 120 على معامل x_2 (3) ستكون قيمة x_2 هي 40 وهذه هي النقطة الثالثة (0,40)

للنقطة الرابعة نقوم بالتعويض بـ0 لكن هذه المرة لـ x_2 وبالتالي ستكون المعادلة $4\,x_1=120$ وبقسمة 120 على معامل x_1(4) ستكون قيمة x_1 هي 30 وهذه هي النقطة الرابعة (30,0)

ثانياً: تحديد نقاط تقاطع كل قيد مع المحورين والتوصيل بين هاتين النقطتين بخط مستقيم لكل قيد.



ملاحظات وقراءات بخصوص الرسم أعلاه:

1- طالما أن القيدين مسبوقين بعلامة ≤ (أصغر من) فالتظليل سيكون للأسفل والعكس صحيح.

2- المنطقة الخضراء هي منطقة الحلول الممكنة وهي التي يتقاطع فيها القيدين.

3- القيد الأول يتقاطع مع x_1 عند (40,0)

4- القيد الأول يتقاطع مع x_2 عند (0,20)

5- القيد الثاني يتقاطع مع x_1 عند (30,0)

6- القيد الثاني يتقاطع مع x_2 عند (0,40)

7- لإيجاد النقطة الجديدة نقوم بحل المعادلتين (القيدين) كما يلي:

$$\times \begin{cases} 1\,x_1 + 2\,x_2 = 40 \\ 4\,x_1 + 3\,x_2 = 120 \end{cases}$$

نضرب كامل المعادلة الأولى في معامل x_2 وهو 4 من المعادلة الثانية ، ونضرب كامل المعادلة الثانية في معامل x_1 وهو 1 من المعادلة الأولى

سيكون شكل القيدين بعد الضرب كما يلي:

$4\,x_1 + 8\,x_2 = 160$ → *القيد الأول بعد الضرب في 4*

$4\,x_1 + 3\,x_2 = 120$ → *القيد الثاني بعد الضرب في 1*

نطرح القيدين ، فيكون الناتج:

$5\,x_2 = 40$

$x_2 = 8$

وبالتعويض في إحدى المعادلتين نستطيع إيجاد قيمة x_1 والتي ستساوي 24

أي أن النقطة الجديدة هي (8, 24)

ثالثاً وأخيراً: إيجاد الحل الأمثل وذلك بحساب قيمة دالة الهدف في أركان منطقة الحل وعندنا هنا أربعة نقاط:

النقاط	$Z = 40\,x_1 + 50\,x_2$	قيمة الدالة
A (0,20)	Z_A = (40x0)+ (50x20)	1000
B (0,0)	Z_B = (40x0)+ (50x0)	0
C (30, 0)	Z_C = (40x30)+ (50x0)	1200
D (24,8)	Z_D = (40x24)+ (50x8)	1360

وبما أن الدالة من النوع تعظيم max فإننا نبحث عن النقطة التي تحقق أكبر قيمة وهي هذه الحالة (24,8) حينها تكون دالة الهدف أكبر ما يمكن عند Z= 1360

لو افترضنا: أن دالة الهدف هي:

$Max\ Z = 40\,x_1 + 30\,x_2$

فسيكون الجدول كالتالي:

النقاط	$Z = 40\,x_1 + 30\,x_2$	قيمة الدالة
A (0,20)	Z_A = (40x0)+ (30x20)	600
B (0,0)	Z_B = (40x0)+ (30x0)	0
C (30, 0)	Z_C = (40x30)+ (30x0)	1200
D (24,8)	Z_D = (40x24)+ (30x8)	1200

أي أن حل المسـألة يكون «متعدد الحلول المثلى» ، لأنه يوجد لنا نقطتين تحققان أكبر قيمة لدالة الهدف عند Z= 1200

بالتوفيق ،،،

تفسير القيم والنقاط في طريقة السمبلكس:

المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	S_1	S_2	الثابت
S_1	1	2	1	0	20
S_2	1	1	0	1	12
Z	-2	-3	0	0	0

طالما أن المتغيرات الأساسية لا توجد بها x1 أو x2 فهذا يعني أن النقطة الحالية هي (0,0) و أنَّ Z كما هو مبين عندها تساوي 0

المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	S_1	S_2	الثابت
X_2	0	1	1	-1	8
X_1	1	0	-1	2	4
Z	0	0	1	1	32

بما أنه لا توجد أي قيم سالبة في الصف الأخير نستنتج وصولنا إلى الحل الأمثل وتكون النقطة التي تحقق لنا أعظم قيمة ممكنة لدالة الهدف هي (4,8) حينها تكون Z = 32

الأساليب الكمية: إضاءة في معايير اتخاذ القرار:-

الجدول التالي يمثل ثلاثة بدائل للاستثمار مع وجود ثلاث حالات:

	جيد	متوسط	ضعيف
أسهم	5	4	2
سندات	12	5	-3
عقارات	11	6	1

معيار الأقصى أقصى (المتفائل) MaxiMax :-

ببساطة ننظر إلى الصفوف ونحدد أكبر قيمة في كل صف. ثم نختار الأقصى بينهم. ففي العقارات مثلا تم اختيار رقم 11 كأكبر رقم في الصف ، لكن الرقم 12 هو الأكبر ضمن المجموعة. بالتالي فالسندات هي البديل الأفضل وفق هذا المعيار.

	جيد	متوسط	ضعيف
أسهم	5	4	2
سندات	$\boxed{12}$	5	-3
عقارات	11	6	1

معيار أقصى الأدنى (المتشائم) MaxiMin :-

ببساطة ننظر إلى الصفوف ونحدد أقل قيمة في كل صف. ثم نختار الأكبر بينهم. ففي العقارات مثلا تم اختيار رقم 1 كأصغر رقم في الصف ، لكن الرقم 2 هو الأكبر ضمن المجموعة. بالتالي فالأسهم هي البديل الأفضل وفق هذا المعيار.

	جيد	متوسط	ضعيف
أسهم	5	4	$\boxed{2}$
سندات	12	5	-3
عقارات	11	6	1

معيار الندم (الأسف) أدنى أقصى MiniMax :-

الخطوة الأولى: نختار أكبر رقم في كل عمود ، كما يلي:

	جيد	متوسط	ضعيف
أسهم	5	4	2
سندات	12	5	-3
عقارات	11	6	1

الخطوة الثانية: نطرح كل قيمة في العمود من القيمة الأكبر المختارة في الخطوة الأولى.

	جيد	متوسط	ضعيف
أسهم	12 - 5= 7	2	0
سندات	0	1	2 – (-3) = 5
عقارات	1	0	1

الخطوة الثالثة: من الجدول المتشكل في الخطوة السابقة نختار أكبر قيمة من كل صف.

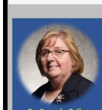
	جيد	متوسط	ضعيف
أسهم	7	2	0
سندات	0	1	5
عقارات	1	0	1

الخطوة الرابعة: من تلك القيمة المختارة نختار أصغر قيمة وبالتالي فالبديل الأفضل وفق هذا المعيار هو العقارات.

	جيد	متوسط	ضعيف
أسهم	7	2	0
سندات	0	1	5
عقارات	$\boxed{1}$	0	1

،،، بالتوفيق

الأساليب الكمية: طريقة أخرى لمعرفة زمن المشروع والأنشطة الحرجة



Dr. Pamela Zelbst
SHSU

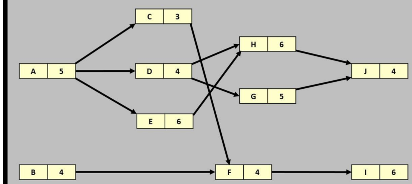
ملاحظة: من خلال مشاهداتي لمحاضرات الدكتورة باميلا زلبست Dr. Pamela Zelbst من جامعة سام هيوستن ستيت Sam Houston State University وذلك لإثـــراء المعرفة الشخصية والاستزادة في طريقة المسار الحرج CPM ، قامت الدكتورة بشـــرح هذه الطريقة لمعرفة زمن المشروع والأنشطة الحرجة من خلال أزمنة الأنشطـــة فقط ، وعدم اللجوء لحساب الزمن الفائض لكل نشاط فأحببت مشاركتكم بهذه الطريقة التي قمت بتطبيقها على عدة مسائل فوجدت أنها سريعة وفعـــالة.

أخوكم: عبدالله @kfu2015

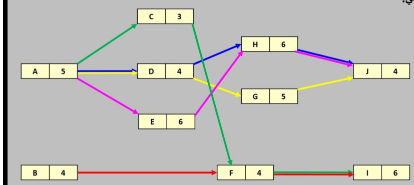
الجدول التالي يمثل الأنشطة والأنشطة السابقة لها مع الوقت اللازم لإكمال النشاط:

الزمن	النشاط السابق	النشاط
5	-	A
4	-	B
3	A	C
4	A	D
6	A	E
4	B, C	F
5	D	G
6	D, E	H
6	F	I
4	H, G	J

لن أخوض في طريقة الرسم ، سأكتفي بوضع كل نشاط مع الزمن اللازم لإكماله بدون ذكر للبدايتـين المبكرة والمتأخرة وكذلك من غير ذكر النهايتين المبكرة والمتأخرة



نقوم الآن بتحديد جميع المسارات الممكنة من أول نشاط إلى آخر نشاط (كل منها بلون مختلف) كما يلي:



نجد أن لدينا 5 مسارات لهذا المشروع هي على النحو التالي:

ACFI ADHJ ADGJ AEHJ BFI

نقوم بجمع أزمنة كل مسار كما هو معطى في السؤال:

ACFI = 5 + 3 + 4 + 6 = 18

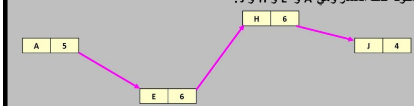
ADHJ = 5 + 4 + 6 + 4 = 19

ADGJ = 5 + 4 + 5 + 4 = 18

AEHJ = 5 + 6 + 6 + 4 = 21

BFI = 4 + 4 + 6 = 14

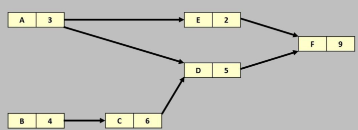
من النظر إلى أزمنة المسارات الخمسة نستطيع تحديد المسار الحرج وهو المسار ذو الوقت الأعلـــى في هذه الحالة فالمسار الحرج هو AEHJ أي بمعنى أن زمن المشروع هو 21 وأنشطته الحرجة هي المكوّنة لذلك المسار وهي A و E و H و J .



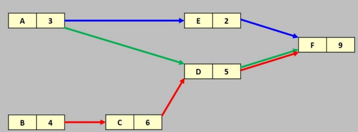
مثال آخر (مقتبس من المحاضرة 11) الجدول التالي يمثل الأنشطة والأنشطة السابقة لها مع الوقت اللازم لإكمال النشاط:

الزمن	النشاط السابق	النشاط
3	-	A
4	-	B
6	B	C
5	A, C	D
2	A	E
9	D, E	F

بنفس طريقة المثال الأول سنقوم بالرسم مع ذكر زمن النشاط فقط:



نقوم الآن بتحديد جميع المسارات الممكنة من أول نشاط إلى آخر نشاط (كل منها بلون مختلف) كما يلي:



نجد أن لدينا 3 مسارات لهذا المشروع هي على النحو التالي:

AEF ADF BCDF

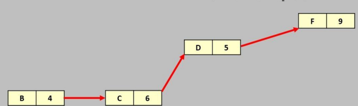
نقوم بجمع أزمنة كل مسار كما هو معطى في السؤال:

AEF = 3 + 2 + 9 = 14

ADF = 3 + 5 + 9 = 17

BCDF = 4 + 6 + 5 + 9 = 24

من النظر إلى أزمنة المسارات الثلاثة نستطيع تحديد المسار الحرج وهو المسار ذو الوقت الأعلـــى في هذه الحالة فالمسار الحرج هو BCDF أي بمعنى أن زمن المشروع هو 24 وأنشطته الحرجة هي المكوّنة لذلك المسار وهي B و C و D و F .

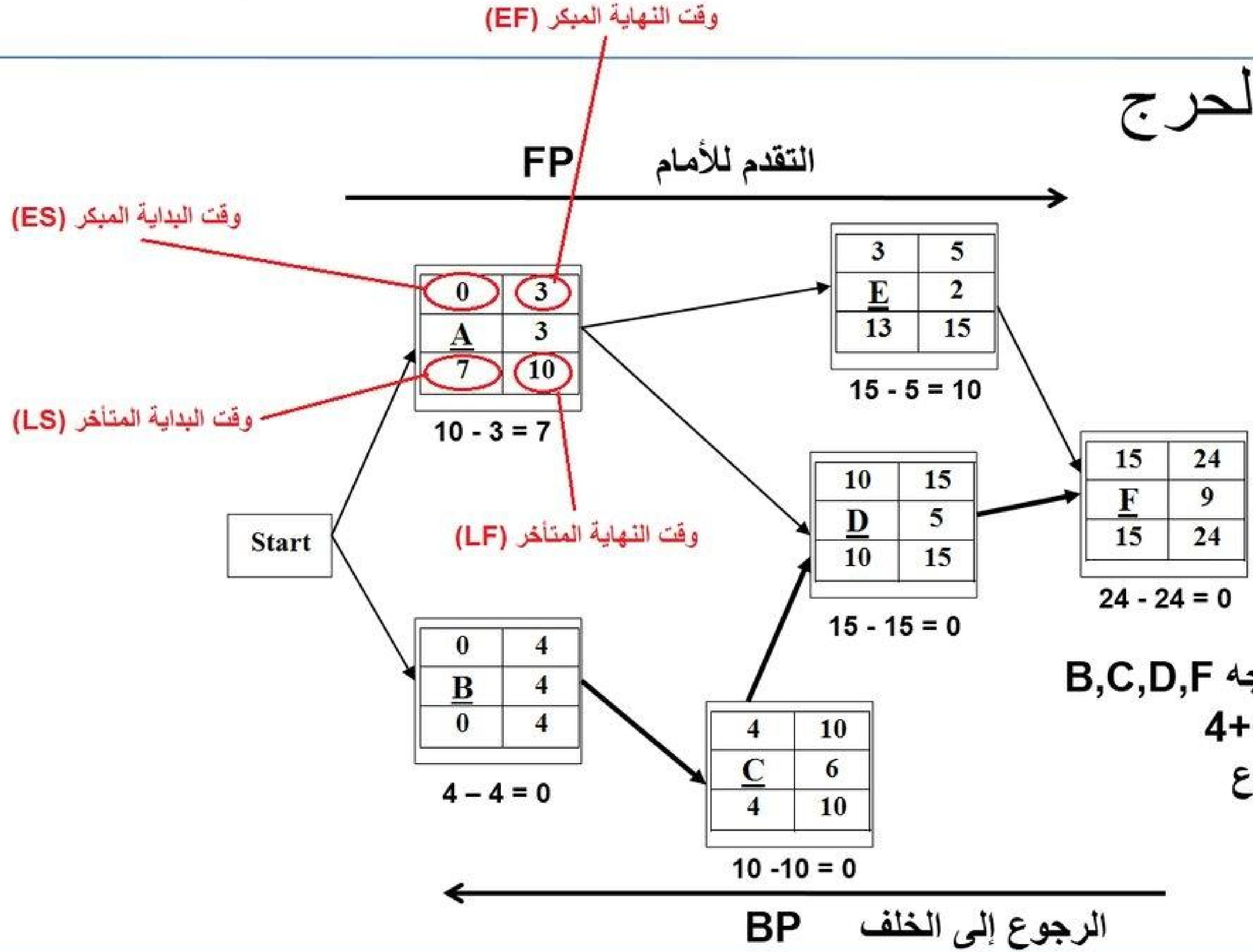


مع التمرن البسيط ستستطيع بإذن الله من خلال النظر فقط تحديد زمن المشروع وأنشطته الحرجة ،، أتمنى أن أكون قد وفقت لشرح الطريقة بشكل مفهوم وواضح مع دعواتي لكم بالنجاح الدائم ،،

،،، بالتوفيق

يتبع: المثـــال

١. المسار الحرج



الأنشطه الحرجه B,C,D,F

4+6+5+9=24

الزمن المشروع

الأساليب الكمية: حالة خاصة في قراءة القيود

لو أعطينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } z = 24X_1 + 72X_2$$
s.t.
$$X_1 + 20X_2 \le 200$$
$$4X_1 + 12X_2 \le 120$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

نستطيع من خلال مقارنة دالة الهدف بأحد القيود اكتشاف أن المسألة ذات حلـــول مثلى متعددة. وذلك لأنه عند مقارنتها (دالة الهدف) بأحد قيودها نجد أن المعاملات متساوية.

لكن قد يثار السؤال التالي الآن وهو أنـــنا لا نجد المعـــاملات 24 و 72 في أحــد القيود؟!

نعم ، لكن عند ضرب القيد الثاني في 6 سيكون القيد كما يلي:

$\boxed{4X_1 + 12X_2 \le 120}$ ضرب 6

$$24X_1 + 72X_2 \le 720$$

وتلك المعاملات مطابقة لمعاملات دالة الهدف ومنها نستطيع اكتشـاف أن المسألـــة ذات حلول متعددة قبل الخوض في حلها بطرق البرمجة الخطية.

لكي نعلم ما إذا كانت المعاملات متساوية بين دالة الهدف وأحد القيود نقوم بقسمة معامل X_1 على معامل X_2 في دالة الهدف أولاً. في هذه الحالة 24÷72=0.33. نقوم بعدها بعمل نفس العملية للقيود فنجد أن القيد الأول 1÷20=0.05 ، والقـيد الثاني 4÷12=0.33. وكما نلاحظ نجد أن المعاملات في كلا دالة الهدف والقيد الثاني متناسبة ولاكتشاف الرقم الذي نقوم بضرب القيد به نقسم أحد المعـــاملات بنظيره في القيد فلو أخذنا معامل X_1 فسيكون الناتج كما يلي 24÷4=6.

،،، بالتوفيق

الأساليب الكمية : حالة خاصة في القيود

لو أعطينا دالة هدف ما تخضع للقيود التالية:

$$X_1 + 4X_2 \leq 20$$

$$2X_1 + 3X_2 \geq 60$$

باتباع طريقة الرسم البياني سنجد ما يلي:

الحل:

أولا: نقوم بتحويل متباينات القيود إلى معادلات:

القيد الأول:

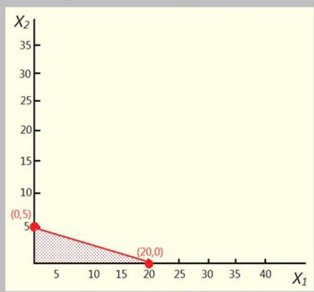
$$X_1 + 4X_2 = 20$$

X_1	0	20
X_2	5	0

نرسم الجدول أعلاه ونقوم بالتعويض بـ 0 لـ X_1 وبالتالي ستكون المعادلة على الشكل التالي: $4X_2 = 20$ وبقسمة 20 على معامل X_2 (4) ستكون قيمة X_2 تساوي 5. أي أن النقطة الأولى هي (0,5).

نقوم كخطوة ثانية في نفس القيد بالتعويض بـ 0 لكن هذه المرة لـ X_2 وبالتالي ستكون المعادلة على الشكل التالي: $X_1 = 20$ أي أن X_1 تساوي 20. فالنقطة الثانية ستكون (20,0).

نقوم الآن بتحديد النقاط ● على الرسم ثم إيصال النقطتين لإيجاد منطقة حل القيد الأول:



وبما أن القيد مسبوق بعلامة **أصغر من** (≤) فسيكون التظليل إلى الأسفل كما هو واضح أعلاه.

القيد الثاني:

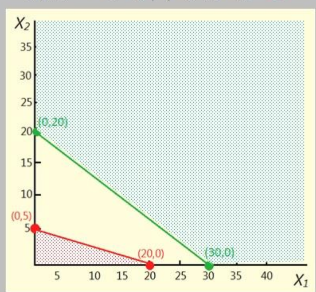
$$2X_1 + 3X_2 = 60$$

X_1	0	30
X_2	20	0

نرسم الجدول أعلاه ونقوم بالتعويض بـ 0 لـ X_1 وبالتالي ستكون المعادلة على الشكل التالي: $3X_2 = 60$ وبقسمة 60 على معامل X_2 (3) ستكون قيمة X_2 تساوي 20. أي أن النقطة الأولى هي (0,20).

نقوم كخطوة ثانية في نفس القيد بالتعويض بـ 0 لكن هذه المرة لـ X_2 وبالتالي ستكون المعادلة على الشكل التالي: $2X_1 = 60$ و بقسمة 60 على معامل X_1 (2) ستكون قيمة X_1 تساوي 30. أي أن النقطة الثانية لهذا القيد هي (30,0).

نقوم الآن بتحديد النقاط ● على نفس الرسم ثم إيصال النقطتين لإيجاد منطقة حل القيد الثاني:



وبما أن القيد مسبوق بعلامة **أكبر من** (≥) فسيكون التظليل إلى الأعلى كما هو واضح أعلاه.

ماذا نلاحظ ؟؟

نلاحظ أن منطقتي حلول القيدين لا تتقاطعان وبالتالي نستنتج أنه لا يوجد حل مقبول وقد يرجع ذلك لخطأ في أحد القيود!

بالتوفيق ،،،

الأساليب الكمية:
إضاءات سريعة في قراءة جدول الحل الابتدائي (الأولي):-

م أساسية	X1	X2	S1	S2	الثابت
Z	-2	-3	*	*	0
S1	1	2	*	*	80
S2	1	1	*	*	50

* لا نحتاج لها

- إيجاد المتغير الداخل: هو المتغير الذي له **أكبر** معامل سالب في دالة الهدف (الصف الأول Z) وهنا نجد جليًا أن أكبر معامل سالب في دالة الهدف هو 3- أي أنَّ المتغير الداخل هو **X2**

م أساسية	X1	X2	S1	S2	الثابت
Z	-2	-3	*	*	0

- إيجاد المتغير الخارج: ويتحدد عن طريق قسمة عمود الثوابت على القيم المناظرة لها في العمود المحوري ويكون المتغير الخارج هو الصف الذي يتضمن **أقل** خارج قسمة.

م أساسية	X1	X2	S1	S2	الثابت
Z	-2	-3	*	*	0
S1	1	2	* ÷	*	80
S2	1	1	* ÷	*	50

فكما هو موضح أعلاه ، يكون ناتج قسمة 80/2 = 40 وَ 50/1 = 50 ، فبذلك يكون **S1** هو المتغير الخارج (م.خ).

- إيجاد العنصر المحوري: نقطة تقاطع العمود الداخل مع الصف الخارج. وهنا هو **2**

م أساسية	X1	X2	S1	S2	الثابت
Z	-2	-3	*	*	0
S1	1	2	*	*	80
S2	1	1	*	*	50

- الصف المحوري الجديد: هي ناتج قسمة الصف القديم على العنصر المحوري 2.

S1	1	2	*	*	80
	÷ 2	÷ 2			÷ 2
X2	0.5	1	*	*	40

بهذا يكون قد حصلنا على معادلة الارتكاز الجديدة مع ملاحظة تغيير م. أساسي إلى X2

- معادلة صف Z الجديدة: نقوم أولا بإنشاء جدول ننذرج فيه قيم صف Z و معادلة الارتكاز الجديدة.

م أساسية	X1	X2	S1	S2	الثابت
Z	-2	-3	*	*	0
X2	0.5	1	*	*	40

نضرب **كل** قيمة في معادلة الارتكاز الجديدة في القيمة الواقعة في العمود المحوري من صف Z وهي هنا **-3** كما هو محاط أعلاه. فيتكون لدينا بعد الضرب الصف التالي:

-3 x X2	-1.5	-3	*	*	-120

بعد ذلك نقوم بطرح الصف القديم لـ Z من الصف الذي تم إنشاؤه قبل قليل ليعطينا صف Z الجديد. مع الانتباه للإشارة السالبة للأرقام حيث أن - و - من شأنها أن تقلب العملية إلى +

$Z_{\text{القديمة}}$	-2	-3	*	*	0
−					
3 x X2	-1.5	-3	*	*	-120
=					
$Z_{\text{الجديدة}}$	-0.5	0	*	*	120

،،، بالتوفيق