مبـــادئ الرياضيـــــات

د. رائـــد الخصــاونة الاستاذ المساعد في قسم المقررات العامة

نظــــام التعلم عن بعد

الفصل الأول

مفاهيم اساسية في الجبر

مفهوم المجموعة

العمليات على المجموعات

التمثيل الهندسي ل عداد

مجموعات الاعداد

الفترات

القيمة المطلقة

الباب الأول

مفاهيم أساسية في الجبر

مجموعات الاعداد

يُرمز للمجموعات عادة بالاحرف الكبيرة مثل

B,A,Y,X

والاشياء التي تتألف منها المجموعة تُسمى عناصر ويُرمزز للعناصر بالاحرف الصغيرة مثل :

x,y,a,b

اذ كان العنصر x هو احد عناصر المجموعة A
يقال x ينتمي الى A

ونكتب $x \in A$

أما

إذا كان العنصر yلاينتمي A للمجموعة

فإننا نكتب لاينتمي : $x \notin A$

الجمموعة الخالية: هي المجموعة التي لا يوجد أي عنصر ويُرمز لها بالرمز ∅أو {} .

مجموعات الاعداد

: يُعبر عن المجموعة بإحدى الطريقتين التاليتن

(طريقة السرد (الحصر :

مثال: ١.

مجموعة الحروف المكونة لكلمة car {x,a,r} =x

طريقة الوصف:

مثال:

car مجموعة الحروف المكونة لكلمة هي :

carحرف من حروف كلمة

{حرف من حروف كلمةcar x:x }=X

مجموعات الاعداد

(المجموعة المنتهية وغير منتهية)

مثال:

مجموعة منتهية $x=\{1,2,3,4\}$

مجموعة غير منتهية $x=\{1,2,3,4,5,6....\}$

(المجموعة الجزئية)

مثال:

اذا كانت x={a,b,c}, y={a,b,c,d},z{a,c,f}

$Y \not\subset Z , Y \subset X$

Yتنتمي الى X

yلاتنتمي الى Z

ملاحظة١ : المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من أي مجموعة.

رتبة المجموعة

رتبة المجموعة X يرمز لها بالرمز |X|

$|X|=5$

فإن $X=\{a,b,c,d,e\}$

ملاحظة:)2

رتبة المجموعة الخالية تساوي صفر لخلوها من العناصر وبالتالي عدد عناصرها يساوي الصفر

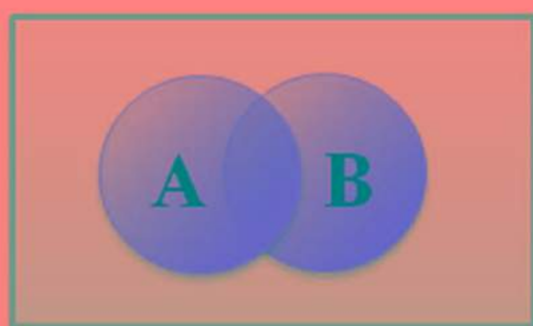
مجموعات الاعداد

العمليات على المجموعات

١ . عملية اتحاد مجموعتين (Union)

إتحاد مجموعتين A وَ B هي أخذ جميع عناصر المجموعتين

ويُرمز لها بالرمز $A \cup B$ وتُعرّف بـ $A \cup B = \{x : x \in A$ **or** $x \in B\}$



مثال (8):

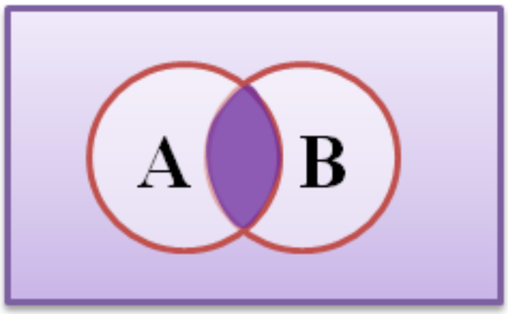
إذا كانت $A = \{2,3,4,5\}$ و $B = \{3,5,7\}$

فإن $A \cup B = \{2,3,4,5\} \cup \{3,5,7\} = \{2,3,4,5,7\}$

١. عملية تقاطع مجموعتين (Intersection)

تقـاطع مجمـوعتين A وَ B هـي إيجـاد العناصـر المشـتركة بينهمـا،

ويُرمز لها بالرمز $A \cap B$ وتُعرّف بـ $A \cap B = \{x : x \in A \quad , \quad x \in B\}$



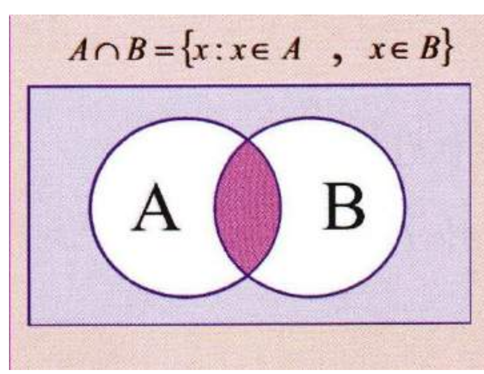
مثال (13):

إذا كانت $A = \{a,b,c,d\},\ B = \{b,d,e,f\},\ C = \{e,f,g,h\}$.

$$A \cap C = \{a,b,c,d\} \cap \{e,f,g,h\} = \phi$$

$$A \cap B = \{a,b,c,d\} \cap \{b,d,e,f\} = \{b,d\}$$

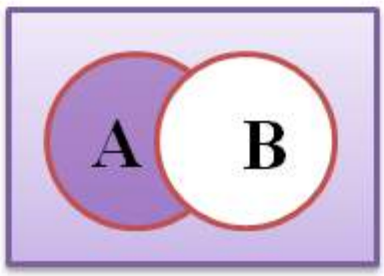
$$B \cap C = \{b,d,e,f\} \cap \{e,f,g,h\} = \{e,f\}$$



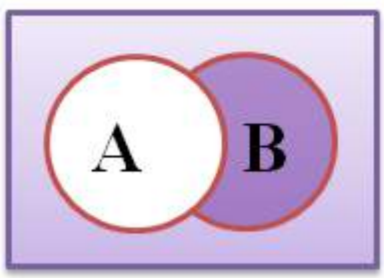
٣.عملية طرح مجموعة من أخرى (Difference)

(الفرق بين مجموعتين A وَ B)

١) $A-B=\{x : x \in A,\ \ x \notin B\}$



٢) $B-A=\{x : x \in B,\ x \notin A\}$



Page 7

ملاحظة: $A-B \neq B-A$ ... \= تعني لا تساوي

مثال:

اذا كانت

$$A=\{1,2,3,4,5,6\}\ ,\ B=\{1,3,5,7\}$$

فإن:

$$A-B=\{1,2,3,4,5,6\}-\{1,3,5,7\}=\{2,4,6\}$$

$$B-A=\{1,3,5,7\}-\{1,2,3,4,5,6\}=\{7\}$$

عملية الإتمام (Complement)

قبل التحدث عن عملية الإتمام لابد من تعريف المجموعة الشاملة(*Universal*)

(المجموعة الشاملة) : تحتوي على جميع العناصر، ويُرمز لها بالرمز U.

مثال (16): إذا كانت

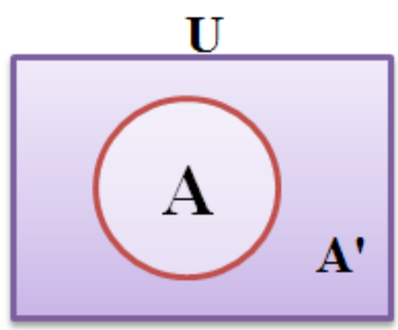
Aمجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية.

Bمجموعة الأعداد الطبيعية الفردية.

فإن المجموعة الشاملة U هي مجموعة الأعداد الطبيعية.

(عملية الإتمام): A' هي المجموعة المتممة للمجموعة A:

$$A' = U - A = \{x : x \in U, x \notin A\}$$



مثال (17):

بالعودة لمثال (16) فإن

مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية $U - A = A' = B$

وأيضاً مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية $U - B = B' = A$

ملاحظة (5):

١) $A \cup A' = U$

٢) $A \cap A' = \phi$

٣) $A \cup U = U$

٤) $A \cap U = A$

مثال (18):

إذا كانت $U = \{1,2,3,...,10\},\ A = \{3,4,5,6\}$. فإن A' .

$$A' = U - A = \{1,2,7,8,9,10\}$$

مجموعات الاعداد

المجموعات العددية

1. مجموعة الأعداد الطبيعية: $N = \{1,2,3,4,...\}$

2. مجموعة الأعداد الكلية: $W = \{0,1,2,3,4,...\}$ ، أي أن $W = N \cup \{0\}$

3. مجموعة الأعداد الصحيحة: $Z = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\} = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,...\}$

4. مجموعة الأعداد القياسية (النسبية أو الكسرية):

يمكن كتابتها على صورة كسر: $Q = \left\{x : x = \frac{a}{b},\ a,b \in Z,\ b \neq 0\right\}$.

التمثيل العشري للأعداد القياسية إما أن يكون منتهي أو أن يكون غير منتهي ومتكرراً.

5. مجموعة الأعداد غير القياسية (غير النسبية – غير الكسرية) $\bar{Q}$:

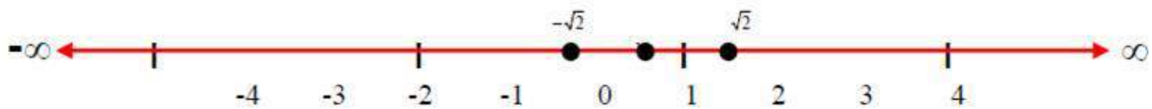
لا يمكن كتابتها على صورة كسر مثل: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \frac{1}{\sqrt{7}}, e, \pi$

التمثيل العشري للأعداد غير القياسية غير منتهي وغير متكرر.

6. مجموعة الأعداد الحقيقية R: وهي مجموعة جميع الأعداد الكسرية وغير الكسرية.

مجموعات الاعداد

خط الاعداد الافقية



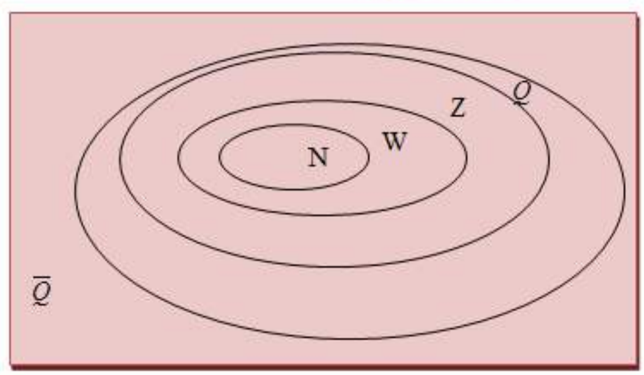
ملاحظة (8):

١) $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$.

٢) $Q \cup \overline{Q} = R$.

٣) $Q \cap \overline{Q} = \phi$.

R



الفترات العددية:

1) الفترات المحدودة:

1. الفترة المغلقة هي:

$$[a,b]=\{x : a \leq x \leq b\}$$

2. الفترة المفتوحة هي:

$$(a,b)=\{x : a < x < b\}$$

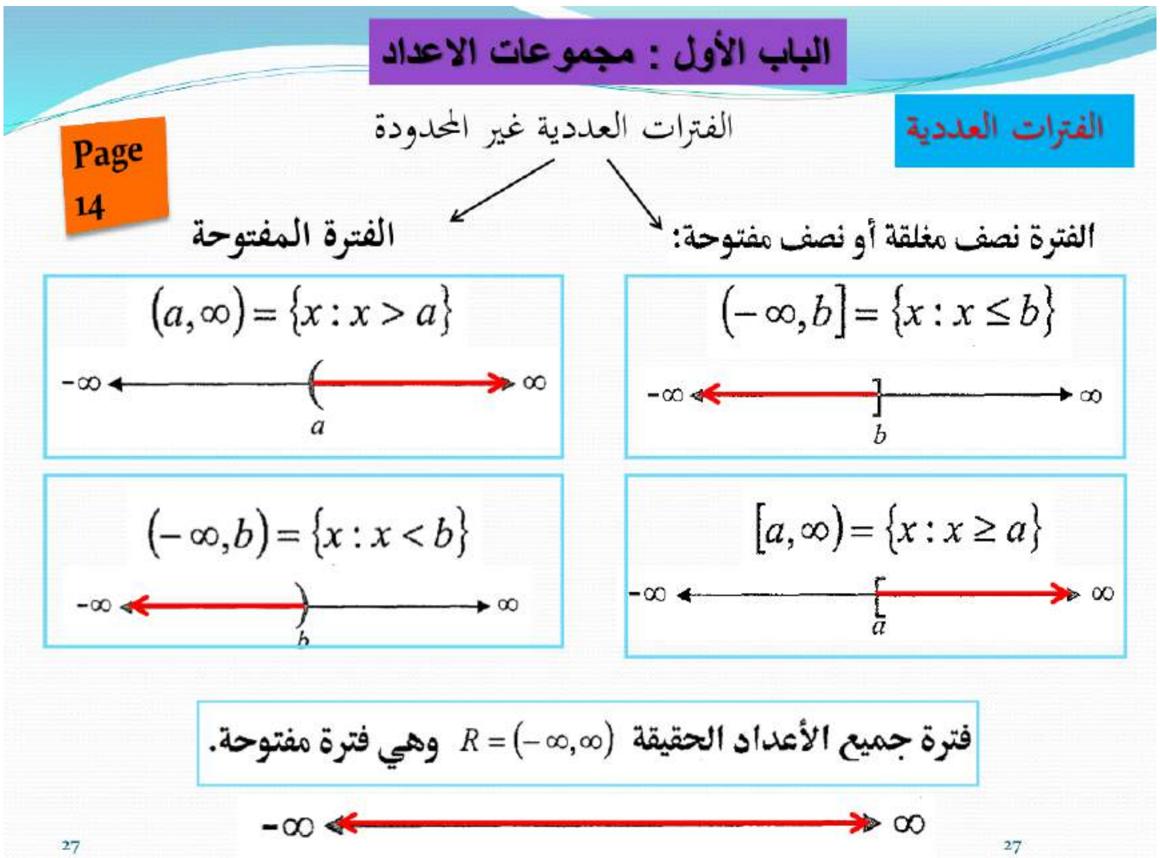
الفترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة

$$(a,b]=\{x : a < x \leq b\}$$

$$[a,b)=\{x : a \leq x < b\}$$

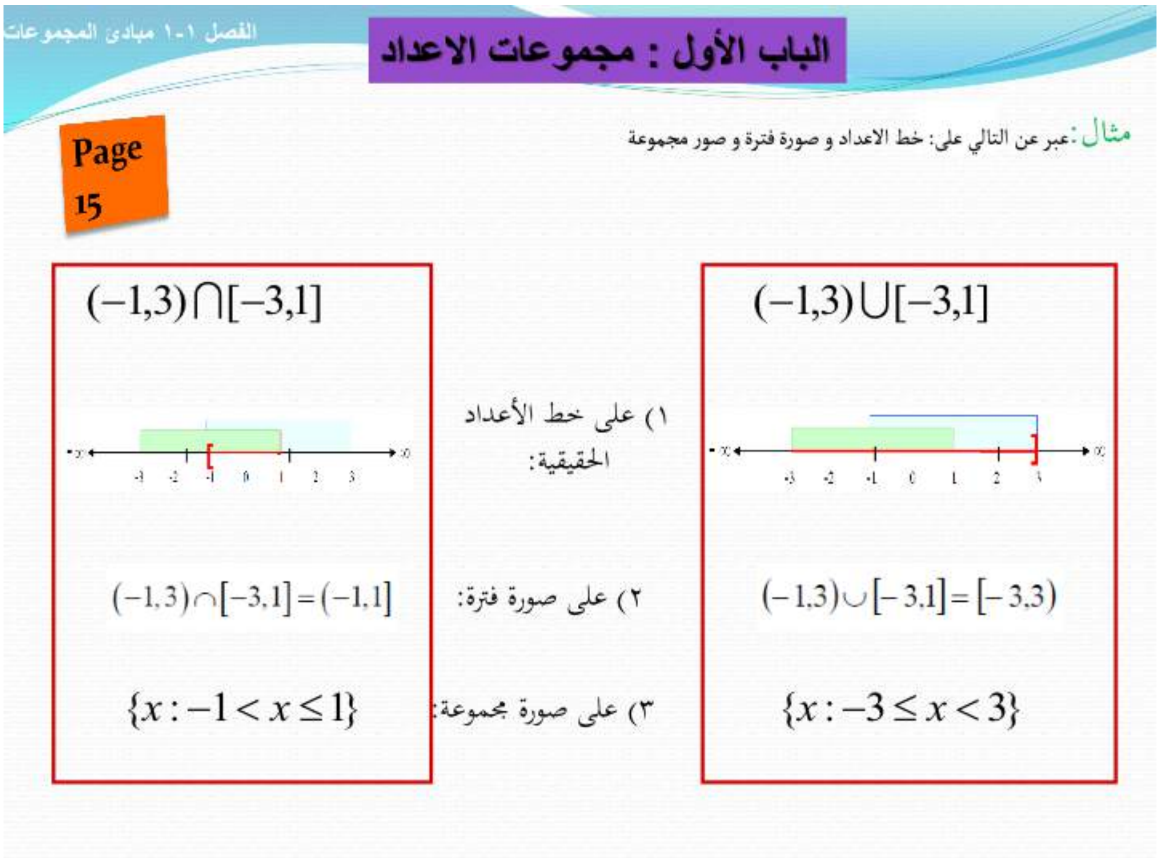
الفترات العددية غير المحدودة:

الفترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة:



مجموعات الاعداد

مثال:عبر عن التالي على خط الاعداد و صورة فترة و صور مجموعة:



القيمة المطلقة

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

مثال (24):

$$|4| = 4, \qquad |-6| = 6$$

المسافة بين عددين على خط الأعداد:

$$d(x, y) = |x - y|$$

ملاحظة (9):

المسافة بين x وَ y هي نفس المسافة بين y وَ x أي أن:

$$|x - y| = |y - x| \quad \text{أو} \quad d(x, y) = d(y, x)$$

مثال(25): **أوجد المسافة بين -1 ، 2 .**

$$d(-1, 2) = |-1 - 2| = |-3| = 3$$

انتهت المحاضرة الاولى .

و اعذروني اعزائي على التأخير اعتذر جداً

ارجو التنبية اذا في أخطاء ●

و بالتوفيق

اختكم: أثير .

هذا ما عندي فإن أحسنت فمن الله، وإن أسأت أو أخطأت فمن نفسي والشيطان

الفصل الثاني :

العمليات الجبرية

الفصل الثانـي :

العمليات الجبرية

الفصل الثاني :

العمليات الجبرية

مثال:- $(-3)(4)=-12$, $(3)(-4)=-12$, $(-3)(-4)=12$, $(3)(4)=12$

$$\frac{-20}{5}=-4 \qquad \frac{20}{-5}=-4 \qquad \frac{-20}{-5}=4 \qquad \frac{20}{5}=4$$

ترتيب إجراء العمليات الجبرية

١- إذا احتوت العملية الجبرية على الجمع الجبري فقط:

فإننا نبدأ من اليسار الى اليمين.

اتجاه التنفيذ من اليسار الى اليمين

$$12-3+4-2=9+4-2=13-2=11$$

أو نجمع الأعداد الموجبة معاً بإشارة موجبة، ونجمع الأعداد السالبة معاً بإشارة سالبة .

$$12-3+4-2=16-5=11$$

الفصل الثانـي :

العمليات الجبريـة

2) إذا احتوت العملية الجبرية على الضرب الجبري فقط نجري العملية بالترتيب حسب ظهورها من اليسار إلى اليمين.

$$15 \div 5 \times 4 \div 6 = 3 \times 4 \div 6 = 12 \div 6 = 2$$

٣) اذا احتوت العملية الجبرية على عمليتي الضرب الجبري والجمع الجبري فإننا نجري عملية الضرب اولا ثم الجمع

$$6+2x4-15+5=6+8-15+5=14-15+5$$
$$=-1+5=4$$

٤) اذا احتوت العملية الجبرية على اقواس فاننا نجري العملية داخل الاقواس الصغيرة ( ) اولا، ثم الاقواس المتوسطة { }، ثم الاقواس الكبيرة [ ] ابتداءا من الداخل الى الخارج

$$[-40 \div \{ (12 \div 4) x\ 10 + 10\} \div (5 \div -5)] + 4 = [-40 \div \{ (3)\ x\ 10 + 10\} \div (-1)] + 4$$

$$= [-40 \div \{ 3\ x\ 10 + 10\} \div (-1)] + 4 = = [-40 \div \{30 + 10\} \div (-1)] + 4$$

$$= [-40 \div \{ 40\} \div (-1)] + 4 = [-1 \div (-1)] + 4 = 1 + 4 = 5$$

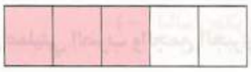
الفصل الثاني :

العمليات الجبرية

الكسور

الكسر عبارة عن مقدار مكون من بسط ومقام مثلاً $\frac{5}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$.

تمثل الأجزاء الملونة ثلاثة أخماس الشكل



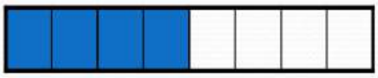
وتكتب رياضياً $\frac{3}{5} = \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}} = \frac{\text{عدد الأجزاء الملونة}}{\text{عدد جميع الأجزاء}}$

تكافؤ الكسور

نقول عن كسرين أنهما متكافئان عندما يمثلان الجزء نفسه من الشكل.

$\frac{8}{16}$

$\frac{4}{8}$



الفصل الثاني :

العمليات الجبرية

إيجاد الكسور المتكافئة:

١) لإيجاد كسور مكافئة لكسر ما نضرب بسطه ومقامه بأي عدد غير الصفر.

الكسور المكافئة للكسر $\frac{2}{3}$ يمكن إيجادها كالتالي:

$$\frac{2}{3}=\frac{(2)(3)}{(3)(3)}=\frac{6}{9}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{(2)(2)}{(3)(2)}=\frac{4}{6}$$

2) لإيجاد كسور مكافئة لكسر ما نقسم بسطه ومقامه على عدد يقبلان القسمة عليه غير الصفر.

$$\frac{4}{8}=\frac{4\div 2}{8\div 2}=\frac{2}{4}$$

وَ

$$\frac{4}{8}=\frac{4\div 4}{8\div 4}=\frac{1}{2}$$

الفصل الثاني :
العمليات الجبرية

تبسيط الكسور

يكون الكسر مكتوباً بأبسط شكل (صورة) عندما لا يوجد عدد غير الواحد يقسم بسطه ومقامه معاً.

1) الكسر $\frac{1}{2}$ مكتوب بأبسط شكل لأنه لا يوجد عدد غير الواحد يقسم 1 و 2 معاً.

2) الكسر $\frac{4}{6}$ ليس مكتوباً بأبسط شكل لأن العدد 2 يقسم العدد 4 و العدد 6 أيضاً.

ملاحظة (1):

يمكن كتابة $\frac{12}{30}$ في أبسط صورة و ذلك بقسمة بسطه و مقامه على 6 فنحصل على $\frac{2}{5}$ حيث لا يوجد عدد غير الواحد يقسم 2 وَ 5 معاً، كذلك $\frac{15}{35}$ بقسمة بسطه و مقامه على 5 يصبح $\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$ حيث لا يوجد عدد غير الواحد يقسم 3 وَ 7 معاً.

الفصل الثاني :

العمليات الجبرية

مقارنة الكسور

١) للمقارنة بين كسرين لهما المقام نفسه نقارن بين بسطيهما ويكون الكسر الأكبر هو الكسر ذو البسط الأكبر.

1) $\frac{7}{5}$, $\frac{3}{5}$ ⟹ 1) $\frac{7}{5} > \frac{3}{5}$ (لأن $7>3$)

2) $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$ ⟹ 2) $\frac{2}{9} < \frac{5}{9}$ (لأن $2<5$)

3) $\frac{-3}{4}$, $\frac{2}{4}$ ⟹ 3) $\frac{-3}{4} < \frac{2}{4}$ (لأن $-3<2$)

4) 0 , $\frac{5}{13}$ ⟹ 4) $0 < \frac{5}{13}$ (لأن $0=\frac{0}{13}$ ومنه $0<5$)

الفصل الثانـي :

العمليات الجبرية

ايهما أكبر

$\frac{3}{4}$ أو $\frac{2}{5}$

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20} \quad , \quad \frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}=\frac{8}{20}$$

$$8<15 \Rightarrow \frac{8}{20}<\frac{15}{20} \Rightarrow \frac{2}{5}<\frac{3}{4}$$

طريقة سهلة سريعة $8 < 15$ ⟸ $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$

قواسم العدد

عندما نكتب عدد كحاصل ضرب عدة أعداد نقول إننا حللنا هذا العدد إلى عوامل.

عوامل العدد: هي الأعداد التي تقسمه دون باق وتسمى قواسم العدد.

1) العدد 6 قاسم من قواسم العدد 24 لأن العدد 24 يقبل القسمة على العدد 6.

2) العدد 6 ليس قاسماً من قواسم العدد 25 لأن العدد 25 لا يقبل القسمة على العدد 6.

يتبع..

تابع للفصل الثاني

- العمليات الجبرية .

القاسم المشترك الاكبر لعددين

القواسم المشتركة لعددين هي الاعداد التي يقسم كل واحد منها هذين العددين، واكبرها يسمى القاسم المشترك الاكبر (ق.م.ك)

مثال: أوجد القاسم المشترك الاكبر للعددين 8 و 12.

قواسم العدد 8 هي 1، 2، 4، 8

وقواسم العدد 12هي 1، 2، 3، 4، 6، 12

القواسم المشتركة بينهما هي 1، 2، 4 اما القاسم المشترك الاكبر فهو 4

القاسم المشترك الأكبر لعددين هو حاصل ضرب قوى العوامل الأولية المشتركة فقط والتي لها الأس الأصغر.

مثال: اوجد القاسم المشترك الاكبر للعددين ١٨ و ٣٠

١٨=٢x٣x٣=(٢)(٣^{٢}) و ٣٠=(٢)(٣)(٥) اذا ق. م. ك.= (٢)(٣)=٦

ملاحظة:

1) لتبسيط كسر نقسم كلاً من بسطه ومقامه على قاسم مشترك لهما.

2) لتبسيط كسر لأبسط شكل (صورة) نقسم كلاً من بسطه ومقامه على القاسم المشترك الأكبر لهما.

مثال: بسط الكسر $\frac{55}{100}$ الى أبسط صوره.

ق. م. ك. للعددين 55 و 100 هو 5:

$$\frac{55}{100}=\frac{55\div 5}{100\div 5}=\frac{11}{20}$$

مضاعفات العدد هو ناتج ضرب العدد في احد عناصر الاعداد الطبيعية ١، ٢، ٣، ...

مثال: المضاعفات الاربعة الاولى للعدد ٥ هي:

٥x١=٥، ٥x٢=١٠، ٥x٣=١٥، ٥x٤=٢٠.

ملاحظه: لكل عددين مضاعفات مشتركه كثيره

مثال: مضاعفات العددين

٢ هي ٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، ١٢، ١٤، ١٦، ١٨،..

٣ هي ٣، ٦، ٩، ١٢، ١٥، ١٨،...

المضاعفات المشتركة للعددين ٢ و ٣ هي٦ و ١٢و ١٨ و ...

المضاعف المشترك الاصغر لعددين هو اصغر مضاعف مشترك لهما ويرمز له م.م.ص.

ملاحظه: للحصول على م. م. ص. لعددين، نكتب سلسلة مضاعفات كل منهما ثم نعين المضاعف المشترك الاصغر م. م. ص.

مثال: اوجد المضاعف المشترك الاصغر للعددي ٢ و ٣

من المثال السابق، المضاعفات المشتركة للعددين ٢ و ٣ هي

٦ و ١٢و ١٨ و ...

اذا فان المضاعف المشترك الاصغر هو اصغرهم وهو ٦.

ملاحظه: المضاعف المشترك الاصغر لعددين هو حاصل ضرب قوى العوامل الأولية للعددين التي لها الاس الاكبر.

مثال: اوجد المضاعف المشترك الاصغر للعددين ١٤ و ٣٦.

$١٤=٢\times ٧$

$٣٦=(٢^{٢})\times(٣^{٢})$

المضاعف المشترك الاصغر هو $٧\times(٢^{٢})\times(٣^{٢})=٢٥٢$

ملاحظة: المضاعف المشترك الاصغر لعددين أوليين هو حاصل ضربهما.

مثال: اوجد المضاعف المشترك الأصغر بين العددين 5, 7؟

لاحظ أن العددين أولين بالتالي م. م. أ. = 5x7= 35

جمع الكسور: عند جمع كسرين لهما المقام نفسه، فان الناتج هو كسر مقامه يساوي مقام الكسرين وبسطه يساوي **مجموع** بسطيهما.

مثال:

$$\frac{3}{5}+\frac{6}{5}=\frac{3+6}{5}=\frac{9}{5}$$

طرح الكسور: عند جمع كسرين لهما المقام نفسه، فان الناتج هو كسر مقامه يساوي مقام الكسرين وبسطه يساوي **الفرق بين** بسطيهما.

مثال: $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5-3}{7}=\frac{2}{7}$

ملاحظه:

(١) عند جمع (طرح) كسرين مختلفي المقام، نقوم بتحويلهما الى كسرين مكافئين لهما، على ان يكون مقامهما مشتركا، ثم نجمع (نطرح) الكسرين الناتجين

(٢) لإيجاد ناتج جمع الكسرين(او طرحهما) نوحد المقامات بإيجاد المضاعف المشترك الاصغر لهما واتخاذه مقاما مشتركا للكسرين.

مثال:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{(3)(2)}{(2)(2)}=\frac{1}{4}+\frac{6}{4}=\frac{1+6}{4}=\frac{7}{4}$$

مثال:

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right)-\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{2}{4}-\frac{3}{4}=\frac{2-3}{4}=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}$$

قوانين جبريه لجمع وطرح الكسور

ليكن a, b, c, d اعداد **حقيقية** غير **صفرية** فان:

1) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

1) $\frac{7}{3}-\frac{1}{2}=\frac{(7)(2)-(1)(3)}{(3)(2)}=\frac{14-3}{6}=\frac{11}{6}$

2) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$

2) $\frac{5}{7}+\frac{3}{2}=\frac{(5)(2)+(3)(7)}{(7)(2)}=\frac{10+21}{14}=\frac{31}{14}$

ضرب وقسمة الكسور

١) حاصل ضرب كسرين هو كسر بسطه عباره عن ضرب البسطين ومقامه عبارة عن ضرب المقامين

٢) لقسمة كسرين فاننا نقوم بوضع الكسر الاول كما هو ونضربه في الكسر الثاني بعد ان نقلب الكسر الثاني (نضع البسط مقاما والمقام بسطا)

قوانين جبريه لضرب وقسمة الكسور

ليكن a, b, c, d اعداد حقيقية غير صفرية فان:

$$1)\ \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \quad\Longrightarrow\quad \frac{3}{5}\times\frac{-2}{7}=\frac{(3)(-2)}{(5)(7)}=-\frac{6}{35}$$

$$2)\ \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc} \quad\Longrightarrow\quad 3\div\frac{2}{5}=\frac{3}{1}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{1}\times\frac{5}{2}=\frac{3\times5}{1\times2}=\frac{15}{2}$$

$$3)\ c\times\frac{a}{b}=\frac{ca}{b} \quad\Longrightarrow\quad 5\times\frac{3}{7}=\frac{5}{1}\times\frac{3}{7}=\frac{5\times3}{1\times7}=\frac{15}{7}$$

انتهت المحاضرة الثانية

اعذروني اعزائي على التأخير اعتذر جداً

- ارجو التنبية اذا في أخطاء

هذا ما عندي فإن أحسنت فمن الله، وإن أسأت أو أخطأت فمن نفسي والشيطان

اختكم: أثير

العمليات الجبرية

الفصل الثاني :- العمليات الجبرية

سنتعرف في هذه المحاضرة على الأسس المفاهيم التالية :-

1. الأسس والجذور .
2. اللوغاريتمات .

أولاً :- مفهوم الأسس :-

تعريف :- إذا كانت x عدد حقيقي مرفوع للقوة n (عدد صحيح) فإن

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ من المرات}}$$

مثلاً نقول بأن :-

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 .$$

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x .$$

ونلاحظ دائماً بأنه أي عدد مرفوع للأس صفر يساوي 1 .

نقول بأنه :-

$$x^0 = 1 .$$

وكذلك في حال وجود أس سالب، فإنه يمكن تحويله إلى أس موجب حسب القاعدة التالية :-

$$x^{-1} = \frac{1}{x} .$$

العمليات الجبرية

وبشكل عام :- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

أما إذا كان :- $\frac{x^{-n}}{y^{-m}} = \frac{y^m}{x^n}$.

أمثلة :- بسط المقادير التالية :-

1) $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3\times3\times3\times3} = \frac{1}{81}$.

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$.

خواص الأسس :-

إذا كان $x, y \in \mathbb{R}$ ، وكان $n, m \in \mathbb{Z}$ فإن :-

1) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$.

مثال :- $x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7$.

2) $x^{-5} \cdot x^{-2} = x^{-5+-2} = x^{-7} = \frac{1}{x^7}$.

3) $x^2 \cdot y^{-2} = x^2 \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{x^2}{y^2}$.

العمليات الجبرية

٢) إذا كان

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}.$$

نشاهد :-

$$\frac{x^3}{x^5} = x^{3-5} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

إعادة كتابة هنا المقدار في شكل حاصل ضرب .

$$\frac{x^3}{x^5} = \frac{\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}}{x\cdot x\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}} = \frac{1}{x\cdot x} = \frac{1}{x^2}.$$

مثال :- بسّط المقدار التالي :-

① $$\frac{x^{-3}}{x^{-5}} = x^{-3-(-5)} = x^{-3+5} = x^2.$$

② $$\frac{x^{-3}}{x^5} = x^{-3-5} = x^{-8} = \frac{1}{x^8}.$$

٣) إن قيمة المقدار :-

$$(x^n)^m = x^{nm}.$$

مثال :- أوجد قيمة :-

① $(x^2)^3 = x^{2*3} = x^6.$

② $(x^{-2})^3 = x^{-2*3} = x^{-6} = \frac{1}{x^6}.$

③ $(x^{-2})^{-3} = x^{-2*-3} = x^6.$

العمليات الجبرية

٤) قيمة المقدار :-

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$$

مثال :- اوجد قيمة مايلي بأبسط صورة :-

① $(5x)^2 = 5^2 \cdot x^2 = 25x^2$.

② $\left(\frac{16}{15}\right)^{-2} = \frac{16^{-2}}{15^{-2}} = \frac{15^2}{16^2} = \frac{225}{256}$.

او عاكس الكل الصورة أخرى

$\left(\frac{15}{16}\right)^2 = \frac{15^2}{16^2} = \frac{225}{256}$.

٥) قيمة المقدار

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

وبالمثل مثال على الخاصية الثانية :-

① $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{2^{-3}}{3^{-3}} = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$.

② $\left(\frac{2^3}{x^2}\right)^{-2} = \frac{(2^3)^{-2}}{(x^2)^{-2}} = \frac{2^{-6}}{x^{-4}} = \frac{x^4}{2^6} = \frac{x^4}{64}$

العمليات الجبرية

* الجذور :-

تعريف :- اذا كان لكل سه $X, Y \in \mathbb{R}$ ، فإن العدد X يسمى جذر n للعدد Y إذا كان :

$$X^n = Y$$ و حيث n : عدد صحيح

مثال: نقول بأن العدد 5 هو الجذر التربيعي للعدد 25

أما العدد 5 فهو الجذر التكعيبي (الثالث) للعدد 125 .

ونقول بأن العدد 2 هو الجذر السادس للعدد 64 .

$$\underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2}_{\text{6 مرات}}$$

ونلاحظ في مفهوم الجذور في الأعداد الحقيقية الخواص التالية :-

(1) كل عدد موجب له جذران تربيعيان ، احدهما موجب والآخر سالب.

مثال :-
$$\sqrt{25} = \pm 5.$$

اما اذا كان العدد سالبا ، فليس له جذر تربيعي .

$\sqrt{-25} \rightarrow$ ليس له جذر حقيقي

(2) في حالة الجذر التكعيبي ، فان للعدد الموجب وكذلك للعدد السالب جذر واحد فقط يشبه اشارة العدد تحت الجذر التكعيبي .

العمليات الجبرية

مثلاً، $\sqrt[3]{27} = 3$.

أما $\sqrt[3]{27} = -3$ $(-27 = -3 \times -3 \times -3)$

تعريف :- الأسس الكسرية :-

إذا كان $n \geq 2$ ، حيث n عدد صحيح، فإنه يمكن تعريف المقدار التالي :-

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \longrightarrow$$ الجذر النوني (n) للمتغير (x)

الأس الكسري

مثال :- بسط كل من المقادير التالية بعد كتابتها بالصورة الجذرية :-

1. $(16)^{1/2} = \sqrt{16} = 2$ or -2 .
2. $(27)^{-1/3} = \frac{1}{27^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = 1/3$.
3. $(27)^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$
4. $(1/25)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{25}} = 1/5$ or $1/-5$.
5. $(-64)^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{-64}} = \frac{1}{-4}$.

العمليات الجبرية

بعض من القواعد الخاصة بالأسس :-

اذا كان كل من $x, y \in R^+$ ، ونفرض أن $n, m \in Z$ فإن :-

$\boxed{1}$ $\sqrt[n]{x^n} = x^{n/n} = x$.

$\boxed{2}$ $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n} \longrightarrow \boxed{(x^m)^{1/n} = x^{m/n}}$

$\boxed{3}$ $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = x^{1/n} \cdot y^{1/n}$

$\boxed{4}$ $\sqrt[n]{x/y} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \dfrac{x^{1/n}}{y^{1/n}}, \quad y \neq 0$.

مثال :- اكتب كلاً من المقادير التالية في الصورة الجذرية بابسط صورة :-

$\boxed{1}$ $\sqrt[5]{x^5} = x^{5/5} = x$.

$\boxed{2}$ $\sqrt[4]{x^2} = x^{2/4} = x^{1/2} \longrightarrow \sqrt{x}$.

$\boxed{3}$ $\sqrt[3]{x^6 y^6} = (x^6)^{1/3} \cdot (y^6)^{1/3}$

$= x^{6/3} \cdot y^{6/3} = x^2 y^2$

$\boxed{4}$ $\sqrt[3]{-8/27\, x^3} = \sqrt[3]{-8/27} \cdot \sqrt[3]{x^3} = -2/3 \cdot x^{3/3} = -2/3\, x$.

العمليات الجبرية

تمرين :- اوجد قيمة كل مما يلي بابسط صورة :-

س1 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{3} \cdot \left(\frac{3}{1}\right)^{2}$

$= 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72.$

س2 $\sqrt[3]{\frac{125}{y^3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{16}{x^4}} = \left(\frac{125}{y^3}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{16}{x^4}\right)^{1/4}$

$= \frac{(125)^{1/3}}{(y^3)^{1/3}} \cdot \frac{(16)^{1/4}}{(x^4)^{1/4}}$

$= \frac{\sqrt[3]{125}}{y} \cdot \frac{\sqrt[4]{16}}{x}$

$= \frac{5}{y} \cdot \frac{2}{x} = \frac{10}{xy}.$

س3 $(x)^0 + (9)^{1/2} - (8)^{-1/3} = 1 + \sqrt{9} - \frac{1}{\sqrt[3]{8}}$

$= 1 \pm 3 - \frac{1}{2}$

في حالة الموجب

$= 4 - \frac{1}{2} = \frac{2 \times 4}{2 \times 1} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

في حالة السالب

$= -\frac{2}{1} - \frac{1}{2} = -\frac{4}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}.$

العمليات الجبرية

مسائل وتمارين :- (على مفهوم الأسس والجذور)

- اوجد قيمة كل مما يلي بأبسط صورة :-

1) $\sqrt[3]{-81} =$

2) $\dfrac{x^{-5}}{x^{-1/5}} =$

3) $\sqrt[4]{\dfrac{x^8}{16}}$

4) $\sqrt[9]{\left(\frac{x}{y}\right)^0}$.

العمليات الجبرية

انتهت المحاضرة الثالثة .

و اعذروني اعزائي على التأخير اعتذر جداً

- ارجو التنبية اذا في أخطاء

و بالتوفيق

اختكم: أثير .

هذا ما عندي فإن أحسنت فمن الله، وإن أسأت أو أخطأت فمن نفسي والشيطان

الفصل الثاني

العمليات الجبرية

الفصل الثاني :- العمليات الجبرية .

ثانياً :- اللوغاريتمات :-

مقدمة :- نشأت فكرة اللوغاريتمات عند محاولة لإيجاد حل للمعادلة $X = y^n$ بالنسبة للمجهول n .

فإذا كان كل من X, Y عدد موجب بحيث $Y \neq 1$ ، فإنه يوجد عدد حقيقي n بحيث $X = y^n$ ويسمى العدد n بلوغاريتم العدد X للأساس Y ويكتب في الصورة :-

$$\log_Y X = n .$$

وباختصار ، يمكن كتابة العلاقة بين المعادلتين السابقتين في الشكل التالي :-

$$X = Y^n \Longleftrightarrow \log_Y X = n .$$

شرط : $X, Y > 0$ ، $Y \neq 1$

المعادلة مكتوبة في الصورة الأسية

المعادلة مكتوبة في الصورة اللوغاريتمية

امثلة : ① اكتب كل من المقادير التالية في الصورة الأسية :

① $\log_{y \to 10} \overset{x}{1000} = \overset{n}{3} \Rightarrow 1000 = 10^{3}$

② $\log_{3} 9 = 2 \Rightarrow 9 = 3^{2}$

③ $\log_{25} 5 = \frac{1}{2} \Rightarrow 5 = 25^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 5 = \sqrt{25}$

$\searrow 5 = 5$

② اكتب كلاً من المقادير التالية في الصورة اللوغارتمية :

① $\overset{y}{(81)}^{\overset{n}{\frac{1}{2}}} = \overset{x}{9} \Rightarrow \log_{81} 9 = \frac{1}{2}.$

② $\left(\frac{1}{4}\right)^{2} = \frac{1}{16} \Rightarrow \log_{4} \frac{1}{16} = 2.$

③ $(5)^{3} = 125 \Rightarrow \log_{5} 125 = 3.$

③ اذا كان لدينا المقدار

$\log_{10} 1000 = n$

أوجد قيمة n ؟

بتحويل المعادلة الى الصورة الأسية، نحصل على :

$1000 = 10^{n}$

$10^{3} = 10^{n} \Rightarrow \boxed{n = 3}$

بشكل عام، يوجد أساسان لهما الأهمية الكبرى في التطبيقات المختلفة

$\boxed{1}$ الأساس ~~...~~ للعدد 10 ويسمى اللوغاريتم العشري.

وعادة في هذا اللوغاريتم لا يكتب الأساس 10 أصلاً.

$$\log_{\square} 10 = \log_{10} 10$$

$\boxed{2}$ الأساس للعدد e (e : عدد ثابت يساوي 2.718)

ويسمى هذا النوع من اللوغاريتم الذي أساسه العدد e باللوغاريتم الطبيعي ويرمز له بالرمز $(\ln) \leftarrow \log_e$.

- خواص اللوغاريتمات :-

① $\log_y 1 = 0$.

مثال :

$$\log_5 1 = 0 \ , \ \log_e 1 = \ln 1 = 0$$

② $\log_x x = 1$.

مثال :

$$\log_{10} 10 = 1$$

$$\log_{25} 25 = 1 \ .$$

③ $\log_y x^n = n \log_y x$.

مثال :- اوجد قيمة المقدار التالي مكتوبة بابسط صورة :-

$$\log_5 5^x = x \log_5 5 = x \cdot 1 = x .$$

مثال :- بسط المقدار التالي :-

$$\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3 \log_{10} 10 = 3 \times 1 = 3$$

④ $\log_z (xy) = \log_z x + \log_z y$.

مثال :- بسط المقدار التالي :-

$$\log_5 (125 \times 10) = \log_5 125 + \log_5 10$$

$$= \log_5 5^3 + \log_5 (5 \times 2)$$

$$= 3 \log_5 5 + \log_5 5 + \log_5 2$$

$$= 3 + 1 + \log_5 2$$

$$= 4 + \log_5 2 .$$

5) $\log_z\left(\frac{x}{y}\right) = \log_z x - \log_z y$.

مثال :- بسط مايلي :-

$$\log \frac{100}{200} = \log 100 - \log 200$$

$10\sqrt{\sqrt{81}}$

$$= \log 10^2 - \log(2 \times 100)$$

$$= 2\log 10 - [\log 2 + \log 10^2]$$

$$= 2 - [\log 2 + 2]$$

$$= 2 - \log 2 - 2 = -\log 2.$$

الحل بطريقة أخرى

$$\log \frac{100}{200} = \log \frac{1}{2}$$

$$= \log 2^{-1}$$

$$= -\log 2.$$

(6) $\log_y \frac{1}{x} = \log_y x^{-1} = -\log_y x$.

مثال :-

$\log \frac{1}{1000} = \log (1000)^{-1}$

$= -\log 10^3 = -3 \log 10$

$= -3 \times 1 = -3$.

أيضاً :-

$\log_5 \frac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = \cancel{3}\ \log_5 5$

$= -1 \times 1 = -1$.

(7) $\log_y \sqrt[n]{x} = \log_y x^{1/n} = \frac{1}{n} \log_y x$.

مثال :- أوجد قيمة ما يلي :-

$\log_3 \sqrt[3]{27} = \log_3 (27)^{1/3} = \frac{1}{3} \log_3 27$

$= \frac{1}{3} \log_3 3^3$

$= \frac{1}{3} \times \cancel{3} \log_3 3$

$= 1 \times 1 = 1$

$\log_3 \sqrt{27}$

$= \log_3 (27)^{1/2} = \frac{1}{2} \log_3 27$

$= \frac{1}{2} \log_3 3^3$

$= \frac{3}{2} \log_3 3$

٣) كثيرات الحدود.

تعريف :- ان كثيرة الحدود في متغير واحد X تكتب في الصورة الشاملة :-

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 .$$

حيث $n \geq 0$ وعدد صحيح.

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ اعداد حقيقية.

ومن الامثلة على :-

$$x^5 - 2x^4 + 3x^2 + x - 1$$

كثيرة حدود من الدرجة الخامسة.

$$x^3 - x^2$$

كثيرة حدود من الدرجة الثالثة.

اما

$$x^3 - x^{1/2}$$

فهذه ليست كثيرة حدود وذلك لوجود الأس $= 1/2$ في الحد الثاني.

عدد كسري.

العمليات الجبرية على المقادير الجبرية :-

تعريف :- المقدار الجبري هو عبارة عن تركيبة من الرموز والاعداد المرتبطة فيما بينها عن طريق العمليات الجبرية الأساسية (الجمع، الطرح ، الضرب ، القسمة) .

مثال :-

$x^2 + 1$ (مقدار جبري مكون من حدين)

كذلك

$5x^3 - 2x^2 + 10$ (مقدار جبري مكون من ثلاثة حدود)

$5x^2 - 10y + 15$ (مقدار جبري مكون من ثلاثة حدود)

العمليات على المقادير الجبرية :-

$\boxed{1}$ في حالة الجمع أو الطرح .

فإننا نجمع أو نطرح المعاملات العددية للمتغيرات المتشابهة بعد ترتيبها إما باستخدام الأسية الأفقية أو الطريقة العمودية .

مثال :- اوجد ناتج جمع المقادير :-

$$(3x^2 - 2x - 5) + (10 - 2x^2 + 5x).$$

الحل : نعيد ترتيب المقدار الثاني ونجمع المعاملات المتشابهة :-

$$\begin{array}{rrrr} + & 3x^2 & -2x & -5 \\ & -2x^2 & +5x & +10 \\ \hline & x^2 & +3x & +5 \end{array}$$

مثال :- اوجد ناتج الطرح بين المقادير :-

$$(3x^2 - 2x - 5) - (10 - 2x^2 + 5x)$$

الحل :-

$$\begin{array}{rrrr} - & 3x^2 & -2x & -5 \\ & -2x^2 & +5x & +10 \\ \hline & 5x^2 & -7x & -15 \end{array}$$

٢) ضرب المقادير الجبرية :-

لإيجاد حاصل ضرب مقدار جبري في آخر فإننا نستخدم عملية التوزيع وقوانين الأسس وقاعدة الإشارات ثم نجمع الحدود المتشابهة إن وجدت .

مثال :- اوجد ناتج ما يلي :-

أ) $\underbrace{5x^2}_{\text{مقدار جبري الأول مكون من حد واحد}}\underbrace{(-2x^3-10x)}_{\text{مقدار جبري الثاني مكون من حدين}} = -10x^5 - 50x^3.$

② $(x-1)(x^2+2x) = x^3+2x^2-x^2-2x.$

المقدار الأول له حدان — المقدار الثاني له حدان

$= x^3 + x^2 - 2x$

٣) قسمة المقادير الجبرية :-

ولإيجاد حاصل القسمة، نستخدم قوانين الأسس، قوانين الكسور، قاعدة الإشارات).

وسنتعرف ع نوعين من قسمة المقادير الجبرية وهما :-

أ) قسمة مقدار جبري مكون من حد واحد على مقدار جبري آخر مكون من حد واحد :-

بحيث :-

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \quad , \quad x \neq 0 .$$

مثال :- اوجد ناتج مايلي :-

① $$\frac{27x^3}{9x^2} = 3x .$$

② $$\frac{24x^3y^2}{6xy^{-2}} = 4x^2y^2y^2 = 4x^2y^4 .$$

ب) قسمة مقدار جبري مكون من أكثر من حد على مقدار جبري آخر مكون من حد واحد :-

وفي هذه الحالة، نستخدم الخاصية التالية :-

$$\frac{x^n + x^{n-1} + \cdots + x + c}{y} = \frac{x^n}{y} + \frac{x^{n-1}}{y} + \cdots$$

مثال :- اوجد ناتج مايلي :-

$$\frac{25x^3 + 5x^2 - 15x}{5x} = \frac{25x^3}{5x} + \frac{5x^2}{5x} - \frac{15x}{5x} = 5x^2 + x - 3 .$$

ملاحظة :- دائماً في عملية قسمة مقدار جبري يتكون من اكثر من حد على مقدار جبري آخر يتكون من حد واحد، فإننا نفضل ترتيب حدود البسط ثم توزيع المقام على كل حد ونطبق قاعدة قسمة جبري جبري بحد واحد على حد واحد .

قد انتهى من الفصل الثاني .

تمارين ومسائل :-

1) اوجد ناتج كل مما يلي :-

(1) $\log_5 \sqrt{125}$ ، (2) $\log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3$.

(2) $(x^2y - xy + 5x) - (xy - 3x^2y - 10x)$

(3) $(6xy)(2x^2y - 3xy^2)$.

(4) $\dfrac{-24x^5y^2 - 8x^3y^3}{-4x^3y^2}$.

انتهت المحاضرة الرابعة للفصل الثاني .

و اعذروني اعزائي على التأخير اعتذر جداً

ارجو التنبية اذا في أخطاء ●

و بالتوفيق

اختكم: أثير .

هذا ما عندي فإن أحسنت فمن الله، وإن أسأت أو أخطأت فمن نفسي والشيطان

الفصل الثالث: تحليل المقادير الجبرية

المحاضرة الخامسة

.

الفصل الثالث : تحليل المقادير الجبرية

مقدمة : الهدف من عملية تحليل المقادير الجبرية هو اعادة كتابتها على صورتها الاساسية قبل عملية الضرب .

وبداية سنتعرف على حاصل ضرب بعض المقادير الجبرية الخاصة والتي سنستخدمها في تسهيل عملية مفهوم التحليل.

أولاً :- حاصل ضرب بعض المقادير الجبرية الخاصة :-

a) $x(y+z) = xy + xz.$

b) $(x-y)(x+y) = x^2 + \cancel{xy} - \cancel{xy} - y^2$

$= x^2 - y^2.$

c) $(x-y)(x-y) = (x-y)^2$

$= x^2 - xy - xy + y^2$

$= x^2 - 2xy + y^2.$

d) $(x+y)(x+y) = (x+y)^2$

$= x^2 + xy + xy + y^2$

$= x^2 + 2xy + y^2$

مثال :- اوجد ناتج مايلي بابسط صوره :

1) $5x(3y-5z) = 15xy - 25xz$.

2) $(3x-4y)^2 = (3x-4y)(3x-4y)$

$= 9x^2 - 12xy - 12xy + 16y^2$

$= 9x^2 - 24xy + 16y^2$

3) $(3x-4y)(3x+4y) = 9x^2 + \cancel{12xy} - \cancel{12xy} - 16y^2$

$= 9x^2 - 16y^2$

4) $\underbrace{-3x(x-y)}_{①}\underbrace{(-3x^2+3xy)}_{②}$

$= (-3x^2+3xy)(-3x^2+3xy)$

$= (-3x^2+3xy)^2$ → قاعدة :- مربع الحد الأول

+ الحد الأول × الحد الثاني × ٢ بالأس

+ مربع الحد الثاني

$= 9x^4 - 9x^3y - 9x^3y + 9x^2y^2$

$= 9x^4 - 18x^3y + 9x^2y^2$.

و) $(\text{ص} + \text{س})^3 = (\text{ص}+\text{س})(\text{ص}+\text{س})(\text{ص}+\text{س})$

$= (\text{ص}+\text{س})(\text{ص}^2 + 2\text{ص}\text{س} + \text{س}^2)$

$= \text{ص}^3 + 2\text{ص}^2\text{س} + \text{ص}\text{س}^2 + \text{ص}^2\text{س} + 2\text{ص}\text{س}^2 + \text{س}^3$

$= \text{ص}^3 + 3\text{ص}^2\text{س} + 3\text{ص}\text{س}^2 + \text{س}^3$

أمثلة :- أوجد ناتج المقادير التالية بأبسط صورة :

أ) $5\text{س}(3\text{ص} - \text{ع}) = 15\text{ص}\text{س} - 5\text{س}\text{ع}$.

ب) $(4\text{ص} - 3\text{س}^2)^2 = (4\text{ص} - 3\text{س}^2)(4\text{ص} - 3\text{س}^2)$

$= 16\text{ص}^2 - 24\text{ص}\text{س}^2 + 9\text{س}^4$.

جـ) $(\text{س} - 2)^3 = (\text{س}-2)(\text{س}-2)(\text{س}-2)$

$= (\text{س}-2)(\text{س}^2 - 4\text{س} + 4)$

$= \text{س}^3 - 4\text{س}^2 + 4\text{س} - 2\text{س}^2 + 8\text{س} - 8$

$= \text{س}^3 - 6\text{س}^2 + 12\text{س} - 8$

ثانياً : التحليل ، ومن الطرق التي سنتعرف عليها في تحليل المقادير الجبرية

١) إخراج العامل المشترك

ملاحظة : التحليل هو عملية عكسية لعملية حاصل ضرب مقادير جبرية . والمقصود بتحليل المقدار الجبري إلى عوامله الأولية (أي لا يمكن تحليل عوامله) إلى حاصل ضرب عوامل جبرية أخرى) .

ثانياً :- طرق التحليل .

ومن الطرق التي سنتعرف عليها في حل تحليل المقادير الجبرية

$\boxed{1}$ اخراج العامل المشترك :-

تعريف : اذا كان لدينا المقدار الجبري

$$XY + XZ$$

فإنه يمكن اخراج العامل المشترك بين الحدين الأول والثاني

بحيث يكتب هذا المقدار على الصورة التالية :-

$$xy + xz = x(y+z).$$

مثال :- حلل كل من المقادير الجبرية التالية إلى عواملها الأولية :

a) $5x + 15xy = 5x(1+3y)$.

b) $5x - 30yz = 5(x - 6yz)$

c) $7x^3 - 5x^2y^3 = x^2(7x - 5y^3)$

d) $2x^3y^2 - 8x^2y^3 + 16xy =$
$2xy(x^2y - 4xy^2 + 8)$

٤ الفرق بين مربعين :-

الصيغة العامة لهذه الطريقة تكتب على النحو الآتي :-

$$(x^2 - y^2) = (x-y)(x+y).$$

مثال :- حلل المقادير التالية إلى عواملها الأولية :-

a) $(x^2 - 9) = (x^2 - 3^2)$

$= (x-3)(x+3)$

b) $(49x^2 - 64y^2) = (7^2x^2 - 8^2y^2)$

$= ((7x)^2 - (8y)^2)$

$= (7x - 8y)(7x + 8y)$

c) $(x^4 - 1) = ((x^2)^2 - 1^2)$

$= (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

يمكن تحليله مرة أخرى ← زوجي

$= (x-1)(x+1)(x^2+1)$

d) $(16 - z^4) = (4^2 - (z^2)^2)$

$= (4 - z^2)(4 + z^2)$

$2^2 - z^2$

$= (2 - z)(2 + z)(4 + z^2)$

للتأكد من صحة الحل: نجد ناتج ضرب المقادير الثلاث ويكون الجواب عبارة عن $(16 - z^4)$.

التمارين والمسائل :

حلل المقادير التالية :

a) $3xz^3 - 9xz - \frac{27}{5}x^2z^2$.

b) $81x^2 - \frac{36}{25}y^2$.

انتهت المحاضرة الخامسة .

و اعذروني اعزائي على التأخير اعتذر جداً

ارجو التنبية اذا في أخطاء ●

و بالتوفيق

اختكم: أثير .

هذا ما عندي فإن أحسنت فمن الله، وإن أسأت أو أخطأت فمن نفسي والشيطان

تابع الفصل الثالث

المحاضرة السادسة – تحليل المقادير الجبرية.

تابع الفصل الثالث :- تحليل المقادير الجبرية

طرق التحليل :-

[1] اخراج العامل المشترك.

[2] الفرق بين مربعين .

ملاحظة :- في حال وجود اشارة + بين حدين مربعين

فانه لايمكن اجراء التحليل في هذه الحالة .

مثال :- حلل المقدار التالي :-

(x^2+25) → (لايمكن تحليله)

وبالتالي هو مكتوب بأبسط صورة).

[3] الفرق بين مكعبين :-

والصيغة العامة لقانون الفرق بين مكعبين هي :-

$$(x^3-y^3)=(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

$(\text{الحد الاول})^3$ ← x ؛ $(\text{الحد الثاني})^3$ ← y ؛ الحد الاول ؛ الحد الثاني ؛ مربع الحد الاول ؛ الحد الاول مضروبا في الحد الثاني ؛ مربع الحد الثاني

مثال :- حلل كل من المقادير الجبرية التالية :-

1) $27x^3 - 8y^3 = 3^3x^3 - 2^3y^3$

$= \left((3x)^3 - (2y)^3\right)$

$= (3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2)$

2) $8x^6 - 125y^9 = 2^3(x^2)^3 - 5^3(y^3)^3$

$= (2x^2)^3 - (5y^3)^3$

وبتطبيق قانون الفرق بين مكعبين ، نحصل على :-

$= (2x^2 - 5y^3)(4x^4 + 10x^2y^3 + 25y^6)$

3) $1/8 - z^3 = (1/2)^3 - z^3$

$= (1/2 - z)(1/4 + 1/2 z + z^2)$

٤ مجموع مكعبين :-

والصيغة العامة لمجموع مكعبين تكتب كما يلي :-

$$(x^3+y^3)=(x+y)(x^2-xy+y^2).$$

مثال :- حلل كل مما يلي إلى عوامله الأولية :-

a) $(27x^3+1)=((3x)^3+1^3)$

$=(3x+1)(9x^2-3x+1).$

b) $\left(\frac{1}{125}+\frac{8}{x^3}\right)=\left(\left(\frac{1}{5}\right)^3+\left(\frac{2}{x}\right)^3\right)$

الحد الأول الحد الثاني

$=\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{25}-\frac{2}{5x}+\frac{4}{x^2}\right)$

5) تحليل المقدار الثلاثي :-

سنتعرف في هذا البند على كيفية تحليل كثيرة حدود من الدرجة الثانية على الصيغة التالية :-

$$ax^2 + bx + c$$

حيث a ,b ,c : اعداد ثابتة .

وسنحاول اعادة كتابة المقدار السابق على الشكل التالي :-

$$(ax^2 + bx + c) = (d_1 x + e_1)(d_2 x + e_2)$$

وسنقوم بتطبيق طريقة المقص أو التحليل المباشر على مثل هذا النوع من المقادير الجبرية

مثال :- حلل المقدار التالي إلى عوامله الأولية :

الحد الأوسط

$3x$

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

$-2x$

$$\begin{array}{ccc} x & & 6 \\ & \times & \times \\ x & & 1 \end{array} \quad \text{or} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \times \\ 2 \end{array}$$

1 2

(نتيجة ١: اذا كانت اشارة الطرف سالبة، تكون اشارة كل عدد في الطرفين مختلفة والعدد الأكبر يأخذ اشارة الوسط).

مثال ٢: حل المقدار التالي :-

(نتيجة ٢)

$$x^2 + 5x \boxed{+} 6 = (x+3)(x+2)$$

(نتيجة ٢: اذا اشارة الطرف موجبة، تكون اشارة كل عدد في الطرفين متشابهة ومساوية لاشارة الوسط).

مثال ٣ :- حل المقدار التالي

(نتيجة ٢)

$$x^2 - 2x \boxed{+} 1 = (x-1)(x-1)$$

مثال ٤ :- حل المقدار التالي :-

(نتيجة ١)

$$x^2 - 2x \boxed{-} 8 = (x+2)(x-4)$$

$2x$

$-4x$

سيأخذها العدد الأكبر.

مثال :- حلل المقادير التالية :-

1) $7x^2 - 49x = 7x(x-7)$.

2) $81 - 9z^2 = (9^2 - (3z)^2) = (9-3z)(9+3z)$

3) $\frac{27}{125} + \frac{y^3}{z^3} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{y}{z}\right)^3 = \left(\frac{3}{5} + \frac{y}{z}\right)\left(\frac{9}{25} - \frac{3y}{5z} + \frac{y^2}{z^2}\right)$

4) $x^2 - 8x + 15$

$= (x-5)(x-3)$

مسائل وتمارين :-

حلل كل من المقادير التالية إلى عواملها الأولية :-

a) $\frac{25}{x^2} - \frac{x^2}{16}$

b) $\frac{1}{64} + \frac{1}{y^3}$

c) $x^2 - 9x - 10$

d) $-81z^3 - 9z^2 + 27z$

$27z$

انتهت المحاضرة السادسة
بالتوفيق للجميع .

المحاضرة السابعة
مبادي الرياضيات

الفصل الرابع : المقادير الكسرية

ما هو المقدار الكسري ؟

تعريف : المقدار الكسري هو عبارة عن ناتج قسمة كثيرتي حدود بحيث تسمى المقسوم بالبسط والمقسوم عليه بالمقام .

ومن الأمثلة على المقادير الكسرية :-

1) $$\frac{5x-4}{2x+1}$$ ← البسط ($5x-4$) ، ← المقام ($2x+1$)

2) $$\frac{3x^2+x-1}{2x^2+2}$$ ← البسط ($3x^2+x-1$) ، ← المقام ($2x^2+2$)

3) $$x^4-\frac{1}{x^2}=\frac{x^4}{1}-\frac{1}{x^2}$$

ولضرب المقدار الأول بـ $\frac{x^2}{x^2}$ ، نحصل على

$$\frac{x^6}{x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^6-1}{x^2}.$$

العمليات الجبرية على المقادير الكسرية :-

1 جمع وطرح المقادير الكسرية :-

عند جمع أو طرح المقادير الكسرية، يجب ملاحظة ما يلي :-

أ) اذا كانت المقادير الكسرية لها المقام نفسه فيكون المجموع الجبري له نفس المقام وبسطه يكون هو ناتج جمع البسط الأول مع بسط المقدار الثاني.

بصورة رموز :-

$$\frac{X}{Y} + \frac{Z}{Y} = \frac{X+Z}{Y}, \quad Y \neq 0.$$

$$X/Y - Z/Y = \frac{X-Z}{Y}, \quad Y \neq 0.$$

مثال :- اوجد ناتج ما يلي بأبسط صورة :-

ح) $\frac{X+3}{X-2} - \frac{3X}{X-2} = \frac{X+3-3X}{X-2}$

$$= \frac{-2X+3}{X-2}.$$

2) $$\frac{4x-3}{5x} - \frac{2+2x}{5x} = \frac{4x-3-(2+2x)}{5x}$$

$$= \frac{4x-3-2-2x}{5x}$$

$$= \frac{2x-5}{5x}.$$

ب) اذا كانت المقادير الكسرية لها مقامات مختلفة، ففي هذه الحالة نقوم بتحويلها إلى كسور مكافئة لها نفس المقام وذلك عن طريق ضربها بكثيرة حدود مناسبة ثم نطبق الطريقة السابقة في أ. وبصورة رمزية، يمكن التعبير عن الفقرة في الأعلى كما يلي :-

$$\frac{x}{y} \pm \frac{z}{w} = \frac{x \cdot w}{y \cdot w} \pm \frac{z \cdot y}{w \cdot y}$$

$$= \frac{xw}{yw} \pm \frac{zy}{yw}$$

$$= \frac{xw \pm zy}{yw}.$$

مثال :- اوجد ناتج مايلي :-

1) $\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = \frac{5 \cdot x}{x \cdot x} + \frac{3}{x^2}$

$= \frac{5x}{x^2} + \frac{3}{x^2} = \frac{5x+3}{x^2}$

2) $\frac{2}{x} - \frac{3}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x(x-1)} - \frac{3}{x-1} \cdot \frac{(x}{(x}$

$= \frac{2(x-1)}{x(x-1)} - \frac{3x}{x(x-1)}$

$= \frac{2x-2-3x}{x(x-1)}$

$= \frac{-x-2}{x(x-1)}$.

مثال :- اوجد ناتج عملية طرح المقادير الكسرية التالية :-

1) $\frac{7}{x^2-1} - \frac{x}{x-1}$

$= \frac{7}{(x-1)(x+1)} - \frac{x}{(x-1)} \cdot \frac{x+1}{x+1}$

$= \frac{7-x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{7-x^2-x}{x^2-1}$

ملاحظة :- عند توحيد المقامات لمقادير كسرية ، فإنه يجب تحليل مقامات الكسور إلى عواملها الأولية إذا أمكن

مثال :- أوجد ناتج الجمع فيما يلي :-

$$\frac{x^3-1}{x^2}\cdot\frac{5}{5}+\frac{x^2-1}{5x}\cdot\frac{x}{x}$$

$x\cdot x \leftarrow x^2$

من خلال ضرب المقدار الأول في العدد 5 وضرب المقدار الكسري الثاني بالمتغير x ، نحصل على :-

$$=\frac{5(x^3-1)}{5x^2}+\frac{x(x^2-1)}{5x^2}$$

$$=\frac{5x^3-5+x^3-x}{5x^2}$$

$$=\frac{6x^3-x-5}{5x^2}.$$

٤-٢ ضرب المقادير الكسرية :-

عند ضرب مقدار كسري مع آخر فإننا نقوم بضرب البسط مع البسط مقسوماً على المقام في المقام .

وبالرموز :-

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}.$$

مثال :- اوجد ناتج مايلي :-

1) $\frac{3x}{x-1} \cdot \frac{5}{x} = \frac{15\cancel{x}}{\cancel{x}(x-1)} = \frac{15}{(x-1)}.$

2) $\frac{5x}{x-1} \cdot \frac{-3x}{x+1} = \frac{-15x^2}{(x-1)(x+1)}$

$$= \frac{-15x^2}{x^2-1}.$$

$5 = 5/1$
$x = x/1$.

3) $\frac{x}{1} \cdot \frac{x^3}{x-2} = \frac{x^4}{x-2}$.

4) $\frac{1}{x} \cdot \frac{2x^3}{x^{-1}} = \frac{1(2x^3)}{x(x^{-1})}$

$= \frac{2x^3}{x^0} = \frac{2x^3}{1} = 2x^3$

طريقة أخرى

$\frac{1}{x} \cdot \frac{2x^3 \cdot x^1}{1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{2x^4}{1}$

$= \frac{2x^4}{x} = 2x^3$.

$\boxed{٢١}$ عملية قسمة المقادير الجبرية :-

لقسمة مقدار كسري على آخر ، فإننا نحول إشارة القسمة إلى ضرب ونأخذ مقلوب الكسر الثاني .

بالرموز :-

$x/y \div \frac{z}{w} = x/y \times \frac{w}{z} = \frac{xw}{yz}$

مثال :- بسط ما يلي :-

1) $\frac{3}{x} \div \frac{x}{3} = \frac{3}{x} \cdot \frac{3}{x} = \frac{9}{x^2}.$

2) $\frac{x^2+1}{x-1} \div \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x^2+1}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x+1}$

$$= \frac{(x^2+1)\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}$$

$$= x^2+1.$$

الضرب له الاولوية — ثم عملية القسمة

3) $\frac{5}{x} \cdot \frac{x^2}{5} \div \frac{x-1}{x}.$

$$= \frac{\cancel{5}\cancel{x^2}}{\cancel{5}\cancel{x}} \div \frac{x-1}{x} = \frac{x}{1} \div \frac{x-1}{x}$$

$$= \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$$

رقم (1) في التنفيذ — رقم (2)

4) $\frac{x}{5} \div \frac{x-1}{x} \cdot \frac{2}{x^2}$

$$= \frac{x}{5} \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \frac{2}{x^2} = \frac{\cancel{x^2}}{5x-1} \cdot \frac{2}{\cancel{x^2}}$$

$$= \frac{2}{5x-1}$$

تمارين ومسائل :-

① اوجد ناتج مايلي بابسط صورة :-

1) $\frac{3x}{x-3} + \frac{1}{x^2-9}$.

2) $2/x^2 + 1/x \cdot \frac{x-1}{x}$،

3) $\frac{1}{x^2-4} \div \frac{5}{x+2}$.

4) $\frac{7-x}{x} - \frac{x^2-2x+1}{5}$.

نهاية الفصل الرابع .

بالتوفيق.
اختكم\ أثير

الباب الخامس: المعادلات

الباب الخامس :- المعادلات

تعريف :- المعادلة هي عبارة عن تعبير رياضي يحتوي على متغير واحد أو أكثر مع اشارة التساوي، بحيث يكون لهذا التعبير طرفان أيمن وأيسر تفصل بينهما اشارة المساواة بحيث تدعى هذه المتغيرات بالمجاهيل. وعملية حل مثل هذا النوع من المعادلات معناه ايجاد قيمة عددية تجعل طرفي المعادلة متساويين، ومثل هذه الحلول تسمى بحل المعادلة.

وبداية سنتعرف على بعض من اشكال المعادلات وكيفية حلها :-

$\boxed{1}$ المعادلات الخطية بمتغير واحد X :-

والصورة العامة لمثل هذا النوع من المعادلات هي :-

$$aX = c.$$

اعداد ثابتة : a و c

$a, c \in \mathbb{R}.$

~~مثال~~ ومن الأمثلة ؟ هذا النوع من المعادلات

معامل المتغير X

$5X = 10$ و $\frac{1}{3}X = 2$

$-2 = 3X$. و $-\frac{2}{3} = \frac{3}{2}X$

ولحل مثل هذا النوع من المعادلات فإننا نقوم بالتخلص (حذف) العدد الذي يرافق المتغير من خلال عملية الضرب أو القسمة .

مثال :- أوجد حل كل من المعادلات السابقة في الأعلى :-

1) $5X = 1$: بقسمة طرفي المعادلة ؟ العدد 5 ينتج أن :-

$\frac{5}{5}X = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \boxed{X = \frac{1}{5}}$. ← حل للمعادلة

وللتحقق من صحة الحل :- نعوض قيمة X في المعادلة الأصلية :-

$5\left(\frac{1}{5}\right) \stackrel{?}{=} 1$

$\frac{5}{5} = 1$

نتيجة :- يوجد للمعادلات الخطية بمتغير واحد حل وحيد فقط

2) $-2 = 3x$

قسمة طرفي المعادلة على معامل x العدد 3 :-

الحل :-

$$-\frac{2}{3} = \frac{3}{3}x \Longrightarrow \boxed{x = -\frac{2}{3}}$$

3) $\frac{1}{3}x = 2$

بضرب طرفي المعادلة بمقلوب معامل x ينتج أن :-

$$\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{3}x = 2\cdot\frac{3}{1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x = 6}$$

4) $-\frac{2}{3} = \frac{3}{2}x$

بضرب طرفي المعادلة بمقلوب معامل x ، ينتج أن

$$\frac{2}{3}\cdot -\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x$$

$$\Longrightarrow \boxed{-\frac{4}{9} = x}$$

للتحقق

$$-\frac{2}{3} \overset{?}{=} \frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{2}_{\,1}}\left(-\frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{9}_{\,3}}\right)$$

بعض من خواص الاعداد الحقيقية والمستخدمة في حل المعادلات :.

1) $a+b = a+c \Rightarrow b = c.$

(من خلال حذف a من طرفي المعادلة).

2) $ab = ac \Rightarrow b = c$

(من خلال حذف a من طرفي المعادلة)

3) $b/a = c/a \Rightarrow b = c.$

(من خلال حذف a من المقام في طرفي المعادلة)

4) $b-a = c-a \Rightarrow b = c.$

مثال :- أوجد ناتج مايلي :.

$$x - 7 = 10.$$

$$x - \underline{\underline{7}} = 17 - \underline{\underline{7}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 17}$$

or: باضافة +7 لطرفي المعادلة $\Rightarrow x-7+7 = 10+7$

$x = 17.$

or: -7 نعكس العدد الى الطرف الآخر مع تغيير الاشارة $x = 10+7 = 17.$

مثال :- اوجد حل المعادلة التالية :-

$$\frac{1}{2}X - 6 = 2 .$$

الحل :-

$$\frac{1}{2}X = 2 + 6$$

يجب التخلص من معامل X

$$\frac{1}{2}X = 8$$

نضرب طرفي المعادلة بالعدد $\frac{2}{1}$:-

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2}X = 8 \cdot \frac{2}{1}$$

$$\boxed{X = 16}$$

ويمكن التأكد من صحة الحل من خلال تعويض $X = 16$ في المعادلة الاصلية $(\frac{1}{2}X - 6 = 2)$ فيتحقق طرفيها .

2] المعادلات الخطية بمجهولين :-

تعريف :- المعادلة الخطية في مجهولين X و Y هي عبارة عن معادلة تكتب في الصورة التالية :-

$$aX + bY = C \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

حيث $a, b \neq 0$

إذاً حل مثل هذا النوع من المعادلات ليس وحيداً
بل أنه سيكون هنالك عدد لانهائي من الحلول.

بمعنى :- اذا أوجدنا حل المعادلة بالنسبة للمتغير X
سنحصل على :-

$$X = \frac{c - bY}{a}$$

وبالتالي قيمة X تعتمد على قيمة Y.

أما اذا اوجدنا حل المعادلة بالنسبة للمتغير Y
سنحصل على :-

$$Y = \frac{c - aX}{b}.$$

وبالتالي قيمة Y تعتمد في هذه الحالة على قيمة X.

مثال :- اوجد حل كل من المعادلة التالية
بالنسبة للمتغير X :-

1) $2X - 3Y = -10.$

الحل :-

$$2X = 3Y - 10$$

$$X = \frac{3Y - 10}{2}.$$ الحل العام

2) $5x - 4y = 24$

عندما $y = -1$ ؟

الحل :-

$$5x = 4y + 24$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{4y + 24}{5}}$$

الحل العام بالنسبة للمتغير x

وعندما $y = -1$:-

$$x = \frac{4(-1) + 24}{5} = \frac{-4 + 24}{5}$$

$$= \frac{20}{5} = 4.$$

النتيجة :- احد حلول هذه المعادلة هي $(x = 4, y = -1)$

وللتحقق من صحة الحل ، نعوض هذه القيم في المعادلة الاصلية :

$$5x - 4y \stackrel{?}{=} 24$$

$$5(4) - 4(-1) \stackrel{?}{=} 24$$

$$20 + 4 \quad (\,7\,) \quad = 24 \quad \checkmark$$

مثال :- اوجد حل المعادلة

$$\frac{1}{3}Y - 5X = 7.$$

اذا علمت ان $Y = 9$ ؟

الحل :-

$$\frac{1}{3}Y - 7 = 5X.$$

$$\frac{\frac{1}{3}Y - 7}{5} = X$$

عندما $Y = 9$ ، ينتج أن :-

$$X = \frac{\frac{1}{3}(9) - 7}{5} = \frac{3 - 7}{5} = \frac{-4}{5}.$$

تمارين ومسائل :-

- اوجد حل كل من المعادلات التالية بالنسبة للمتغير X :-

1) $-6X - 3 = 9.$

2) $2X - \frac{1}{2}Y = 1.$

3) $-3Y + \frac{1}{2}X = 1 \quad (Y = 1).$

انتهت المحاضرة الثامنه للباب الخامس : المعادلات

أثير.

المحاضرة التاسعة
الباب الخامس

تابع الفصل الخامس: المعادلات

* أنواع المعادلات :-

[1] معادلة خطية بمتغير واحد X :-

$$aX = c \quad ; a, c \in \mathbb{R}$$

مثال :- اوجد حل المعادلة

$$4X - 5 = -2X + 7.$$

الحل :-

$$4X + 2X = 7 + 5$$

$$6X = 12 \Rightarrow X = 2 .$$

[2] معادلة خطية بمتغيرين :-

$$aX + bY = c \,,\; a, c, b \in \mathbb{R}$$
$$a \text{ و } b \neq 0$$

مثال :- $-3X - 9Y = 15$

ولإيجاد حل هذه المعادلة للمتغير X، نحصل على :-

$$-3X = 9Y + 15$$

$$X = \frac{9Y + 15}{-3} \Rightarrow X = -3Y - 5$$

الحل العام

[٣] معادلات خطية آنية في مجهولين :.
الصورة العامة لمثل هذا النوع من المعادلات تكتب كما يلي :-

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

حيث $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

وحل هذا النظام الآني من المعادلات الخطية هو عبارة عن زوج من الأعداد x, y الذي يحقق كلا المعادلتين في آن واحد.
ولحل مثل هذا النوع من المعادلات، سنتعرف على الطرق التالية :.

[١] طريقة الحذف :-
خطوات هذه الطريقة تتلخص كما يلي :.
[أ] اذا لم تكن المعاملات الحسابية لأحد المتغيرين x أو y، فإننا نضرب المعادلتين أو احدهما

نعدد معاملين حتى تصبح المعادلتين لاحد المتغيرين متساوي
المعاملات في كلا

أولاً إذا كانت الاشارات للمعاملات المتساوية غير متشابهة فإننا نقوم بعملية الجمع أما إذا كانت متشابهة فإننا نقوم بعملية الطرح لكلا المعادلتين.

ثانياً نجد قيمة أحد المتغيرين ثم نعوض القيمة التي حصلنا عليها في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة المتغير الآخر

مثال :- أوجد حل النظام التالي من المعادلات :-

$$5x + y = 3$$
$$x - y = 9$$

لاحظ أن معامل المتغير y في كلا المعادلتين متساوي ومختلف في الإشارة

$$6x = 12 \Rightarrow x = 2$$

وبتعويض قيمة $x = 2$ في المعادلة الثانية، نحصل على

$$2 - y = 9 \Rightarrow -y = 7 \Rightarrow y = -7$$

وللتأكد من صحة الحل، نقوم بتعويض قيمة $x = 2 , y = -7$ في كلا المعادلتين :-

$$5(2) + -7 = 10 - 7 = 3 \checkmark$$

$$2 - (-7) = 2 + 7 = 9 \checkmark$$

(فالحل صحيح)

مثال :- أوجد حل المعادلات التالية :-

نلاحظ أن معاملات المتغيرين x أو y في كلا المعادلتين غير متساوية

$$5x + 2y = 3 \xleftarrow{\times} (3)$$

$$2x + 3y = -1 \xleftarrow{\times} (2)$$

الحل :- من خلال ضرب المعادلة الأولى بالعدد 3 والمعادلة الثانية بالعدد 2 ثم نقوم بعملية الطرح ، نحصل على :-

بالطرح :-

$$\begin{array}{l} 15x + 6y = 9 \\ 4x + 6y = -2 \\ \hline 11x \quad = 11 \end{array} \Longrightarrow \boxed{x = 1}$$

وبتعويض قيمة $x=1$ في المعادلة الأولى، نحصل على :-

$$5(1)+2y=3$$

$$\Rightarrow 2y = 3-5$$

$$\Rightarrow 2y = -2 \Rightarrow \boxed{y=-1}$$

وللتحقق من صحة الحل، نعوض قيمة $x=1, y=-1$ في كل من المعادلتين :-

الأولى $5(1)+2(-1) \overset{?}{=} 3$

$$5-2=3 \checkmark$$

الثانية $2(1)+3(-1) = -1$

$$2-3=-1 \checkmark$$

٢] طريقة التعويض :-

تتلخص هذه الطريقة في ايجاد قيمة احد المتغيرين بدلالة الآخر ومن ثم تعويض هذه القيمة في المعادلة الأخرى وبذلك نحصل على معادلة بمجهول واحد فقط لنجد قيمته كما تعلمنا سابقاً ثم نستخدم هذه القيمة لإيجاد قيمة المجهول الآخر من خلال التعويض بإحدى المعادلتين.

مثال :- أوجد قيمة x, y التي تحقق نظام الشكل من المعادلات :-

$$2x - y = 4 \quad \text{——} \quad (1)$$

$$x + 2y = -3 \quad \text{——} \quad (2)$$

الحل :- من خلال كتابة المتغير x في المعادلة الثانية بدلالة y ، نحصل على :-

$$x = -2y - 3 \quad \text{——} \quad (3)$$

وبتعويض قيمة x من المعادلة الثالثة في المعادلة الأولى ، نحصل على :-

$$2(-2y-3) - y = 4$$

$$-4y - 6 - y = 4$$

$$-5y = 6 + 4 \Rightarrow -5y = 10$$

$$\boxed{y = -2}$$

ولإيجاد قيمة x ، نعوض قيمة y إما في معادلة (1) أو (2) :-

$$\cancel{2(-2) - y = 4}$$

$$\cancel{-4 - y = 4}$$

$$x + 2(-2) = {}^-3$$

$$x - 4 = {}^-3 \Rightarrow x = 4 + {}^-3$$

$$\boxed{x = 1}$$

مجموعة الحل هي :- $x = 1 , y = {}^-2$

وللتأكد من صحة الحل :-

$2(1) + 2 = 4$ ✓

$1 + 2(-2) = {}^-3$ ✓

وبذلك يكون الحل صحيح.

مثال :- بالرجوع إلى المثال الأول من طريقة الحذف

$5x + y = 3$ —— (1)

$x - y = 9$ —— (2)

$x = 2$
$y = {}^-7$

الحل من خلال الطريقة السابقة.

الحل :- يمكن كتابة x بدلالة y من المعادلة الثانية لنحصل على :-

$x = y + 9$ —— (3)

وبتعويض قيمة x من المعادلة (3) في المعادلة (1) فنحصل على :-

$$5(y+9) + y = 3$$

$$5y + 45 + y = 3$$
$$\Rightarrow 6y = 3 - 45$$
$$\Rightarrow 6y = -42 \Rightarrow \boxed{y = -7}$$

ولإيجاد قيمة المتغير x ، نعوض $y = -7$ وإما في المعادلة (1) أو (2) :-

$$x - (-7) = 9$$
$$x + 7 = 9 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

سؤال :- اوجد حل النظام التالي من المعادلات

أ) بطريقة الحذف ب) بطريقة التعويض

$$-2x + y = -1$$
$$3x - y = 0$$

انتهت المحاضرة التاسعة

المحاضرة العاشرة

تابع الفصل الخامس : المعادلات الرياضية

٤) معادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد :-

ويكتب مثل هذا النوع من المعادلات على الصورة التالية :

$$aX^2 + bx + c = 0 .$$

حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$a \neq 0$.

بعض الحالات المختلفة لهذه الصيغة :-

أ) في حالة $b = 0$:- .

يصبح شكل المعادلة التربيعية على الصورة :-

$$aX^2 + c = 0 .$$

وحل مثل هذا النوع من المعادلة هو :-

$$aX^2 = -c$$

$$X^2 = -\frac{c}{a}$$

$$X = \sqrt{-\frac{c}{a}} .$$

مثال :- اوجد حل المعادلة التالية :-

$$x^2 - 49 = 0 .$$

الحل :-

$$x^2 = 49$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{49} = \pm 7 .$$

مثال :- اوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$5x^2 + 125 = 0 .$$

الحل :-

$$5x^2 = -125$$

$$x^2 = \frac{-125}{5}$$

$$x^2 = -25$$

$$x = \sqrt{-25}$$ = عدد غير حقيقي
(غير معرف)

ب) اذا كان مثبت $c = 0$:-

فتصبح المعادلة على الصورة التالية :-

$$aX^2 + bx = 0$$

حيث يتم حل مثل هذا النوع من المعادلات من خلال اخراج العامل المشترك بين الحد والثاني فتصبح المعادلة على الصورة :-

$$X(aX + b) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{X = 0} \quad \text{or} \quad aX + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$\boxed{X = -b/a}$$

مثال :- اوجد حل المعادلة التالية :-

$$3X^2 - 27X = 0.$$

اخراج $3x$ كعامل مشترك بين الحد الاول والحد الثاني

$$3x(x - 9) = 0$$

$$\Rightarrow 3x = 0 \quad \text{or} \quad x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0} \qquad \boxed{x = 9}$$

ج) اذا كانت $a \neq 0 , b \neq 0 , c \neq 0$
فبالتالي تصبح المعادلة على صورتها الاصلية كاملة وهي :-

$$ax^2 + bx + c = 0 .$$

ويمكن حل هذا النوع من المعادلات باحد الطرق التالية :-

1) طريقة التحليل :-

حيث يتم تحليل المعادلة التربيعية الى مقدارين جبريين ويتم استخدام قاعدة " حاصل ضرب مقدارين يساوي صفراً ، فإما المقدار الأول = صفر أو المقدار الثاني = صفر) .

مثال :- اوجد حل المعادلة :-

$$x^2 - 2x + 1 = 0 .$$

هذه المعادلة
لها حل وحيد
فقط .

الحل :- $(x - 1)(x - 1) = 0$

ومنه :- $x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

مثال :- اوجد حل المعادلة

$$x^2 - 8x + 15 = 0.$$

الحل:- من خلال التحليل المباشر (المقص)

الوسطين

$$(x-3)(x-5)=0.$$

الطرفين.

ومنه :- $x-3=0 \Rightarrow x=3.$

or:- $x-5=0 \Rightarrow x=5.$

للتأكد :- عندما $x=3$ ∴

$$9-8(3)+15 \overset{?}{=} 0$$

$$24-24=0 \checkmark$$

عندما $x=5$ ∴

$$25-8(5)+15 \overset{?}{=} 0.$$

$$40-40=0 \checkmark$$

ب) طريقة القانون العام :-
والصيغة العامة لهذه الطريقة هي :-

$$X = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث a : معامل X^2 ، b : معامل X ، c : الحد الثابت

ملاحظة :- المقدار $b^2 - 4ac$ = المميز

وهنالك ثلاث حالات مختلفة للمميز :-

1) اذا كان المميز > صفر 0 :-

فيكون للمعادلة التربيعية حلان مختلفان .

2) اذا كان المميز = صفراً .

فيكون للمعادلة التربيعية حل واحد فقط وهو

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3) اذا كان المميز < صفر .

فإنه لا يوجد اي حل حقيقي للمعادلة التربيعية .

- مثال :- اوجد حل كل من المعادلات التالية
باستخدام القانون العام :-

① $2x^2 + x - 15 = 0$

الحل :-

$a = 2, \ b = 1, \ c = -15$.

وبتعويض هذه القيم في القانون العام نحصل على :-

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \mp \sqrt{1^2 - 4(2)(-15)}}{2(2)}$$

$$= \frac{-1 \mp \sqrt{1 + 120}}{4}$$

$$= \frac{-1 \mp \sqrt{121}}{4}$$

المميز > ٥
وبالتالي سيكون لدي
جذران (حلان)
لهذه المعادلة :-

$$= \frac{-1 \mp 11}{4}$$

$x = \frac{-1 + 11}{4}$ or $x = \frac{-1 - 11}{4}$

$= \frac{10}{4} = 2.5$, $= \frac{-12}{4} = -3$

(ج) $x^2 - 2x + 3 = 0$

الحل:- $a = 1,\ b = -2,\ c = 3$

$$x = \frac{-(b) \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2(a)}$$

$$= \frac{2 \mp \sqrt{4 - 4(1)(3)}}{2}$$

$$= \frac{2 \mp \sqrt{-8}}{2}$$

نلاحظ أن المميز سالباً وبالتالي لا يوجد لدينا أي حل حقيقي.

٣) $2x^2 - 2x = -1/2$.

"يجب اعادة كتابة هذه المعادلة في الصورة العامة"!! :-

$$2x^2 - 2x + 1/2 = 0.$$

$a = 2,\ b = -2,\ c = 1/2$.

$$X = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{2 \mp \sqrt{4 - 4(\cancel{2})(\cancel{1/2})}}{2(2)} = \frac{2 \mp \sqrt{0}}{4}$$

المميز = ٠ تعني حل حقيقي فقط

$= 2/4 = 1/2$

مسائل وتمارين :-

اوجد حل كل من المعادلات التالية :-

1) $5x^2 - \frac{1}{5} = 0$. ← $b = 0$

2) $-3x^2 - 12x = 0$. ← $c = 0$

3) $2x^2 - 3x - 1 = 0$. ← $a = 2$, $b = -3$, $c = -1$

من الصعوبة استخدام التحليل المباشر لحل مثل هذا النوع من المعادلات فإننا سنلجأ الى القانون العام

$$\frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

المميز:

- موجب (للمعادلة يوجد حلين)
- = صفر (حل وحيد)
- سالب (لا يوجد حل)

انتهت المحاضرة العاشرة.

المحاضرة الحادية عشر.

⑤ المتراجحات الخطية بمجهول واحد :-

تعريف :- المتراجحة هي عبارة عن معادلة ولكن تأخذ أحد الإشارات التالية :-

$<$ ، $\leqslant$ ، $\geqslant$ ، $>$ بدلاً من إشارة = .

ومن الأمثلة على ذلك :-

$$5x - 4 \geqslant 1.$$

$$3x - 2 < 5x + 6.$$

وهي عبارة عن أمثلة على المتراجحات الخطية .

- عملية حل المتراجحات الخطية بمجهول واحد (x) تتم من خلال إيجاد قيمة المتغير x الذي يحقق طرفي المتراجحة . ويجب ملاحظة أن إشارة المتراجحة سوف تتغير عند الضرب أو القسمة بعدد سالب ، أما بقية العمليات الجبرية كالجمع أو الطرح من عدد موجب أو سالب او الضرب والقسمة بعدد موجب فتبقى إشارة المتراجحة كما هي .

مثال :- اوجد حل المتراجحة التالية :-

$$3x + 11 \geq 5x - 1 .$$

الحل :- لحل هذه المتراجحة نطبق الاسلوب المتبع في حل المعادلات الخطية بمجهول واحد حيث نقوم بتجميع المتغيرات في طرف والاعداد الثابتة في الطرف الآخر ، بحيث لا نحصل في النهاية على معامل المتغير x للوحدة .

$$3x - 5x \geq -1 - 11$$

نقسم طرفي المتراجحة على العدد -2

$$\frac{-2x}{-2} \geq \frac{-12}{-2} .$$

$$x \leq 6 .$$

مجموعة الحل لهذه المتراجحة هي :-

$$X = \{x : x \leq 6\} .$$

or

$$(-\infty, 6] .$$

مثال :- اوجد حل المتراجحة

$$4x + 3 \leq 1.$$

$$4x \leq 1 - 3.$$

نقسم طرفي المتراجحة على العدد 4 ، نحصل على

$$\frac{4x}{4} \leq \frac{-2}{4}$$

$$x \leq -\tfrac{1}{2}.$$

مجموعة الحل هي :-

$$X = \{x : x \leq -\tfrac{1}{2}\}$$

or $(-\infty, -\tfrac{1}{2}]$.

مثال :- اوجد حل المتراجحة :-

$$7x - 3 > 2x - 18.$$

الحل :-

$$7x - 2x > -18 + 3$$

$$\frac{5x}{5} > \frac{-15}{5}$$

$$x > -3.$$

مجموعة الحل هي

$(-3, \infty)$

نهاية الفصل الخامس

مسائل وتمارين :-

أوجد حل كل من المتراجحات الخطية التالية :-

1) $-\frac{1}{2}x \geq 4$.

2) $3x - 1 < x + 1$.

3) $3 \leq 2x - 5 \leq 5$.

الفصل السادس :- المتواليات

تعريف :- المتوالية هي عبارة عن متتابعة لمجموعة من الاعداد مرتبة حسب قاعدة معينة أو صيغة معينة ويسمى كل عنصر من عناصرها حداً . ومن الأمثلة عليها :-

1) $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

2) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\}$

وتقسم المتواليات الى قسمين :-

1) المتواليات الحسابية .
2) المتواليات الهندسية .

- أولاً :- المتوالية الحسابية :

تعريف :- المتوالية الحسابية هي عبارة عن متتابعة من الاعداد كل حد من حدودها يزيد أو ينقص عن الحد الذي يسبقه بمقدار ثابت (باستثناء الحد الأول) .

اذا كان كل من :-

a :- يرمز للحد الأول .

d :- اساس المتوالية وهو عبارة عن الفرق بين اي حد والحد الذي يسبقه (ما عدا الحد الأول) .

فيمكن كتابة المتوالية الحسابية على الشكل التالي :-

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots$$

حيث ان :-

a :- الحد الأول .

$a+d$:- الحد الثاني

وهكذا ...

وبالاستمرار بهذه ~~الطرق~~ الطريقة يمكن ايجاد قيمة الحد n (t_n) من خلال الصيغة التالية :-

الحد الذي موقعه العدد n

term

$$\boxed{t_n = a + (n-1)d}$$

حيث $n \in \mathbb{N}$. (الاعداد الطبيعية) .

أما لإيجاد مجموع n من حدود متوالية حسابية فيمكن تطبيق صيغة القانون التالية :.

Total ← $T_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$.

حيث a : الحد الأول .

d : اساس المتوالية .

n : عدد الحدود المطلوب ايجاد مجموعها .

وايضاً يمكن ايجاد مجموع n من حدود متوالية حسابية علم فيها الحد الأول a والحد الأخير b من خلال الصيغة التالية :.

$T_n = \frac{n}{2}\left[a + b\right]$.

قيمة الحد الأول

قيمة الحد الأخير

مثال :- اوجد قيمة الحد السادس عشر من المتوالية :-

$4, 7, 10, 13, \ldots$

ثم اوجد مجموع أول ستة حدود ؟

المطلوب :- t_{16} ؟

T_6 ؟

الحد الأول — الأساس

الحل :- $a = 4$ ، $d = 7 - 4 = 3$

$t_{16} = ??$

$t_{16} = a + (n-1)d$

$= 4 + (16-1) \cdot 3$

$= 4 + 15(3)$

$= 4 + 45 = 49.$

التأكد :- 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28

31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, ...

t_{16}

الحد السادس .

$T_6 = ??$

$$T_6 = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$
$$= \frac{6}{2}\left[2(4) + (6-1)\cdot 3\right]$$
$$= 3\left[8 + 15\right]$$
$$= 3(23) = \cancel{46}\ 69$$

(للتأكد :. $T_6 = 4+7+10+13+16+19$
$= 69$.)

مثال :. اوجد مجموع أول 12 حداً من المتوالية الحسابية

$3, 8, 13, \ldots$

الحل :- $a = 3$ $d = 8 - 3 = 5$

$$T_{12} = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$
$$= \frac{12}{2}\left[2(3) + (12-1)\cdot 5\right]$$
$$= 6\left[6 + 55\right] = 6(61)$$
$$= 366 .$$

مثال :. اوجد مجموع أول عشرة حدود في متوالية حسابية فيها الحد الأول = 5 ، والحد الأخير = 100.

الحل :.

$$T_{10} = \frac{n}{2}\left[\overset{a}{5} + \overset{b}{100}\right]$$

$$= \frac{10}{2}\left[105\right] = 5(105)$$

$$= 525 .$$

9

سؤال :. متوالية حسابية حدها الأول = 1

وأساسها = $\underset{d}{-5}$ ، اوجد :.

① t_{10} . ← قيمة الحد العاشر

② T_{10} ← مجموع أول عشرة حدود.

انتهت المحاضرة الحادية عشر .

الله يوفقكم

المحاضرة الثانية عشر.

تابع الفصل السادس: المتواليات

تقسم المتواليات الى قسمين:-

١) المتواليات الحسابية.

الصيغة العامة لها ←

$$a, a+d, a+2d, \ldots$$

الحد الأول

أساس المتوالية: والذي يساوي الفرق بين اي حد والحد الذي يسبقه باستثناء الحد الأول.

يمكن ايجاد قيمة اي حد من خلال الصيغة:-

$$t_n = a+(n-1)d.$$

وكذلك يمكن ايجاد مجموع n من الحدود من خلال الصيغة

$$T_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$$

وكذلك اذا علم الحد الاول والحد الأخير في متوالية حسابية فيمكن ايجاد مجموع n من الحدود من خلال الصيغة

$$T_n = \frac{n}{2}\left[a+b\right]$$

مثال :- اوجد مثبت الحد الخامس عشر ومجموع أول عشرة حدود من المتوالية

$$2, -3, -8, -13, \dots$$

الحل :- $a = 2$.

$d = -3 - 2$

$= -5$.

المطلوب :-

$$t_{15} = a + (n-1)d$$
$$= 2 + (15-1) \cdot -5$$
$$= 2 + 14(-5)$$
$$= 2 - 70 = -68 .$$

$$T_{10} = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right].$$
$$= \frac{10}{2}\left[2(2) + (10-1)(-5)\right]$$
$$= 5\left[4 - 45\right]$$
$$= 5(-41) = -205 .$$

2
-3
-8
-13
-18
-23
-28
-33
-38
-43
-205

ثانياً :- المتواليات الهندسية :-

تعريف :- المتوالية الهندسية هي عبارة عن متتابعة من الأعداد كل حد من حدودها يمكن إيجاده من خلال ضرب الحد الذي يسبقه بعدد معين (باستثناء الحد الأول).

فإذا كان a هي قيمة الحد الأول و r هي أساس المتوالية، فيمكن الرمز لمتوالية هندسية بالصورة التالية :

$$a, \ ar, \ ar^2, \ ar^3, \ ---$$

حيث يمكن إيجاد قيمة أساس المتوالية r من خلال قسمة أي حد على العدد الذي يسبقه.

وبالاستمرار بهذه الطريقة، يمكن ان نجد قيمة اي حد في متوالية هندسية وليكن t_n بالصيغة التالية :

$$t_n = ar^{n-1}.$$

حيث $n \in \mathbb{N}$. ← الأعداد الطبيعية

وكذلك يمكن إيجاد مجموع ن من حدود متوالية هندسية حدها الأول أ وأساسها ر حسب الصيغة التالية :-

$$ج_{ن} = \frac{أ(ر^{ن}-١)}{ر-١} \quad , \quad ر \neq ١.$$

وأيضاً يمكن إيجاد مجموع عدد لانهائي من حدود متوالية هندسية من خلال الصيغة التالية :-

$$ج_{\infty} = \frac{أ}{١-ر} \quad , \quad |ر| < ١.$$

وتسمى هذا النوع من المتواليات بالمتوالية الهندسية اللانهائية.

مثال :- متوالية هندسية فيها الحد الأول = 3
والأساس = 3 ، أوجد :-
١) قيمة الحد السادس ؟
٢) مجموع أول خمسة حدود ؟

المطلوب :-

1) t_6 ?

2) T_5 ?

يمكن كتابة عناصر هذه المتوالية كالتالي :-

① ② ③ ④ ⑤

$3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ \ldots$ الحد السادس 729

1) $t_6 = a\,r^{n-1}$

$= 3(3)^{6-1}$

$= 3(3)^5 = 3(243)$

$= 729$.

2) $T_5 = \dfrac{a(r^n - 1)}{r-1}$, $r \neq 1$.

$= \dfrac{3(3^5 - 1)}{3-1}$

$= \dfrac{3(243-1)}{2}$

$= \dfrac{3(242)}{2} = 3(121)$

$= 363$.

للتأكد من صحة القانون :-

$T_5 = 3 + 9 + 27 + 81 + 243$

$= 363$.

مثال :- متوالية مكتوبة ب الصورة التالية :-

متوالية متناقصة $\quad 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \ldots$

اوجد :-

① نوع المتوالية ؟

② مرتبة الحد السادس ؟

③ مجموع اول اربعة حدود ؟

الحل :- ① متوالية هندسية حيث أن

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = r .$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} .$$

اساس المتوالية

وبالتالي $a = 1 \ , \ r = \frac{1}{2} .$

②

$$t_6 = a r^{n-1}$$

$$= 1\left(\tfrac{1}{2}\right)^{6-1} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{32} .$$

③

$$T_4 = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{1\left(\frac{1}{2}^4 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{16} - \frac{1 \cdot 16}{1 \cdot 16}}{\frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2}} = \frac{\frac{1}{16} - \frac{16}{16}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{2}}$$

$$= \frac{\frac{-15}{16}}{\frac{-1}{2}} = \frac{15}{16} * \frac{2}{1}$$

$$= 15/8 .$$

(التأكد من صحة الحل :-

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{8}{8} + \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} .$$

مثال :- متوالية هندسية لا نهائية فيها الحد الأول $= 2$ والأساس $= \frac{1}{4}$ ، أوجد T_∞ ؟

الحل :-

(المجموع اللانهائي)

$$T_\infty = \frac{a}{1-r}$$

شرط $|r|<1 .$

$$= \frac{2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3/4} = 2 \cdot \frac{4}{3}$$

$$= \frac{8}{3} .$$

$|\frac{1}{4}|<1$

$$\overset{a_1}{2} , \overset{a_2}{\frac{1}{2}} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \ldots\ldots$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} .$$

مسائل وتمارين :-

١) متوالية هندسية فيها $a = -1$ ، $r = 2$

اوجد :-

١) t_{15} ؟

٢) T_7 ؟

٢) اذا كان لديك المتوالية

$1, 5, 25, 125, \ldots$

اوجد :-

١) نوع المتوالية ؟

٢) اساسها ؟

٣) قيمة الحد الخامس ؟

٤) مجموع اول اربعة حدود ؟

٥) المجموع اللانهائي لحدود المتوالية في هذا السؤال اذا امكن ذلك ؟

انتهت المحاضرة الثانية عشر

الله يوفقكم

المحاضرة الثالثة عشر
الفصل السابع: المصفوفات

الفصل السابع: المصفوفات

تعريف: نقول أن المصفوفة عبارة عن تنظيم للاعداد مرتبة على شكل صفوف أو أعمدة في جدول مستطيل الشكل حيث يتكون هذا المستطيل من m من الصفوف و n من الأعمدة، وتوضع هذه الاعداد الحقيقية داخل اقواس كبيرة ويرمز عادة للمصفوفات بالاحرف الكبيرة $A, B, C, \ldots$

أما عناصر المصفوفة فيرمز لها بالاحرف الصغيرة $a, b, c, \ldots$.

ويمكن كتابة الصورة العامة لاي مصفوفات كالآتي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن هذه المصفوفة مكونة من m صف و n عمود.

ويمكن تعريف رتبة المصفوفة (درجتها) بأنها عبارة عن حاصل ضرب الصفوف في الأعمدة $(m \times n)$.

يرمز لكل عنصر من عناصر المصفوفة بحرف صغير أي a_{ij} (حرف صغير ورقمين صغيرين الأول يمثل رقم الصف والثاني يمثل رقم العمود).

ومن الأمثلة على المصفوفات :-

a_{22}

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

a_{32} (مصفوفة مربعة)

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} -5 \end{bmatrix}_{1\times 1}$$

c_{31}

(مصفوفة عمودية) (مصفوفة مربعة تتكون فقط من عنصر واحد)

$$E = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{1\times 5}$$

(مصفوفة أفقية) e_{14}

والآن سنتعرف على بعض من المصفوفات المعروفة بأسماء معينة وأشكال محددة :-

[1] المصفوفة المستطيلة :-

دائماً عدد الصفوف $\neq$ عدد الأعمدة $(m \neq n)$

ومثال على ذلك

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

وفيها عدد العناصر = 6 .

[2] المصفوفة المربعة :-

إذا كان عدد الصفوف $\neq$ عدد الأعمدة، سميت المصفوفة المستطيلة بالمصفوفة المربعة .

بمعنى $(n = n)$ أو $(m = m)$

ومثال على ذلك :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

٣) المصفوفة الصفرية :-

وهي المصفوفة التي يكون فيها كل العناصر اصفار
ويرمز لها بالرمز O وتكتب على الشكل التالي :-

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2} \quad , \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2\times1}$$

مصفوفة صفرية مربعة .

مصفوفة صفرية مستطيلة
(عمودية) .

٤) المصفوفة القطرية :-

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها اصفار ما
عدا عناصر القطر الرئيسي .

ومن الامثلة عليها :-

القطر الرئيسي

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

ويمكن كتابة المصفوفة
القطرية على الصورة :-

$$A = \text{diag}\,[2 \quad 1 \quad -1]$$

5) مصفوفة الوحدة (الإحادية)

وهي المصفوفة القطرية التي يكون فيها جميع عناصر القطر تساوي العدد 1 .

ومن الأمثلة عليها

$$I_{2\times 2} = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$I_{3\times 3} = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} .$$

وسوف نرمز للمصفوفة لمصفوفة الوحدة بالرمز I
(identity matrix) .

تعريف :- يقال أن المصفوفتين A, B متساويتين اذا فقط إذا حققت الشروط التالية :-

1) درجة المصفوفة الأولى = درجة المصفوفة الثانية

$$m_2 \times n_2 = m_1 \times n_1$$

2) اذا كانت العناصر المتناظرة في كلا المصفوفتين متساوية

مثال :- اوجد قيمة كل من X,Y حيث :-

$$\begin{bmatrix} 3 & x \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3y-1 \end{bmatrix}$$

الحل :- العناصر المتناظرة متساوية حيث ان المصفوفة في الطرف الأيسر = المصفوفة في الطرف الأيمن .
وبالتالي :-

$$\boxed{X = -4}$$

$$5 = 3Y - 1 \Rightarrow 3Y = 5 + 1$$
$$\Rightarrow 3Y = 6$$
$$\Rightarrow \boxed{Y = 2}$$

مثال :- اوجد قيمة المجاهيل فيما يلي :-

$$\begin{bmatrix} 3 & x-2 \\ Y & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -X \\ 2-Y & 1/Z \end{bmatrix}$$

الحل :

$$X - 2 = -X \Rightarrow X + X = 2 \Rightarrow 2X = 2 \Rightarrow \boxed{X = 1}$$
$$Y = 2 - Y \Rightarrow Y + Y = 2 \Rightarrow 2Y = 2 \Rightarrow \boxed{Y = 1}$$

$$-5 = \frac{1}{Z} \Rightarrow \frac{-5}{1} = \frac{1}{Z}$$

بالضرب التبادلي، نحصل على :-

$$-5Z = 1 \Rightarrow \boxed{Z = \frac{-1}{5}}$$

وللتأكد نعوض قيمة Z في المصفوفة من الطرف الأيمن

$$-5 \overset{?}{=} \frac{1}{-1/5}$$

✓ $$-5 = 1 \times \frac{-5}{1}$$

نهاية المحاضرة .

تمرين :- اوجد قيمة المتغيرات المجهولة اذا كان :-

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 2Y-4 \\ -1 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{X-1} \\ Y+1 \\ Z \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

انتهت المحاضرة الثالثة عشر

الله يوفقكم .

المحاضرة الرابعة عشر
تابع المصفوفات

تابع الفصل السابع: المصفوفات

العمليات الجبرية على المصفوفات:

[1] الجمع والطرح للمصفوفات.

[2] ضرب المصفوفات

أ) ضرب مصفوفة في عدد ثابت.

ب) ضرب مصفوفة صفية في مصفوفة عمودية.

ج) ضرب مصفوفتين.

أولاً: عملية جمع وطرح المصفوفات.

يمكن اجراء عملية جمع عدة مصفوفات أو عملية طرح مصفوفتين اذا كان لهم الرتبة نفسها (الدرجة) حيث نقوم بجمع أو طرح العناصر المتناظرة في كل مصفوفة حيث سنحصل في النهاية على مصفوفة جديدة بنفس الرتبة.

مثال: اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad و \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & -5 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

فبالامكان جمع المصفوفة A مع B أو طرحها من بعض أما جمع A أو B مع المصفوفة C أو طرحهم من C فهي عملية غير جائزة لاختلاف الرتب ونحصل على:

$$A+B = \begin{bmatrix} 4+3 & 3+2 & 5+4 \\ 10+^-1 & 7+^-5 & 6+^-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$B+A = \begin{bmatrix} 3+4 & 2+3 & 4+5 \\ -1+10 & -5+7 & -3+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان $A+B = B+A$

(عملية الجمع على المصفوفات هي عملية ابدالية.

وبتطبيق عملية طرح المجموعات :

$$A-B = \begin{bmatrix} 4-3 & 3-2 & 5-4 \\ 10+1 & 7+5 & 6+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 11 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B-A = \begin{bmatrix} 3-4 & 2-3 & 4-5 \\ -1-10 & -5-7 & -3-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -11 & -12 & -9 \end{bmatrix}$$

وبالتالي $A-B \neq B-A$

(عملية الطرح في المصفوفات عملية غير ابدالية)

ولكن نلاحظ أنه

$$A-B = -(B-A).$$

بعض الملاحظات :-

$$A+A+A = 3A$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 9 & 15 \\ 30 & 21 & 18 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

ثانياً :- ضرب مصفوفة بعدد ثابت :

حيث نقوم بضرب جميع عناصر تلك المصفوفة بهذا العدد.

يعني :- اذا كان العدد هو c ، سنقوم بضرب c بالمصفوفة A وسنحصل :

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

مثال :- اذا كانت

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & -10 \end{bmatrix}$$

وكان $d = -1$ ، $c = 5$

اوجد :-

1) cB ? $\rightarrow$ $cB = \begin{bmatrix} 4\times5 & 3\times5 \\ 2\times5 & 5\times5 \\ -1\times5 & -10\times5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 10 & 25 \\ -5 & -50 \end{bmatrix} = Bc$

2) dB ?

$$dB = \begin{bmatrix} -1\times4 & -1\times3 \\ -1\times2 & -1\times5 \\ -1\times-1 & -1\times-10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} = Bd.$$

نلاحظ أن عملية ضرب عدد ثابت بمصفوفة عملية ابدالية :-

$$cA = Ac.$$

حيث c : عدد ثابت .

بعض الملاحظات في ضرب المصفوفات بأعداد ثابتة وجمعها

اذا كانت A, B مصفوفتين من الرتبة $m \times n$

وكانت $c, d \in \mathbb{R}$ فان :-

توزيع العدد الثابت على المصفوفتين

1) $c(A+B) = cA + cB.$

2) $c(dA) = (cd)A = (dc)A = d(cA)$

3) $cA = 0 \Rightarrow c = 0$ or $A = 0.$

المصفوفة الصفرية.

4) اذا كانت $c \neq 0$ وكانت :-

$$cA = cB$$

فان $A = B$ ← المصفوفة B ، المصفوفة A ←

ثالثاً :- ضرب مصفوفة صفية في مصفوفة عمودية :-

اذا كانت لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$ ← مصفوفة صفية

ولدينا المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$ ← مصفوفة عمودية

b_{21}

فان حاصل ضرب $A \times B$ هو قيمة واحدة نقطة نحصل عليها كالاتي :-

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{m1} .$$

بشرط $n = m$.

عدد اعمدة المصفوفة A   عدد صفوف المصفوفة B

مثال :- اذا كانت لدينا المصفوفات التاليه :-

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{1\times 3} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}_{1\times 4} , \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

الحل :-

$$A \times B = \begin{bmatrix} 3\times 2 + 0\times 6 + 4\times 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 + 0 + 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \end{bmatrix}_{1\times 1} .$$

$$C \times D = \begin{bmatrix} 10\times 2 + 7\times -1 + 8\times -3 + 4\times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 - 7 - 24 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \end{bmatrix}_{1\times 1} .$$

نتيجة :-

$$A_{m\times l} \times B_{l\times n} = D_{m\times n}$$

أعمدة الأولى   صفوف الثانية

تمرين ١: اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

اوجد:

1) $A - B$
2) $B + A$.
3) $-2A$.
4) $B - B$.

تمرين ٢: اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اوجد

1) AB
2) $3AB \overset{?}{=} 3(AB)$

المحاضرة الخامسة عشر
تابع الفصل السابع المصفوفات

تابع الفصل السابع: المصفوفات

ثالثاً: ضرب مصفوفتين:

اذا كانت المصفوفة A من الرتبة $m \times p$ وكانت المصفوفة B من الرتبة $p \times n$ فان حاصل ضرب المصفوفتين AB ، وليكن C ، هو مصفوفة من المدرجة $m \times n$ حيث تحدد عناصرها بأن يكون العنصر في الصف i والعمود j في C ناتج عن عملية ضرب الصف i من A مع العمود j من B .

$$A_{m \times p} \times B_{p \times n} = C_{m \times n}$$

حتى تكون عملية الضرب على المصفوفات معرّفة، يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية. ورتبة المصفوفة الناتجة عن حاصل الضرب هي عبارة عن عدد الصفوف الأولى مضروباً في عدد أعمدة الثانية

بشكل عام، عند ضرب مصفوفة في أخرى، فإننا نقوم بضرب جميع صفوف المصفوفة الأولى في أعمدة المصفوفة الثانية والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال :- اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2} , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

اوجد

1) AB   2) BA .

الحل :

1)
$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 0 + 3\times 4 & 2\times 2 + 3\times 5 \\ -1\times 0 + -1\times 4 & -1\times 2 + -1\times 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 19 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}_{2\times 2} .$$

2) $BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0\times2 + 2\times-1 & 0\times3 + 2\times-1 \\ 4\times2 + 5\times-1 & 4\times3 + 5\times-1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}_{2\times2}$.

نستنتج أن عملية الضرب المصفوفات عملية غير ابدالية ، بمعنى :-

$AB \neq BA$.

مثال :- اذا كانت

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}_{2\times3}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2}$

اوجد

1) AB

2) BA .

D) $AB = ?$

نلاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة A = عدد صفوف المصفوفة B
وبالتالي يمكن إيجاد حاصل الضرب في هذه الحالة.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

-4×4

$$= \begin{bmatrix} 2\times 0 + 2\times -1 + -4\times -2 & 2\times 2 + 2\times 3 + -4\times 4 \\ 0\times 0 + -1\times -1 + 7\times -2 & 0\times 2 + -1\times 3 + 7\times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -13 & 25 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

3×2 $\qquad$ 2×3

$$= \begin{bmatrix} 0+0 & 0+-2 & 0+14 \\ -2+0 & -2+-3 & 4+21 \\ -4+0 & -4+-4 & 8+28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 14 \\ -2 & -5 & 25 \\ -4 & -8 & 36 \end{bmatrix}$$

تعريف: مبدل المصفوفة (Transpose)

اذا كانت المصفوفة A هي من الرتبة m X n فإن مبدل المصفوفة هي عبارة عن عملية تبديل الصفوف مع الاعمدة ونستخدم لها بالرمز A^T:

بصورة رمزية، اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

فإن

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

مثال: اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

فإن

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}.$$

تعريف :- المصفوفة المتماثلة

اذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة $n\times n$ فنقول بأن A مصفوفة متماثلة اذا كان :-

$$A = A^T.$$

مثال :- اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

فإن :-

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

حيث نلاحظ أن

$$A \neq A^T$$

وبالتالي المصفوفة A غير متماثلة .

بينما إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

فإن

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

فنلاحظ بأن $A = A^T$

فنقول بأن المصفوفة A مصفوفة متماثلة .

- بعض الملاحظات على المصفوفات المربعة :-

- إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن :-

1) $A^2 = A \times A$.

2) $A^3 = A \times A \times A$.

ونستطيع الاستمرار في هذا الشكل إلى أي عدد من المرات .

مثال: اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد A^3 ؟

الحل:

$$A^3 = A \times A \times A$$

$$= A^2 \times A .$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6+{}^-3 & 6+0 \\ {}^-2+0 & {}^-3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = A^2$$

2×2

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6+{}^-6 & 9+0 \\ {}^-4+2 & -6+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} .$$

$$A \cdot A^2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6+{}^-6 & 12+{}^-9 \\ {}^-3+0 & -6+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

مسائل وتمارين :-

إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 2} , \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

أوجد :-

1) AB

2) BA

3) A^2

4) B^2.

نهاية الفصل السادس

من المصفوفات

-

انتهت المحاضرة الخامسة عشر

المحاضرة السادسة عشر
الفصل الثامن : المحددات

الفصل الثامن :- المحددات

Determinantes

تعريف :- اذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$ ، فإنه يوجد عدد حقيقي يرافق هذه المصفوفة ويرمز له بالرمز $|A|$ او محدد A أو $\det(A)$ ، وسنتعرف في هذا الفصل على كيفية ايجاد محدد مصفوفة من الرتبة 1×1 ، 2×2 ، 3×3

أولاً :- محدد مصفوفة من الرتبة 1×1 :-

اذا كانت $A = [a_{11}]$

فإن $\det(A) = |A| = a_{11}$.

مثال :- اذا كانت

$$A = [-5]$$

$$\det(A) = |A| = -5 .$$

ثانياً :- محدد مصفوفة من الرتبة 2×2 :-

إذا كانت

القطر الثانوي

القطر الرئيسي

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

فإن

$$\det(A) = |A| = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}.$$

(محدد مصفوفة من الرتبة 2×2 هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي مطروحاً منه حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي.

مثال :- اوجد محدد المصفوفات التالية :-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Solution:

$$|A| = 2\times -1 - 3\times 2 = -2-6 = -8$$

$$|B| = 0\times -1 - (-2)(3) = 0 - (-6) = 6.$$

ثالثاً :- محدد مصفوفة من الرتبة 3×3 :-

هنالك عدة طرق لحساب محدد هذا النوع من المصفوفات ومنها :-

1) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

فإن :-

$$\det(A) = |A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

(طريقة المحددات الصغرى)

مثال :- أوجد محدد المصفوفة :-

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array} ?$$

Solution :-

$$|A| = -2(0-18) - 2(0-24) + 3(3-(-20))$$

$$= 36 + 48 + 69 = 153$$

ب) طريقة ساروس :-

تتلخص هذه الطريقة بأن نضيف على المصفوفة العمود الأول والثاني كعمودين رابع وخامس على التوالي لتصبح المصفوفة A في الشكل التالي :-

إضافة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ 3 & 2 & 1 & & \end{array}$$

وعليه فإن محدد المصفوفة A يصبح على الصورة التالية :-

الأقطار الرئيسية الثلاث

$$\det(A) = |A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) -$$

الأقطار الثانوية الثلاث

$$(a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

مثال :- باستخدام طريقة ساروس ، اوجد $|A|$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل :-

اقطار رئيسية

$$\begin{matrix} -2 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 6 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 3 \end{matrix}$$

اقطار ثانوية

$$|A| = (0 + 48 + 9) - (0 + ^{-}36 + ^{-}60)$$

$$|A| = (0 + 48 + 9) - (0 + ^{-}36 + ^{-}60).$$

$$= 57 + 96 = 153 .$$

مثال :- اوجد محدد المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

حسب الطريقة الأولى والطريقة الثانية .

الحل :-

① باستخدام طريقة المحددات الصغرى

$$|B| = 0(0+5) - 1(2\times 0 - 5) + {}^{-}1(-2-3)$$
$$= 0 + 5 + 5 = 10.$$

② باستخدام طريقة ساروس :-

$$\begin{matrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$$|B| = (0+5+2) - (0+0-3)$$
$$= 7 + 3 = 10.$$

مسائل وتمارين :-

1) اوجد محدد كل من المصفوفات التالية :-

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

٢) اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ x & -1 \end{bmatrix}$$

وكان $|A| = 2$ ، اوجد قيمة x ؟

نظرية الحافة

مثال: إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد A^3 ؟

الحل:

$$A^3 = \underbrace{A \times A}_{} \times A$$
$$= A^2 \times A \,.$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 + {}^-3 & 6+0 \\ {}^-2+0 & {}^-3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = A$$

2×2

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + {}^-6 & 3+0 \\ {}^-4+3 & -6+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} \,.$$

$$A \cdot A^2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6+{}^-6 & 12+{}^-9 \\ {}^-3+0 & -6+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

مسائل وتمارين :-

إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 2} , \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

أوجد :-

1) AB

2) BA

3) A^2

4) B^2.

نهاية الفصل السادس

من المصفوفات

المحاضرة السابعة عشر
تابع الفصل الثامن: المحددات

تابع الفصل الثامن : المحددات

خواص المحددات :-

سنتعرف خلال هذا البند على بعض من خواص المحددات والتي تفيدنا في تسهيل عملية حسابها ومنها :-

$\boxed{1}$ اذا وجد صف أو عمود في مصفوفة مربعة بحيث كانت جميع عناصره اصفار ، فان محدد تلك المصفوفة = صفر .

مثال :- اوجد محدد كل مما يلي :-

$$1)\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

$$2)\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 0$$

$\boxed{2}$ لا تتغير قيمة محدد المصفوفة اذا استبدلت الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف.

مثال :- اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2\times5 - 3\times-1$$
$$= 10 + 3$$
$$= 13.$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2\times5 - 3\times-1$$
$$= 10 + 3$$
$$= 13.$$

$\boxed{3}$ عند استبدال صف بصف آخر أو عمود بعمود آخر فإن اشارة المحدد تتغير.

مثال :- اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 13.$$

لو تم تبديل الصف الأول مع الصف الثاني، لنحصل على المصفوفة B :.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = -3 - 10 = -13 .$$

أما لو تم تبديل العمود الأول مع العمود الثاني، فسوف نحصل على المصفوفة ولتكن C بحيث :.

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |C| = -3 - 10 = -13 .$$

$\boxed{٤}$ اذا تساوت العناصر المتقابلة في صفين او عمودين في مصفوفة ما، فإن محدد تلك المصفوفة = صفر.

مثال :. لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0 .$$

(نلاحظ أن عناصر الصف الأول مساوية لعناصر الصف الثالث).

⑤ إذا ضرب عناصر صف أو عمود في المصفوفة A بعدد ثابت ، فإن قيمة المحدد الناتج بعد عملية الضرب تساوي المحدد الاصلي مضروباً في ذلك العدد .

مثال :- اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 6 + 5 = 11$$

على فرض ، ضربنا عناصر الصف الثاني بالعدد 2 - فتصبح المصفوفة A على الصورة التالية :-

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -10 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = -12 - 10 = -22.$$

$$\therefore 11 \times -2 = -22 .$$

مثال :- اذا كان محدد المصفوفة A يساوي -3 ، وضربنا عناصر العمود الأول بالعدد -5
اوجد محدد المصفوفة بعد عملية الضرب ؟

محدد المصفوفة بعد عملية الضرب $\Leftarrow$ $|A| = -3$

$$-3 \times -5 = 15.$$

$\boxed{6}$ محدد المصفوفة القطرية يساوي حاصل ضرب عناصر القطر .

مثال :- اوجد محدد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix}$$

$\Leftarrow$ مصفوفة قطرية

الحل :-

$$|A| = 6 \times -3 \times 1/9$$
$$= -18/9 = -2.$$

- كيفية ايجاد النظير الضربي لمصفوفة مربعة :-

تعريف :- النظير الضربي .

اذا كان لدينا المصفوفة A واوجدنا مصفوفة اخرى ولتكن B بحيث :-

$$A \times B = B \times A = I$$ ← مصفوفة الوحدة .

عندئذٍ نقول بأن المصفوفة B هي النظير الضربي للمصفوفة A ، ونرمز للمصفوفة B بالرمز A^{-1}.

- ولايجاد النظير الضربي A^{-1} للمصفوفة A (من الرتبة 2x2) فإنه يمكن استخدام الصيغة التالية :-

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

حيث $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$.

مثال :- اوجد النظير الضربي للمصفوفة :-

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

الحل :-

1) $|A| = -1 - 0 = -1$.

2) $$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= -1\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

وللتأكد من صحة الحل :-

$$A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{2\times 2}$$

مثال :- اوجد النظير الضربي للمصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} ?$$

الحل :-

$$|B| = 3 - (-2) = 5 .$$

$$B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} .$$

لنتأكد من صحة الحل :-

$$B \times B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/5 + 2/5 & -2/5 + 2/5 \\ -3/5 + 3/5 & 2/5 + 3/5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I .$$

- طريقة كريمر لحل نظام من المعادلات الخطية :-

لنفرض أن لدينا النظام التالي من المعادلات :-

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$$

① سنعرف محدد المعاملات دلتا (Δ) كما يلي :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

من المعادلة الأولى

من المعادلة الثانية

② سنجد مصفوفة جديدة من خلال استبدال عناصر العمود الأول ~~من معاملات x_1~~ في Δ بالحدود المطلقة $\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}$ ونجد محدد المصفوفة الجديدة ونرمز له Δx_1 :-

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

③ سنستبدل كذلك عناصر العمود الثاني في Δ بالحدود المطلقة $\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}$ وسنرمز لمحدد هذه المصفوفة بالرمز ΔX_2 بحيث يصبح كما يلي :

$$\Delta X_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} .$$

④ لإيجاد قيمة X_1 ، فإننا نقسم ΔX_1 على Δ
ولإيجاد قيمة X_2 ، فإننا نقسم ΔX_2 على Δ

$$X_1 = \frac{\Delta X_1}{\Delta} \quad , \quad X_2 = \frac{\Delta X_2}{\Delta} .$$

مثال : باستخدام طريقة كرامر ، أوجد حل النظام التالي من المعادلات :

$$3X_1 + 4X_2 = 2$$
$$2X_1 + 5X_2 = 3$$

الحل :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7.$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2.$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5.$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = -2/7 \quad , \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = 5/7.$$

وللتأكد من صحة الحل :-

$$3(-2/7) + 4(5/7) \stackrel{?}{=} 2.$$

$$-6/7 + \frac{20}{7}$$

$$\frac{14}{7} = 2$$

$$2(-2/7) + 5(5/7) \stackrel{?}{=} 3$$

$$-4/7 + \frac{25}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

مثال :- حل النظام التالي

$$4x_1 - 2x_2 = 10$$
$$3x_1 - 5x_2 = 11$$

باستخدام طريقة كرامر ؟

الحل :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -20 - (-6)$$
$$= -20 + 6 = -14.$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 11 & -5 \end{vmatrix} = -50 - (-22)$$
$$= -50 + 22 = -28.$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 44 - 30 = 14.$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-28}{-14} = 2.$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{14}{-14} = -1.$$

حتى نستطيع تطبيق هذه الطريقة لابد من أنه $\Delta \neq 0$.

مسائل و تمارين
المحاضرة الثامنة عشر

مسائل وتمارين

اوجد ناتج كل مما يلي :

1) $(-\infty,1] \cap [1,\infty) = \{1\}$

2) $(-\infty,1] \cap (1,\infty) = \phi$

3) $(-\infty,1) \cup (1,\infty) = (-\infty,\infty)$

2) $\dfrac{(2x)^{-2}}{2x^{-2}} = \dfrac{x^2}{2(2x)^2} = \dfrac{x^2}{8x^2} = 1/8 .$

3) $8 = 2^{-x} \Rightarrow 2^3 = 2^{-x} \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$

4) $\dfrac{-1}{3} \div \dfrac{1}{3^{-1}} = \dfrac{-1}{3} \div 3$

$= \dfrac{-1}{3} \times \dfrac{1}{3} = -1/9 .$

5) $-\left|-\frac{4}{2}\right| = -|-2| = -2.$

6) $\log 0.1^{-1} = -1 \times \log 0.1$

$= -\log \frac{1}{10} = -\log 10^{-1}$

$= \log 10 = 1$

7) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

$(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = 0$ ⟵ على التحليل

8) $(x^2 - y^2) = (x - y)(x + y).$

9) $(2x^2 - 4x + 2)$ قيمة المميز في المقدار

$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(2)(2)$

$= 16 - 16 = 0.$

(10) $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot 1}{2\cdot 3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}\right)^2$

$= \left(\frac{2}{6} - \frac{3}{6}\right)^2$

$= \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$.

11) قيمة X التي تحقق المعادلة

$-2x + 4 = -2 + x$.

$\Rightarrow -2x - x = -2 - 4$

$-3x = -6 \Rightarrow x = 2$.

12) $\sqrt[3]{0.064} = \sqrt[3]{0.4 \times 0.4 \cdot 0.4}$

$= 0.4$.

13) قيمة المجهول X في المقدار

$\log_2 x = 4$

$\Rightarrow x = 2^4 \Rightarrow x = 16$.

(4) $\sqrt[3]{-|27|} = \sqrt[3]{-27} = -3.$

(15) $\sqrt{x-4} = 3$ قيمة x في المقدار

بتربيع الطرفين :

$x - 4 = 9 \Rightarrow x = 13.$

(16) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^4}}} = (((x^4)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

$= (x^4)^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{4}{8}} = x^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{x}.$

(17) اوجد قيمة المتغيرات المجهولة

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 2y-4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x-1} \\ y+1 \\ z \end{bmatrix}.$$

الحل: $\frac{-3}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow -3(x-1) = 1$

$-3x + 3 = 1 \Rightarrow -3x = -2$

$\boxed{x = 2/3}$

$2y - 4 = y + 1$

$2y - y = 1 + 4 \Rightarrow \boxed{y = 5}$

$\boxed{z = -1}$

18) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$, $A^2 = ??$

$\Rightarrow A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 4 & +2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 16+16 & 8-4 \\ 32-16 & 16+4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 32 & 4 \\ 16 & 20 \end{bmatrix}$

19) $x/5 \div \frac{x-1}{x} = x/5 \times \frac{x}{(x-1)}$

$= \frac{x^2}{5(x-1)} = \frac{x^2}{5x - 5}$

20) $A \cap \bar{A} = U$??

اجابة خاطئة ، حيث أن المجموعتين منفصلتين وبالتالي $A \cap \bar{A} = \phi$.

أما $A \cup \bar{A} = U$.

21) اذا كانت محدد المصفوفة $A = -5$

وكانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ x & 0 \end{bmatrix}$$

اوجد قيمة X ؟

$$2 * 0 - 5 * X = -5$$

$$-5X = -5$$

$$\Rightarrow \boxed{X = 1}$$

22) اوجد محدد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

الحل:

$$|A| = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(-1-2) - 2(-3-0) + 0(3-0)$$

$$= +6 + 6 + 0 = 12.$$

تعديل على حل سؤال فى المحاضرة الثامنة عشر

ملاحظة: تم تعديل حل السؤال الثانى من المحاضرة المسجلة الثامنة عشر حيث يوجد الحل الصحيح فى المحاضرة النصية الثامنة عشر (يجب ابقاء العدد 2 فى المقام ولا يتم رفعه مع المتغير x حيث أن الأس السالب هو للمتغير x فقط)

وشكرا.

المحاضرة المباشرة الثانية

الفصل الثالث : التحليل

[1] * حلل المقادير الجبرية التالية :-

$$3xz^3 - 9xz - \frac{27}{5}x^2z^2$$
$$= 3xz\left(z^2 - 3 - \frac{9}{5}xz\right)$$

[2] $81x^2 - \frac{36}{25}y^2 = \left(9x - \frac{6}{5}y\right)\left(9x + \frac{6}{5}y\right)$

[3] $\frac{25}{x^2} - \frac{x^2}{16} = \left(\frac{5}{x} - \frac{x}{4}\right)\left(\frac{5}{x} + \frac{x}{4}\right)$

[4] $\frac{1}{64} + \frac{1}{y^3} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4y} + \frac{1}{y^2}\right)$

[5] $x^2 - 9x - 10 = (x+1)(x-10)$

[6] $-81z^3 - 9z^2 + 27z = 9z(-9z^2 - z + 3)$

المحاضرة المباشرة الثانية

الفصل الرابع : المقادير الكسرية .

جمع ، طرح ، ضرب وقسمة المقادير الكسرية :.

حل تمارين ومسائل خاصة بهذا الفصل :-

السؤال : اوجد ناتج ما يلي بابسط صورة :.

$\boxed{1}$ $$\frac{3x}{x-3} + \frac{1}{x^2-9}$$

$$= \frac{3x}{(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

ونضرب الحد الأول للمقدار الكسري ب $(x+3)$ لتوحيد المقامات :.

$$= \frac{(x+3)}{(x+3)} \cdot \frac{3x}{x-3} + \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{3x^2+9x+1}{x^2-9}$$

$\boxed{2}$ $\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{x-1}{x}$

نلاحظ أن للضرب أولوية أولاً قبل عملية الجمع ، وينتج أنه :

$= \frac{2}{x^2} + \frac{x-1}{x^2}$ مقامات متساوية

نجمع البسط مع البسط مقسوماً على المقام نفسه

$= \frac{x+1}{x^2}$

$\boxed{3}$ $\frac{1}{x^2-4} \div \frac{5}{x+2}$ نحول عملية القسمة إلى ضرب مع أخذ مقلوب المقدار الكسري الثاني

$= \frac{1}{(x-2)\cancel{(x+2)}} \times \frac{\cancel{(x+2)}}{5}$

$= \frac{1}{5(x-2)} = \frac{1}{5x-10}$.

$\boxed{4}$ $\dfrac{7-x}{x} - \dfrac{x^2-2x+1}{5}$

توحيد المقامات أولاً :-

$= \dfrac{5}{5} \cdot \dfrac{7-x}{x} - \dfrac{x^2-2x+1}{5} \cdot \dfrac{x}{x}$

حيث نضرب مقام الأول (x) في المقدار الثاني ومقام الثاني (5) في المقدار الأول.

$= \dfrac{35-5x}{5x} - \dfrac{x^3-2x^2+x}{5x}$

$= \dfrac{35-5x-x^3+2x^2-x}{5x}$

لاحظ عملية توزيع اشارة الطرح على جميع حدود بسط المقدار الثاني

$= \dfrac{-x^3+2x^2-6x+35}{5x}$

انتهت المحاضرة المباشرة الثانية .

بالتوفيق .. اختكم: أثير

الفصل الخامس :- المعادلات

اوجد حل المعادلات التالية

1) $-6x - 3 = 9$

$\Rightarrow -6x = 9 + 3 \Rightarrow -6x = 12 \Rightarrow x = \frac{+12}{-6} = -2$

2) $2x - \frac{1}{2}y = 1$

$\Rightarrow 2x = \frac{1}{2}y + 1 \Rightarrow x = \frac{\frac{1}{2}y + 1}{2}$

$= \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}$.

3) $-3y + \frac{1}{2}x = 1$ where $y = 1$?

$-3(1) + \frac{1}{2}x = 1$

$\frac{1}{2}x = 4 \Rightarrow \boxed{x = 8}$.

4) اوجد حل النظام التالي من المعادلات

$-2x + y = -1$

$3x - y = 0$

الحل بطريقة التعويض :- بالجمع :-

$\boxed{x = -1}$

ثم نعوض قيمة $x = -1$ في المعادلة الثانية نجد أن :-

$\boxed{y = -3}$

طريقة التعويض :-

من خلال المعادلة الثانية :-

$$3x = y$$

ثم نعوض هذه النتيجة بالمعادلة (1) نحصل على :-

$$-2x + 3x = -1$$

$$\boxed{x = -1}$$

وبتعويض النتيجة في المعادلة (1)

$$-2(-1) + y = -1$$

$$\boxed{y = -3}$$

[5] $5x^2 - 1/5 = 0$.

الحل :-

$$5x^2 = \frac{1}{5}$$

$$x^2 = \frac{1}{25}$$

$$x = \pm \frac{1}{5}$$

$\boxed{6}$ $-3x^2 - 12x = 0$.

الحل :- اخراج العامل المشترك $-3x$:-

$-3x(x+4) = 0$

$\Rightarrow -3x = 0 \Rightarrow x = 0$.

or $\Rightarrow x+4 = 0 \Rightarrow x = -4$.

$\boxed{7}$ $2x^2 - 3x - 1 = 0$.

باستخدام القانون العام :-

$b^2 - 4ac =$ المميز

$(-3)^2 - 4(2)(-1) =$

$17 =$

وبالتالي جذور المعادلة :-

$x = \dfrac{-b \mp \sqrt{\text{المميز}}}{2a}$

$= \dfrac{-(-3) \mp \sqrt{17}}{2(2)}$ → $\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$, $\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}$

من الفصل الخامس: المتراجحات الخطية

اوجد حل كل من المتراجحات الخطية

1) $-\frac{1}{2}x \geq 4$

الحل: نضرب طرفي المتراجحة بالعدد -2، نحصل على:-

$$-2\left(-\frac{1}{2}\right)x \leq 4 \times -2$$

$$x \leq -8$$

وبالتالي مجموعة الحل هي $(-\infty, -8]$

2) $3x - 1 < x + 1$

الحل:

$$3x - x < 1 + 1$$

$$2x < 2$$

$$x < 1$$

مجموعة الحل هي $(-\infty, 1)$

3) $3 \le 2x - 5 \le 5$

الحل: بإضافة العدد 5 لكافة أطراف المتراجحة، نحصل على

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \le & 2x - 5 & \le & 5 \\ +5 & & +5 & & +5 \\ \hline 8 & \le & 2x & \le & 10 \end{array}$$

وبالقسمة على العدد 2، نحصل على

$$4 \le x \le 5$$

ومجموعة الحل هي $[4, 5]$

الفصل السادس :- المتواليات

متواليات هندسية	متواليات حسابية
الحد الأول : a	الحد الأول :- a
أساس المتوالية : r	أساس المتوالية : d
$t_n = a r^{n-1}$	$t_n = a + (n-1)d$
(قيمة اي حد في متوالية هندسية)	(قيمة اي حد في متوالية حسابية)
$T_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}, r \neq 1$	$T_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$
(مجموع n من حدود متوالية هندسية)	(مجموع n من حدود متوالية حسابية)
$T_\infty = \frac{a}{1-r}$	$T_n = \frac{n}{2}[a + b]$
	(مجموع n من حدود متوالية حسابية علم فيها الحد الأول والأخير)

- تمرين (1) :- متوالية حسابية فيها $a = 1$ ، $d = -5$ ؟؟
اوجد t_{10} ، T_{10} ؟؟

الحل :-

① $t_{10} = a + (n-1)d$
$= 1 + (10-1)(-5) = 1 + -45 = -44$

② $T_{10} = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$
$= \frac{10}{2}[2(1) + (10-1)(-5)] = 5(-43) = -215$

تمرين (٢): متوالية هندسية فيها $a = -1$ ، $r = 2$.

أوجد t_{10} ، T_7 ؟؟

① $t_{10} = a r^{n-1}$

$= (-1)(2)^{10-1} = -1(2)^9 = -1 \times 512 = -512$

② $T_7 = \dfrac{a(r^n - 1)}{r-1} = -1\dfrac{(2^7-1)}{2-1} = -1(128-1) = -127$

تمرين (٣) :- لدينا المتوالية التالية

$1, 5, 25, 125, \ldots$

ما نوعها وأساسها ثم أوجد قيمة الحد الخامس؟

الحل :- نلاحظ أن المتوالية هي متوالية هندسية

وأساسها $r = \dfrac{25}{5} = 5$

وقيمة t_5 هي :-

$t_5 = a r^{n-1}$

$= 1(5)^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$= 625$.

الفصل السابع :- المصفوفات

سؤال :- اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

أوجد :-

1) $A - B$ ، 2) $B + A$ ، 3) $-2A$ ، 4) $B - B$

الحل :

1) $$A - B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2) $$B + A = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

3) $$-2A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -10 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

4) $$B - B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تمرين :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{1\times 4}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

أوجد :

① $A \times B = [-1\times -1 + 2\times -3 + 0\times 1 + 4\times 0]$

$= [-5]$.

② $3AB = 3(AB) = 3[-5] = [-15]$.

تمرين ٣ :- اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

اوجد :-

① $AB = \begin{bmatrix} -12 + -2 \\ -24 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ -22 \end{bmatrix}$

② BA : لا تجوز عملية

الفصل الثامن :- المحددات

مثال :- اوجد محددة المصفوفة

① $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = \det(A) = -1 \times 1 - 2 \times -2 = -1 + 4 = 3$

② $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

$|A| = 1(-1) - 2(0) + 3(-5) = -1 - 15 = -16.$

مثال :- اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ x & -1 \end{bmatrix}$$

وكانت $|A| = 2$ ، اوجد $x = ??$

$2 = (-2)(-1) - 3x$

$2 = 2 - 3x$

$-3x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

الواجب الأول لمقرر مبادئ الرياضيات

المستوى الأول / إدارة أعمال

جامعة الدمام / التعليم عن بعد

السؤال 1

إن ناتج المقدار التالي

$-|-x|$

حيث x تمثل عدد حقيقي يساوي

- ◉ $\boxed{-x}$
- ○ x
- ○ $\pm x$
- ○ لا شيء مما ذكر

السؤال 2

إن ناتج ضرب المقدارين

$(-3x^{-2})(4x^2 - 5x^3) =$

- ○ $-15x + 12$
- ◉ $\boxed{15x - 12}$
- ○ $15x + 12$
- ○ $-15x - 12$

السؤال 3

يمكن كتابة المقدار التالي

$$\frac{(x^2)^{-3}}{(x^3)^{-2}}$$

- ◉ $\boxed{1}$
- ○ -1
- ○ x
- ○ $\frac{1}{x}$

السؤال 4

إن ناتج المقدار التالي:

$(-\infty,5)\cap[-5,10]$

يساوي

- $[-5,10)$
- $\boxed{[-5,5)}$
- $(-5,5]$
- $(-5,10]$

السؤال 5

إن قيمة المجهول x في المقدار

$3^{-x} = 27$

تساوي

- $\boxed{-3}$
- 3
- -2
- -4

السؤال 6

إن ناتج المقدار التالي

$\log 100^{-2}$

هي

- 4
- $\boxed{-4}$
- 6
- -6

لا تنسونا من صالح دعائكم

سبحان الله وبحمده ، سبحان الله العظيم

@e7sas_ud

الواجب الثاني لمقرر مبادئ الرياضيات

المستوى الأول / إدارة أعمال

جامعة الدمام / التعليم عن بعد

السؤال 1

إن حل المعادلة

$$4x^2 - 8x = 0$$

هو

- x=0, x=4
- x=0 and x=-4
- x=0 and x=-2
- $\boxed{x=0 \text{ and } x=2}$

السؤال 2

يمكن كتابة المقدار الكسري

$$\frac{x^4 - 4}{x^2 + 2}$$

على الصورة التالية

- $x^2 + 2$
- $(x+2)^2$
- $\boxed{x^2 - 2}$
- (x-2)(x+2)

السؤال 3

يمكن تحليل المقدار

$$(x^2 - x - 2)$$

على الصورة

- (x+2)(x+1)
- $\boxed{(x-2)(x+1)}$
- (x+2)(x-1)
- (x-2)(x-1)

السؤال 4

إن حل المعادلة

$$2x - \frac{1}{2}y = -2$$

عندما

$$y = 4$$

هي

- 1
- $\boxed{0}$
- 3
- 2

السؤال 5

إن ناتج المقدار

$$\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$$

هو

- -1
- $\boxed{\frac{x^2+4}{2x}}$
- $\frac{1}{x}$
- 1

السؤال 6

المقدار المكافئ للمقدار

$$(x-1)(x^2+x+1)$$

هو

- $(x+1)^3$
- (x^2-1)
- (x^3+1)
- $\boxed{(x^3-1)}$

<u>تتوقّف السّعادة على ما تستطيع إعطائه، لا على ما تستطيع الحصول عليه</u>

لا تنسونا من صالح دعائكم

سبحان الله وبحمده ، سبحان الله العظيم

E7sas

e7sas

الواجب الثالث لمقرر مبادئ الرياضيات

المستوى الأول / إدارة أعمال

جامعة الدمام / التعليم عن بعد

السؤال 1

متوالية هندسية فيها الحد الأول 5 واساسها 2- فإن قيمة الحد السادس يساوي

- 160
- 320-
- 320
- $\boxed{160-}$

السؤال 2

متوالية هندسية اساسها يساوي 5- وقيمة الحد الثاني يساوي 1 فإن قيمة الحد الأول يساوي

- -5
- 5
- $\boxed{\frac{-1}{5}}$
- $\frac{1}{5}$

السؤال 3

إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -4 & -1\end{bmatrix}$$

فإن

$$A^2=$$

- $\begin{bmatrix}-7 & 8\\ 8 & -7\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}-7 & 8\\ 0 & -7\end{bmatrix}$
- $\boxed{\begin{bmatrix}-7 & 0\\ 0 & -7\end{bmatrix}}$
- $\begin{bmatrix}-7 & 0\\ 8 & -7\end{bmatrix}$

السؤال 4

إذا كان

$$B=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

فإن قيمة

$$2A+B=$$

- $\begin{bmatrix}-3 & -4\\ 8 & 3\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & 3\end{bmatrix}$
- $\boxed{\begin{bmatrix}3 & -4\\ 8 & 3\end{bmatrix}}$
- $\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 8 & 3\end{bmatrix}$

السؤال 5

متوالية حسابية اساسها يساوي 2- وفيها الحد الأول يساوي 1- فإن مجموع أول خمسة حدود يساوي

- 16-
- 25
- $\boxed{25-}$
- 16

السؤال 6

إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

فإن

$$A \times B =$$

- $\begin{bmatrix} -8 \end{bmatrix}$
- لا تجوز عملية الضرب
- $\boxed{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}$
- $\begin{bmatrix} -6 \end{bmatrix}$

السؤال 7

إذا كانت

$$\begin{bmatrix} 3-2x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x \\ 2y-1 \end{bmatrix}$$

فإن قيمة كل من

x,y

هي

- x=0, y=-1
- $\boxed{\text{x=-1, y=0}}$
- x=0, y=1
- x=1, y=0

السؤال 8

إن قيمة محدد المصفوفة

$$A= \begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{matrix}$$

يساوي

- $\boxed{1}$
- 1-
- 0
- 5-

السؤال 1 :

يمكن كتابة المقدار الكسري

$$\frac{x^2-25}{x+5}$$

على الصورة التالية

- $(x+5)^2$
- $(x-5)^2$
- $\boxed{x-5}$
- $x+5$

السؤال2 :

إن ناتج المقدار

$(-5,1]\cap[-1,5)$

يساوي

- $\boxed{[-1,1]}$
- $(-1,1)$
- $(-5,-1)$
- $(-5,-1]$

السؤال3 :

إن ناتج المقدار

$$\frac{27x^{-4}}{9x^{-3}}$$

يساوي

- $3x$
- $\frac{3}{x}$
- $\frac{x}{3}$
- $3x^2$

السؤال4 :

يمكن تحليل المقدار

$$(x\ \ +1)^2$$

على الصورة

- $(x-1)(x-1)$
- لا يمكن تحليله
- $(x-1)(x+1)$
- $(x+1)(x+1)$

السوال ٥

ناتج تحليل المقدار الجبري

$$x^2 - 7x - 8$$

يساوي

$$(x+8)(x-1)$$

- صواب
- خطأ

السؤال 6 :

إذا كانت

$$A = \{-5, \pi, \frac{3}{4}, \sqrt{2}, 0, 4\}$$

فإن مجموعة الاعداد غير النسبية هي

- $\{\sqrt{2}\}$
- $\{-5, \frac{3}{4}, 4, 0\}$
- $\{\sqrt{2}, \pi\}$
- $\{-5, 2, \pi\}$

السؤال 7 :

إن ناتج المقدار

$$\frac{-1}{3} \times \frac{1}{3^{-1}}$$

يساوي

- 1
- $\boxed{1-}$
- $\frac{1}{9}$
- $\frac{-1}{9}$

السؤال 8 :

إذا كانت

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$

و

$$B = \{4,5\}$$

فإن

$$B - A =$$

- B
- $\boxed{\varnothing}$
- $\{1,2,3\}$
- $\{4,5\}$

السوال ٩

إن ناتج المقدار

$$2x^{-1} + \frac{x}{2}$$

هو

- $\boxed{\dfrac{x^2+4}{2x}}$
- $\dfrac{1}{x}$
- 1
- 1-

السؤال 10 :

ناتج المقدار

$-\log 0.1^{-1}$

تساوي

- 1
- 2
- -1
- 2-

السؤال 11 :

إن حل المعادلة

$4x^2 - 8x = 0$

هو

- $x = 2$
- $x = 0, x = 2$
- $x = -2$
- $x = 0, x = -2$

السؤال 12 :

ناتج المقدار التالي يمثل حلا صحيحا

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^4}}} = x$

- صواب
- خطأ

السؤال 13 :

إن قيمة x التي تحقق المعادلة

$$-2x+4=-2-x$$

تساوي

- 2
- 6
- 6-
- 2-

السؤال 14 :

إن ناتج المقدار التالي:

$$(-\infty,1]\cup[1,\infty)$$

هو:

- $(-\infty,\infty)$
- $\{1\}$
- 1
- $[-1,1]$

السؤال 15:

يمكن كتابة المقدار التالي

$$\frac{(2x)^2}{2x^{-2}}$$

- $2x^4$
- $2x^2$
- x^4
- $\frac{1}{2}$

السؤال 16:

إن ناتج المقدار التالي:

$$(-\infty,1]\cup[1,\infty)$$

هي:

- $(-\infty,\infty)$
- $\boxed{1}$
- $[-1,1]$
- $\{1\}$

السؤال 17:

إن حل المعادلة

$$x^2-6x=-9$$

هي

- لا يوجد حل حقيقي
- x=3, x =-3
- $\boxed{x=3}$
- x=-3

السؤال 18 :


الجذر التكعيبي لأي عدد سالب هو قيمة غير معرفة

صواب

خطأ

السوال ١٩ :

حل المعادلة

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

هو

$$x = -1,\ x = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{x = 1,\ x = \frac{1}{2}}$$

$$x = -1,\ x = \frac{1}{2}$$

$$x = 1,\ x = -\frac{1}{2}$$

السؤال 20 :

إن ناتج المقدار العددي

$$-\left|-\frac{2}{4} \times -2\right|$$

يساوي

- 2
- $\boxed{-1}$
- -2
- 1

السؤال 21

يمكن تبسيط المقدار

$$\sqrt{x^8y^6}$$

على الصورة

- x^3y^4
- x^6y^4
- $\boxed{x^4y^3}$
- x^2y

السوال ٢٢:

القيمة الحدية للمقدار

$$\sqrt[3]{-0.064}$$

تساوي

- 0.04 -
- 0.04
- 0.4 -
- 0.4

السؤال23:

العبارة الرياضية التالية عبارة صحيحة

$$\sqrt[4]{16x^8} = 2x$$

- صواب
- خطأ

السؤال24:

إن حل المعادلة

$2x = 5y - 2$

عندما

$y = -2$

يساوي

- $\boxed{-6}$
- 6
- 3
- -3

السوال ٢٥:

إن ناتج المقدار التالي

$(-\infty, -1] \cap [1, \infty)$

- $(-\infty, 1)$
- $(-\infty, \infty)$
- $\varnothing$
- $(-1, 1)$

السؤال 26:

نعتبر

$$A = \{\sqrt{4}, \frac{1}{2}\}$$

مجموعة جزئية من

- الاعداد الصحيحة
- الاعداد الطبيعية
- الاعداد غير النسبية
- $\boxed{\text{الاعداد النسبية}}$

:السؤال 27

إذا كان

$$U = \{1,2, \dots , 10\}$$
$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$
$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

فإن

$$B - A =$$

- A
- $\boxed{\varnothing}$
- B
- U

:السؤال 28

ناتج المقدار

$\log_5 125^2 - \log_3 9$

يساوي

- 2
- 3
- 4
- 1

السؤال 29:

إن ناتج المقدار التالي:

$(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$

هي:

- $(-\infty, \infty)$
- 1
- $[-1, 1]$
- $\{1\}$

السؤال 30:

المقدار المكافئ للمقدار

$(x+1)(x^2-x+1)$

هو

- $(x+1)^3$
- (x^3-1)
- (x^3+1)
- (x^2-1)

السؤال 31:

إذا كانت

$A=\{a,b,c,d\}$

$B=\{1,2\}$

فإن

$A-A=B-B$

- صواب
- خطأ

السؤال 32:

حل النظام التالي من المعادلات

$$3x - 2y = 10$$
$$x - 2y = -2$$

هو

- $x = -6, y = -4$
- $x = 6, y = 4$
- $x = 6, y = -4$
- $x = -6, y = 4$

السؤال 33:

العبارة الرياضية التالية عبارة صحيحة

$$\sqrt[3]{-x^3} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

- صواب
- خطأ

السؤال 34:

ناتج المقدار

$$\frac{3^2 2^{-2}}{3^{-1} 2^1}$$

يساوي

e7sas

- $\frac{3}{2}$
- $\boxed{\frac{27}{8}}$
- $\frac{8}{27}$
- $\frac{2}{3}$

السؤال 35 :

إن ناتج المقدار

$$\frac{-|25|}{-|-5|}$$

هو

e7sas

- -5
- $\boxed{5}$
- -25
- ± 5

السؤال 36 :

قيمة المقدار

$$\left(\frac{x^{-3}}{x^{-2}}\right)^2$$

- x
- $\boxed{x^2}$
- x^{-2}
- x^{-1}

السؤال 37 :

ناتج المقدار

$$\frac{12}{x^4} \div \left(\frac{x^3}{3}\right)^{-1} =$$

- $\frac{1}{4x}$
- $4x^{-1}$
- $4x$
- $\boxed{\frac{x}{4}}$

السؤال 38 :

العبارة الرياضية التالية عبارة صحيحة

$$\sqrt[3]{-x^3} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

e7sas

صواب

$\boxed{\text{خطأ}}$

السؤال 39 :

إذا كان

$$\sqrt{x-4} = 3$$

فإن قيمة x تساوي

e7sas

4

3

9

$\boxed{13}$

السؤال 40 :

يمكن تحليل المقدار

$$(25 - y^2)$$

e7sas

على الصورة

$\boxed{(5-y)(5+y)}$

$(y-5)(y+5)$

$(5-y)^2$

$(x-5)(x+5)$

السؤال 41:

ناتج المقدار

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2$$

يساوي

- $\frac{-1}{6}$
- $\frac{-1}{36}$
- $\frac{25}{36}$
- $\boxed{\frac{1}{36}}$

السؤال 42 :

$A \cup \overline{A} = U$

حيث U تمثل المجموعة الكلية

- $\boxed{\text{True}}$
- False

السؤال 43 :

يمكن كتابة المقدار

$(2^2 - x)(2^2 + x)$

على الصورة

- $(16 - x^2)$
- $(x^2 - 16)$
- $(4 - x^2)$
- $(x^2 + 16)$

السؤال 44 :

قيمة x في المقدار

$16 = 2^{-x}$

هي

- 3-
- 4-
- 3
- 4

السؤال 45 :

ناتج المقدار

$$\left(2 \div \frac{-10}{5}\right)^2$$

تساوي

- 1
- -1
- 2
- 2-

السؤال 46 :

إن ناتج تحليل المقدار

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

هي

- $(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$
- لا يمكن تحليلها
- $(x + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$
- $(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$

السؤال 47:

د ضرب المقادير الكسرية, فإنه لا بد من توحيد المقامات أولا ثم نضرب البسط مع البسط مقسوما على المقام نفسه

- صواب
- خطأ

السوال 48:

إذا كان قيمة المميز في المقدار الثلاثي لمعادلة تربيعية يساوي صفرا, فإنه يوجد حل وحيد فقط لهذه المعادلة

- True
- False

السؤال 49:

تمة (مكملة) المجموعة الكلية يساوي المجموعة الخالية أما متممة (مكملة) المجموعة الخالية فيساوي المجموعة الكلية

- صواب
- خطأ

السؤال 50 :

ناتج المقدار العددي

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times 4 \div 2 =$$

- $\frac{1}{2}$
- 0
- $-\frac{1}{2}$
- 1

السؤال 51:

قيمة المجهول في المقدار التالي

$\log_y 81 = 4$

يساوي العدد 3

- ◯ صواب
- ◯ خطأ

السؤال 52 :

إن ناتج المقدار التالي

$-\log\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}$

هي

- ◯ $\boxed{-3}$
- ◯ -6
- ◯ 6
- ◯ 3

53 :

العبارة الرياضية التالية عبارة صحيحة

$\sqrt[5]{-32} = -|-2|$

- ◯ صواب
- ◯ خطأ

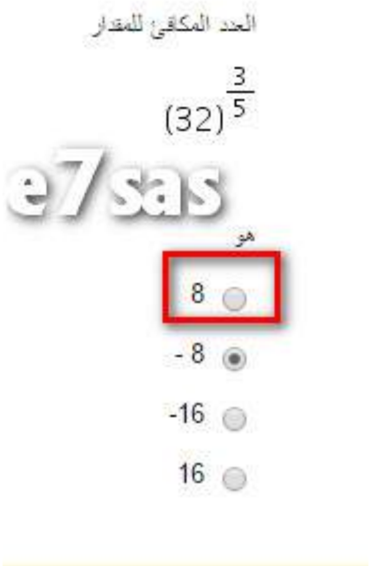
السؤال 54 :

الجذر التربيعي لاي عدد سالب هو قيمة غير معروفة:

صواب

خطأ

السؤال 55 :


العدد المكافئ للمقدار

$(32)^{\frac{3}{5}}$

هو

- 8
- - 8
- -16
- 16

السؤال 56:

تبسيط المقدار

$$\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x^5}$$

هو

- x^2
- x
- x^3
- x^4

السؤال 57 :

إن قيمة المميز في المعادلة التالية

$$2x^2-x-1=0$$

يساوي

- 9
- 7-
- 16
- 0

السؤال 58 :

ناتج المقدار

$$\sqrt[3]{|-27|} =$$

- 3
- 9
- -3
- غير معرف

السؤال 59 :

قيمة المجهول x في المقدار

$$\log_2 x = 1$$

هي

- 1
- 4
- 8
- 2

السؤال 60 :

العبارة الرياضية التالية عبارة صحيحة

$$15x^2 - 30x + 5x^3 = -5(-3x^2 + 6x - x^3) = 5x(3x - 6 + x^2)$$

- صواب
- خطأ

السؤال 61 :

مجموعة الاعداد الطبيعية هي مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد النسبية

- صواب
- خطأ

٦٢ :

ناتج المقدار العددي فيما يلي يساوي 1

$$\frac{1}{2^{-2}} \times \frac{1}{2^2} = 1$$

- صواب
- خطأ

٦٣:

المقدار العددي

$\log 0.01^{\frac{1}{2}}$

يساوي

- 1
- 2
- 2-
- 1-

٦٤:

ناتج عملية الاتحاد تمثل حلا صحيحا

$(-3,3) \cup (3,\infty) = [-3, \infty)$

- صواب
- خطأ