

اسم المقرر
التحليل الإحصائي

أستاذ المقرر
د/ محمد زايد



جامعة الملك فيصل
عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

المحاضرة (11)

مقدمة في اختبارات الفروض الإحصائية



اختبارات الفروض الإحصائية

المقصود بالفروض هنا الفروض الإحصائية **statistical hypotheses** بمعنى الفروض التي تتعلق بالمجتمع الإحصائي المسحوبة منه العينة، أو توزيع هذا المجتمع أو معالمه كالوسط الحسابي أو النسبة في المجتمع.

والفرض Hypothesis ما هو إلا استنتاج أو تفسير مبدئي يتعلق بأحد المؤشرات الخاصة بالمجتمع.

ويكون هذا الفرض مبنيا على حيثيات معقولة أو منطقية وليس على حسابات دقيقة خاصة بالمجتمع لأننا نفترض أنه لا يمكن دراسة المجتمع بالكامل عن طريق الحصر الشامل بل نحاول استنتاج أو الاستدلال على مقاييس المجتمع باستخدام بيانات ونتائج العينة.

اختبارات الفروض الاحصائية

فمثلاً : قد يفترض باحث أن متوسط الدخل الشهري للفرد في دولة ما هو 200 دولار (بناءً على ما يراه من مستوى المعيشة في هذا البلد وأوضاعه الاقتصادية) ، أو قد يفترض باحث آخر أن نسبة الناخبين في إحدى الدوائر الذين يؤيدون مرشحاً معيناً لا تقل عن 30 % ، ويحتاج الباحث إلى اختبار مدى صحة هذه الفروض بشكل علمي (إحصائي) لمعرفة مدى صحتها. أي أن يصل الباحث إلى قرار إما بقبول الفرض أو عدم قبوله (أي رفضه) وذلك باحتمال معين.

وقبل تناول كيفية إجراء الاختبارات الإحصائية نستعرض أولاً بعض المفاهيم والتعريفات الأساسية اللازمة لهذا الموضوع حتى تكون الصورة أكثر وضوحاً.

اختبارات الفروض الاحصائية

القرار الإحصائي:

القرار الإحصائي هو قرار مبني على تجربة تم القيام بها على عينة عشوائية من مجتمع الدراسة.

مثلا: لاتخاذ قرار بشأن هل يؤدي منح حوافز للموظفين إلى رفع الإنتاجية ، يتم اختيار عينة من الموظفين وتطبق عليهم تجربة (بمنحهم حوافز) ، ثم تقارن إنتاجيتهم بباقي الموظفين ، ويكون دور الإحصاء هو بيان هل الفرق في الإنتاجية يرجع إلى الصدفة أم ربما يرجع فعلا إلى المؤثر الذي حدث (منح الحافز) وذلك بدرجة ثقة محددة. وتكون الوسيلة المساعدة في اتخاذ هذا القرار هي اختبارات الفروض الإحصائية.

اختبارات الفروض الاحصائية

الفرض العدمي (أو الصفري) The Null Hypothesis

الفرض العدمي هو "الفرض الأساسي المراد اختباره". ويرمز له عادة بالرمز H_0 . هذا الفرض يأخذ - عادة - شكل معادلة أو مساواة.

فمثلاً إذا كان الفرض العدمي المراد اختباره هو أن متوسط دخل الفرد في إحدى الدول هو 200 دولار شهرياً فإن هذا الفرض يكتب بالرموز كما يلي:

$$H_0 : \mu = 200$$

ويقرأ بالشكل التالي:

الفرض العدمي هو أن متوسط دخل الفرد في هذه الدولة هو 200 دولار شهرياً.

اختبارات الفروض الاحصائية

وكمثال آخر: إذا كان الفرض المراد اختباره هو أن نسبة المؤيدين لبرنامج اقتصادي معين بين مواطني إحدى الدول هي % 30، فإن هذا الفرض يكتب بالرموز كما يلي :

$$H_0 : P = 0.30$$

ويقرأ بالشكل التالي :

الفرض العدمي هو أن نسبة المؤيدين للبرنامج الاقتصادي هي 0.30.

اختبارات الفروض الاحصائية

الفرض البديل The Alternative Hypothesis

في اختبارات الفروض يتحتم وضع فرض آخر غير الفرض العدمي المراد اختباره يسمى الفرض البديل. وهذا الفرض "هو المرجح قبوله في حالة رفض الفرض العدمي" أي لابد من تحديد فرض آخر بديل في الوقت الذي نحدد فيه الفرض العدمي، وبالتالي فإن الفرض البديل يعرف كما يلي :

"الفرض البديل هو الفرض الآخر الذي يرجح قبوله في حالة رفض الفرض العدمي" ، ويرمز له عادة بالرمز : H_1

اختبارات الفروض الاحصائية

والفرض البديل له أهمية كبيرة في قياس الظواهر الاجتماعية - كما سنرى - فهو الذي يحدد نوع الاختبار المستخدم. ويتخذ الفرض البديل أحد أشكال ثلاثة هي:

أ- أن يأخذ شكل "**لا يساوي**". وفي هذه الحالة نستخدم ما يسمى: **اختبار الطرفين**

فمثلاً: إذا كان الفرض العدمي هو أن متوسط الدخل الشهري لفئة معينة في المجتمع هو 200 ريال. $H_0 : \mu = 200$

فإن الفرض البديل في هذه الحالة يأخذ الشكل التالي : $H_1 : \mu \neq 200$

بمعنى أن متوسط دخل هذه الفئة من المجتمع " لا يساوي " 200 ريال شهرياً.

اختبارات الفروض الاحصائية

ب- أن يأخذ شكل "**أكبر من**". وفي هذه الحالة نستخدم ما يسمى: اختبار الطرف الأيمن

فمثلاً : قد يكون الفرض البديل كما يلي : $H_1 : \mu > 200$
أي أن متوسط الدخل لهذه الفئة من المجتمع أكبر من 200 ريال شهرياً.

ج- أن يأخذ شكل "**أقل من**" ، وفي هذه الحالة نستخدم ما يسمى: اختبار الطرف الأيسر

فمثلاً : قد يكون الفرض البديل هو : $H_1 : \mu < 200$
أي أن متوسط الدخل لهذه الفئة من المجتمع أقل من 200 ريال شهرياً.

اختبارات الفروض الاحصائية

وسيلة الاختبار:

هي علاقة رياضية تربط بين المعلمة المطلوب اختبار فرض بشأنها والإحصاءة التي تناظرها المحسوبة من العينة. هذه العلاقة ينتج عنها قيمة تسمى عادة **إحصاءة الاختبار** ، تساعد هذه القيمة في اتخاذ قرار بشأن قبول أو عدم قبول الفرض العدمي.

وفي العلاقة المشار إليها ، تستخدم بعض المعلومات المستخرجة من العينة مثل حجم العينة والوسط الحسابي للعينة والانحراف المعياري للعينة والنسبة في العينة وغيرها.

اختبارات الفروض الاحصائية

الخطأ في اتخاذ القرار:

في حالة قبول الباحث لفرضه العدمي، فلا مجال للبحث في الفرض البديل، أما في حالة حدوث العكس بمعنى رفض الفرض العدمي فإنه يتحتم في هذه الحالة قبول الفرض البديل، على أنه من الجدير بالذكر أن الباحث هنا عرضة للوقوع في الخطأ عند اتخاذ قراره بقبول الفرض العدمي أو رفضه، فقد يرفض فرضاً هو في الواقع صحيح، وقد يقبل فرضاً هو في الواقع غير صحيح. لذلك فقد تم تصنيف هذه الأخطاء إلى نوعين هما:

اختبارات الفروض الاحصائية

الخطأ من النوع الأول : Type I Error

الخطأ من النوع الأول هو "رفض الفرض العدمي بينما هو صحيح" ، أي أنه على الرغم من أن الفرض العدمي في الواقع صحيح وكان من الواجب قبوله فقد تم أخذ قرار خاطئ برفضه. وباختصار شديد فإن الخطأ من النوع الأول هو "رفض فرض صحيح".

الخطأ من النوع الثاني : Type II Error

وفي المقابل فإن الخطأ من النوع الثاني يعني "قبول الفرض العدمي بينما هو خاطئ" ، أي أنه على الرغم من أن الفرض العدمي خاطئ وكان من الواجب رفضه فقد تم أخذ قرار خاطئ بقبوله. وباختصار شديد فإن الخطأ من النوع الثاني هو "قبول فرض خاطئ".

اختبارات الفروض الاحصائية

مستوى المعنوية (الدالة) : Level of Significance

المقصود بمستوى المعنوية هو "احتمال حدوث الخطأ من النوع الأول" أو نسبة حدوثه، أي "احتمال رفض الفرض العدمي بينما هو صحيح".

وعادة يرمز إلى مستوى المعنوية بالرمز اللاتيني ألفا α وأشهر قيمتين لمستوى المعنوية هما 5%، 1%، ولكن ليس هناك ما يمنع من أن يأخذ قيما أخرى.

ومن الملاحظات المهمة هنا هو أن "مستوى المعنوية" والذي يسمى أحياناً "مستوى الدالة" هو المكمل لدرجة الثقة بمعنى أن مجموعهما يساوي 100% أو واحد صحيح. فإذا كانت درجة الثقة 95% فإن مستوى المعنوية يساوي 5%. والعكس صحيح فإذا كان مستوى المعنوية 5% فإن هذا يعني أن درجة الثقة 95%.

ولعل من أهم الملاحظات هنا هو استخدام تعبير "مستوى المعنوية" في حالات اختبارات الفروض، بينما يستخدم مصطلح "درجة أو مستوى الثقة" في حالات التقدير.

اختبارات الفروض الاحصائية

المنطقة الحرجة:

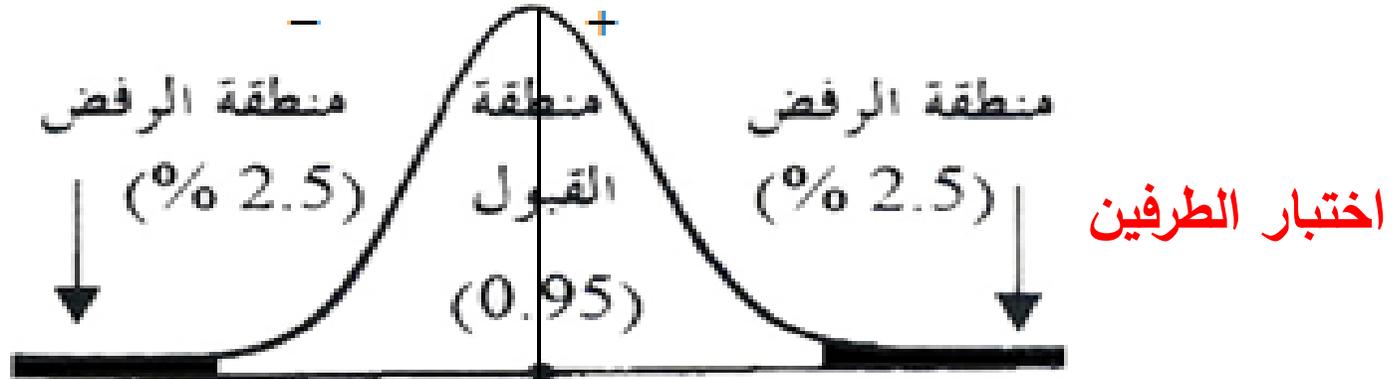
المنطقة الحرجة هي باختصار التمثيل البياني لمستوى المعنوية. وتمثل هذه المنطقة في صورة مساحة تحت منحنى أحد التوزيعات الإحصائية يكون في الغالب إما التوزيع الطبيعي أو توزيع t.

والفكرة الأساسية في اختبار الفرض هي تقسيم المساحة تحت المنحنى إلى منطقتين: أحدهما تسمى "**منطقة القبول**" أي منطقة قبول الفرض العدمي. والأخرى تسمى "**منطقة الرفض**"، أي منطقة رفض الفرض العدمي والتي تسمى أحيانا "**بالمنطقة الحرجة**".
"Critical region".

والنقطة الجديرة بالملاحظة هنا هي أن **منطقة القبول تمثل درجة الثقة، بينما تمثل منطقة الرفض مستوى المعنوية**. وهناك ثلاث حالات مختلفة لمنطقتي القبول والرفض هي :

اختبارات الفروض الاحصائية

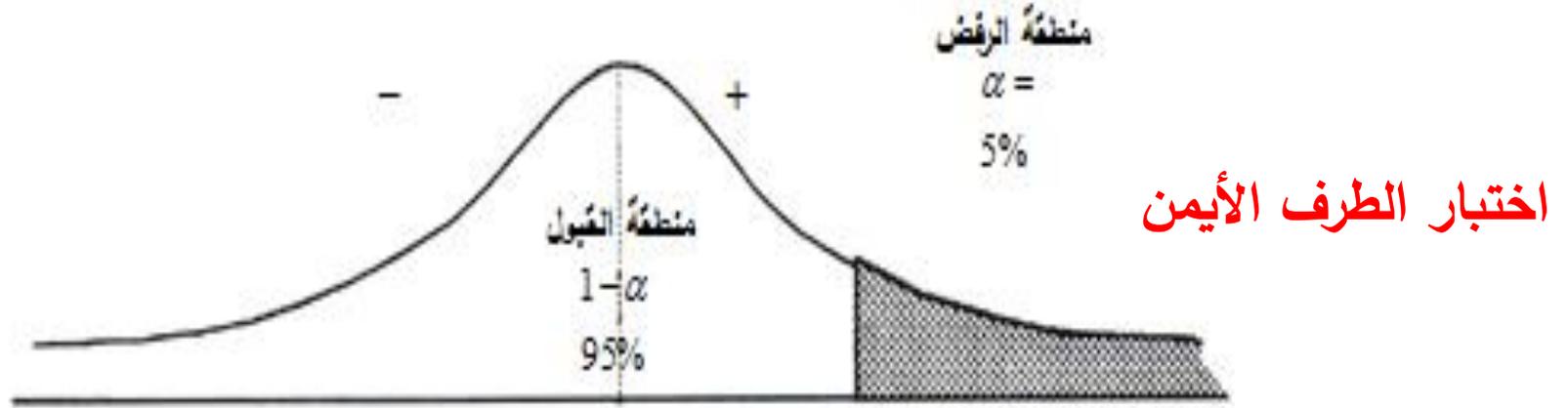
الأولى: إذا كان الفرض **البديل** يأخذ شكل " لا يساوي " كان يكون الفرض في هذه الحالة هو أن متوسط دخل الفرد لا يساوي 200 ريال فإن منطقة الرفض تكون موزعة على طرفي المنحنى بالتساوي، ويسمى الاختبار في هذه الحالة " **اختبار الطرفين** "، والذي يأخذ الشكل التالي (بافتراض أن $\alpha=5\%$) :



حيث تمثل المنطقة البيضاء غير المظللة منطقة القبول والتي تساوي 95% وبالتالي فمنطقة الرفض مقسمة بالتساوي على طرفي المنحنى في هذه الحالة تكون قيمة كل منهما 2.5%.

اختبارات الفروض الاحصائية

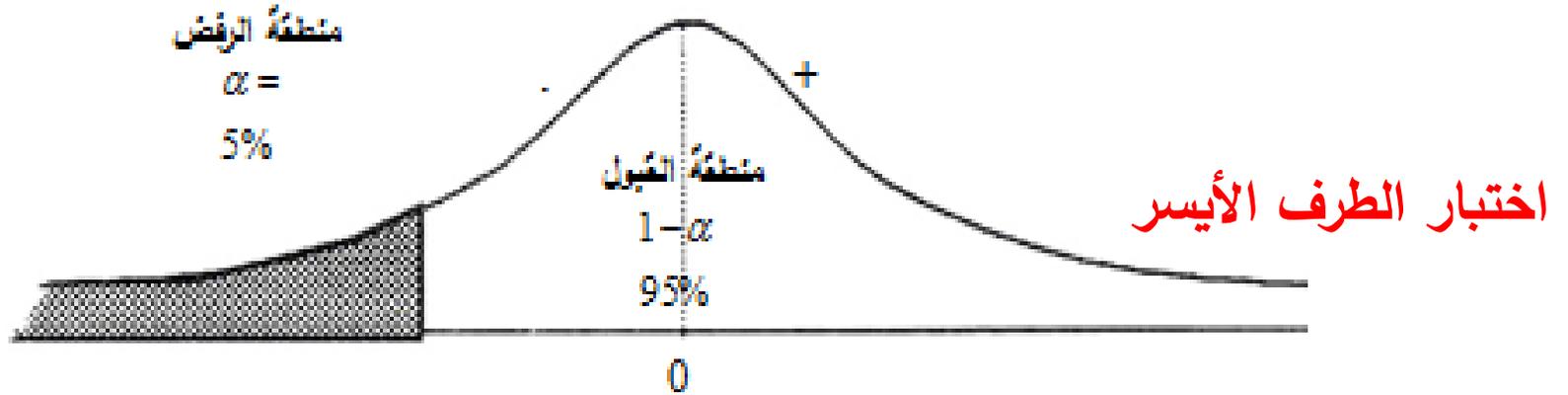
الثانية : إذا كان الفرض البديل يأخذ شكل "أكبر من" فإن منطقة الرفض تكون مركزة بالكامل في الطرف الأيمن للمنحنى. ويسمى الاختبار في هذه الحالة **اختبار الطرف الأيمن**. والذي يأخذ الشكل التالي أدناه :



فالفرض العدمي هنا نفس فرض المثال السابق، بينما الفرض البديل هو $H_1 : \mu > 200$ بمعنى أن متوسط دخل الفرد أكبر من 200 ريال شهرياً. وبالتالي فإن مستوى المعنوية والذي يساوي مثلاً 5% مركز في الطرف الأيمن من المنحنى.

اختبارات الفروض الاحصائية

الثالثة : إذا كان الفرض البديل يأخذ شكل "أقل من" فإن منطقة الرفض تكون مركزة بالكامل في الطرف الأيسر للمنحنى. ويسمى الاختبار في هذه الحالة **اختبار الطرف الأيسر**. والشكل التالي يوضح ذلك :



ومع افتراض ثبات الفرض العدمي كما في المثال السابق، يكون الفرض البديل هو $H_1: \mu < 200$ بمعنى أن متوسط دخل الفرد أقل من 200 ريال شهرياً، وبالتالي فإن مستوى المعنوية والذي يساوي مثلاً 5% مركز في الطرف الأيسر من المنحنى.

اختبارات الفروض الاحصائية

خطوات الاختبار الإحصائي :

(1) صياغة الفرضين العدمي والبديل:

- **وضع الفرض العدمي H_0** ، والذي يأخذ - عادة - شكل " يساوي " فمثلاً إذا كان المطلوب هو اختبار ما إذا كان متوسط عمر الناخب هو 20 سنة فإن هذا

الفرض يصاغ كما يلي : $H_0 : \mu = 20$

- **وضع الفرض البديل H_1** ، والذي يأخذ أحد أشكال ثلاثة إما :
" لا يساوي " أو " أكبر من " أو " أقل من "

وبالرموز فإن الفرض البديل قد يأخذ شكل أحد الصيغ التالية :

" $H_1 : \mu \neq 20$ " أو " $H_1 : \mu > 20$ " أو " $H_1 : \mu < 20$ "

اختبارات الفروض الاحصائية

قيمة الإحصاء المناظرة للمعلمة المجهولة من العينة

(2) حساب إحصائية الاختبار: = - قيمة المعلمة المجهولة كما حدد الفرض العدمي

الخطأ المعياري

ويختلف الخطأ المعياري من حالة لأخرى حسب المعلمة المراد اختبار الفروض حولها.

الخطأ المعياري	الإحصاء المناظرة في العينة	رمز المعلمة المجهولة	المعلمة المجهولة
$\frac{s}{\sqrt{n}}$ أو $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	\bar{x}	μ	متوسط المجتمع
$\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$	\hat{p}	P	النسبة في المجتمع

اختبارات الفروض الاحصائية

(3) **تحديد حدود منطقتي القبول والرفض:** ونحصل عليها من التوزيع الطبيعي المعياري أو توزيع t ، وتختلف وفقا لمستوى المعنوية الخاص بالاختبار وما إذا كان الاختبار ذو طرف واحد أو ذو طرفين.

(4) **المقارنة والقرار:** حيث تقارن قيمة الإحصائية المحسوبة من الخطوة رقم 2 بحدود منطقتي القبول والرفض (من الخطوة رقم 3) ، فإن وقعت في منطقة القبول يقبل الفرض العدمي ، بينما لا نستطيع قبول الفرض العدمي إن وقعت الإحصائية المحسوبة في منطقة الرفض (أو أحد منطقتي الرفض).

اختبارات الفروض الاحصائية

أى أن خطوات اختبار الفروض تتلخص فى الآتى:

- 1) صياغة الفروض (العدمى والبديل)
- 2) حساب إحصائية الاختبار
- 3) تحديد منطقة القبول والرفض
- 4) اتخاذ قرار بشأن قبول أو عدم قبول الفرض العدمى.

اختبارات الفروض الاحصائية

اختبارات الفروض حول المتوسط μ

مثال (1): الانحراف المعياري للمجتمع معلوم

اختيرت عينة عشوائية حجمها 49 شخصاً من أفراد دولة ما، فإذا كان الوسط الحسابي لدخول الأفراد الأسبوعية في العينة هو 75 دولار. كيف يمكن اختبار الفرض الصفري بأن متوسط الدخل الأسبوعي لمواطني هذه الدولة يساوي 72 دولار مقابل الفرض البديل أنه لا يساوي 72 وذلك بمستوى معنوية % 5 إذا علمت أن الانحراف المعياري لدخول الأفراد يساوي 14 دولار.

اختبارات الفروض الاحصائية

الحل :

1- الفرض العدمي : هو أن متوسط المجتمع يساوي 72 وبالرموز: $H_0 : \mu = 72$

الفرض البديل : هو أن المتوسط لا يساوي 72 وبالرموز: $H_1 : \mu \neq 72$

2- الإحصائية: بما أن العينة كبيرة فإن الإحصائية في حالة اختبار الوسط تأخذ الشكل التالي:

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

حيث: $n = 49, \sigma = 14, \bar{x} = 75, \mu = 72$

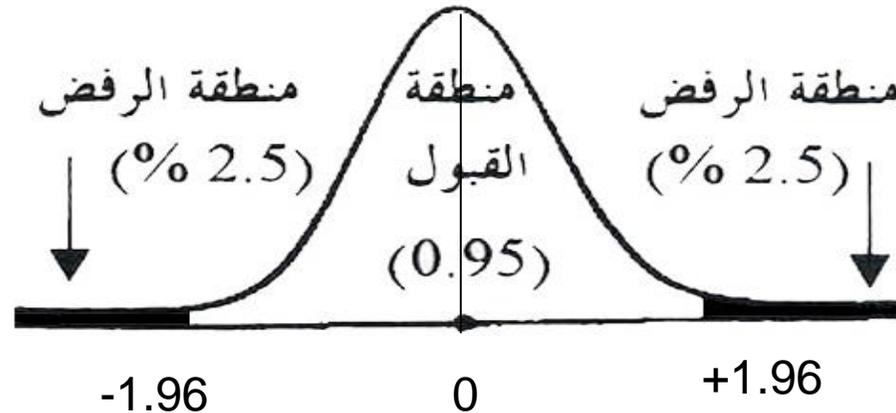
$$Z_{\bar{x}} = \frac{75-72}{\frac{14}{\sqrt{49}}} = 1.5 \quad \text{وبالتعويض نحصل على:}$$

أي أن قيمة الإحصائية تساوي 1.5

اختبارات الفروض الاحصائية

تابع الحل :

3- **حدود منطقتي القبول والرفض**: نحصل عليها من التوزيع الطبيعي المعياري. حيث مستوى المعنوية 5% وبما أن الفرض البديل هو: "لا يساوي" فإن ما يستخدم في هذه الحالة هو اختبار الطرفين كما في الشكل التالي :



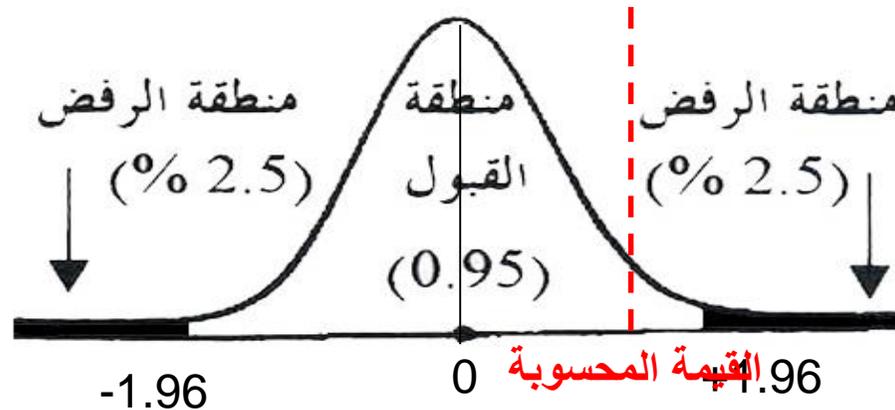
اختبارات الفروض الاحصائية

وقد حصلنا على حدود منطقتي القبول والرفض وذلك بقسمة درجة الثقة (المكاملة لمستوى المعنوية) والتي تساوي 0.95 على 2 فنحصل على 0.4750 وبالكشف في جدول التوزيع الطبيعي المعياري عن Z التي تقابل المساحة 0.4750 نجد أنها تساوي 1.96 وحيث أنها موزعة على طرفي المنحنى بالتساوي فنضع إشارة موجبة في النصف الأيمن، وإشارة سالبة في النصف الأيسر، أي أن منطقة القبول تبدأ من القيمة -1.96 وتستمر حتى القيمة + 1.96 (أي أن أي قيمة محصورة بين هاتين القيمتين تكون في منطقة القبول، وأي قيمة خارج هذه الحدود تكون في منطقة الرفض).

اختبارات الفروض الاحصائية

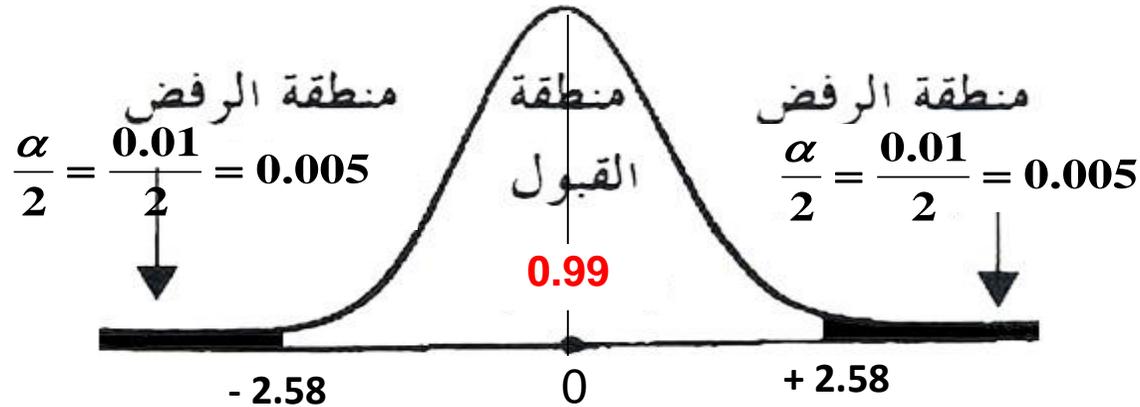
4- **المقارنة والقرار:** وبمقارنة قيمة الإحصائية المحسوبة من الخطوة رقم 2 (والتي تساوي 1.5) بحدود منطقتي القبول والرفض (من الخطوة رقم 3) نجد أنها تقع في منطقة القبول لذلك فإن القرار هو:

قبول الفرض الصفري بأن متوسط دخول الأفراد الأسبوعية في هذه الدولة يساوي 72 دولاراً وذلك بمستوى معنوية 5%.



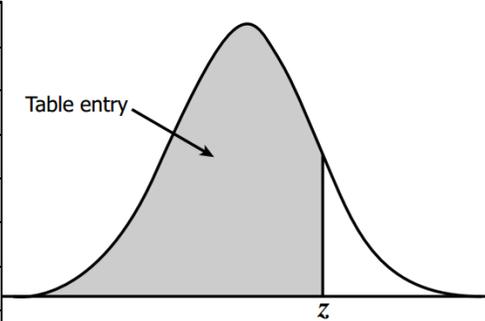
اختبارات الفروض الاحصائية

لو استخدمنا مستوى معنوية 1% بدلاً من 5% كما في المثال أعلاه فإن حدود منطقتي القبول والرفض تصبح كما يلي :



وبمقارنة قيمة الإحصائية 1.5 بحدود منطقتي القبول والرفض نجد أنها تقع في منطقة القبول أي أن القرار هو نفسه قبول الفرض الصفري ولن يتغير بل يتأكد باستخدام مستوى معنوية 1%.

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990



جدول المساحات أسفل التوزيع الطبيعي المعياري
 ((المساحة الواقعة قبل أي قيمة موجبة Z))

معاملات الثقة Z	
معامل الثقة Z	درجة الثقة
1.65	90%
1.96	95 %
2.58	99%



بِسْمِ اللَّهِ
بِحَمْدِ اللَّهِ

