جامعة الملك فيصل

عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

اسم المقرر

التحليل الإحصائي

أستاذ المقرر

د/ محمد زايــد

المحاضرة (5)

توزيعات إحصائية منفصلة خاصة

التوزيع الإحصائي :-

التوزيع الإحصائي هو ببساطة الشكل الذي تأخذه مجموعة البيانات. وشكل البيانات مهم جدا في تحليلها ووصفها وكخطوة تسبق قرار استخدام أي اسلوب احصائي .

ويرتبط التوزيع الاحصائي عادة بنوع البيانات سواء كانت متصلة أم منفصلة، ويناسب النوع المنفصل غالبا المقاييس الاسمية والرتبية أما التوزيعات الاحصائية المتصلة فهي الأنسب للبيانات الكمية المتصلة ولها أهمية كبيرة في العلوم الإحصائية وذلك لأن اغلب الاختبارات الاحصائية تتعامل مع هذا النوع من البيانات.

أ- التوزيع ذو الحدين: Binomial Distribution

توزيع ذو الحدين (التوزيع الثنائي) يستخدم هذا التوزيع في الحالات التي يكون للظاهرة محل الدراسة نتيجتان فقط متنافيتان، النتيجة محل الاهتمام وتسمى بحالة النجاح، والأخرى وتسمى بحالة الفشل، **ومن أمثلة ذلك:**

إذا كان احتمال أن يكون الفرد مدخن = $\frac{1}{3}$ عند سؤال 10 أفرادا فكل منهم قد يكون....	غير مدخن مدخن
إذا كان احتمال وجود مصباح تالف في صندوق = $\frac{2}{7}$، عند سحب مصباح من كل صندوق من 50 صندوق في كل مرة قد يكون..	سليم تالف
عند رمي قطعة النقد ، الناتج قد يكون ...	صورة كتابة
إذا كان احتمال حضور الطالبة للمحاضرة $\frac{1}{4}$ ، بمتابعة حضور الطالبة في 5 محاضرات قد تكون ...	حاضرة غائبة

تابع – توزيع ذي الحدين

جميع التجارب السابقة تحقق الشروط التالية:

1. نتيجة كل محاولة للتجربة إما نجاح أو فشل.
2. نتيجة كل محاولة مستقلة عن الأخرى .
3. احتمال النجاح في كل محاولة يكون ثابت و ليكن p واحتمال الخطأ أو الفشل $q = 1 - p$
4. إجراء التجربة عدة مرات فتكون هناك n محاولة.

تجربة ذات الحدين

تابع – توزيع ذي الحدين

إذا كان X متغيرا عشوائيا لتجربة ذات الحدين ، عند إجراء التجربة n من المرات وكان احتمال الحصول على حالة نجاح في أي مرة يساوي p واحتمال الفشل q=1-p ، فإن احتمال تحقق عدد x من حالات النجاح هو:

التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين X عند اجراء التجربة n مرة:

$$p(X = x) = p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

حيث أن p احتمال النجاح و $q = 1 - p$ و x= 0,1,2,3…….n

تابع – توزيع ذي الحدين

مراجعة على التوافيق:

القانون الأساسي:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

- $\binom{n}{x} = \binom{n}{n-x}$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

تابع – توزيع ذي الحدين

إذا كان X متغير ذات الحدين n,p فإن: $X \sim Bin(n,p)$

التوقع الرياضي

$$E(X) = \mu = np$$

التباين

$$V(X) = \sigma^2 = npq$$

تابع – توزيع ذي الحدين

شكل التوزيع:

يتحدد شكل التوزيع ذي الحدين وفقا لقيمة احتمال النجاح كما يلي:

- إذا كان $p = 0.5$ فإن التوزيع يكون متماثل.
- إذا كان $p < 0.5$ فإن التوزيع يكون موجب الالتواء.
- إذا كان $p > 0.5$ فإن التوزيع يكون سالب الالتواء.

تابع – توزيع ذي الحدين

تمرين :-

في تجربة إلقاء قطعة نقود خمس مرات أوجد احتمال ظهور الوجه H ثلاث مرات واحسب التوقع والتباين ؟

الحل

$$1\text{- } p(X=3) = \binom{5}{3} p^3 q^{5-3} = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$2\text{- } E(X) = \mu = np = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$3\text{- } \sigma^2 = npq = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

تابع – توزيع ذي الحدين

مثال إذا كان احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الإحصائي يساوي 80% وتم إختيار 4 طلاب عشوائيا ، المطلوب :-

1. كون جدول توزيع ذي الحدين .
2. أوجد احتمال نجاح 3 طلاب .
3. أوجد احتمال رسوب 3 طلاب .
4. أوجد احتمال نجاح طالبين على الأقل .
5. القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي) .
6. الانحراف المعياري .

تابع – توزيع ذي الحدين

الحل :- $P = 0.80 \quad , q = 1-P = 0.20 , \quad n=4$

1- جدول التوزيع ذي الحدين :-

عدد الطلاب الناجحين	عدد الطلاب الراسبين	الاحتمال	الناتج
0	4	$= 4C0 \times (0.80)^0 \times (0.20)^4$	0.0016
1	3	$= 4C1 \times (0.80)^1 \times (0.20)^3$	0.0256
2	2	$= 4C2 \times (0.80)^2 \times (0.20)^2$	0.1536
3	1	$= 4C3 \times (0.80)^3 \times (0.20)^1$	0.4096
4	0	$= 4C4 \times (0.80)^4 \times (0.20)^0$	0.4096

تابع – توزيع ذي الحدين

2- احتمال نجاح 3 طلاب: $P(3) = 0.4096$

3- احتمال رسوب 3 طلاب: $P(1) = 0.0256$

4- احتمال نجاح طالبين على الأقل :-

$P(2)+P(3)+P(4) = 0.9728$

5- القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي) =

$\mu = n \times p = 4 \times 0.80 = 3.2$

6- الانحراف المعياري =

$$\sigma = \sqrt{n \times p \times (1-p)} = \sqrt{4 \times 0.8 \times 0.2} = 0.8$$

تابع – توزيع ذي الحدين

مثال: إذا كان احتمال انسحاب موظف من العمل قبل بلوغ سن التقاعد هو 60% ، وتم اختيار 5 موظفين عشوائيا ، المطلوب :-

1. كون جدول توزيع ذي الحدين .
2. أوجد احتمال انسحاب 4 موظفين.
3. أوجد احتمال استمرار 3 موظفين في العمل حتى التقاعد.
4. أوجد احتمال انسحاب 3 موظفين على الاقل .
5. القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي) .
6. الانحراف المعياري .

تابع – توزيع ذي الحدين

الحل: $P = 0.60 \quad , \quad (1-P = 0.40) \quad , \quad n=5$

1- جدول التوزيع ذي الحدين :-

الناتج	الاحتمال	عدد الموظفين غير المنسحبين	عدد الموظفين المنسحبين
0.01024	$= 5C0 \times (0.60)^0 \times (0.40)^5$	5	0
0.0768	$= 5C1 \times (0.60)^1 \times (0.40)^4$	4	1
0.2304	$= 5C2 \times (0.60)^2 \times (0.40)^3$	3	2
0.3456	$= 5C3 \times (0.60)^3 \times (0.40)^2$	2	3
0.2592	$= 5C4 \times (0.60)^4 \times (0.40)^1$	1	4
0.07776	$= 5C4 \times (0.60)^5 \times (0.40)^0$	0	5

تابع – توزيع ذي الحدين

2- احتمال احتمال انسحاب 4 موظفين :-

$$P(4) = 0.2592$$

3- احتمال استمرار 3 موظفين:-

$$P(2) = 0.2304$$

4- احتمال انسحاب 3 موظفين على الاقل :-

$$P = (p(3) + p(4) + p(5)) = 0.07776 + 0.2592 + 0.3456 = 0.68256$$

5- القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي) :-

$$\mu = n \times p = 5 \times 0.60 = 3$$

6- الانحراف المعياري =

$$\sigma = \sqrt{n \times p \times (1 - p)} = \sqrt{5 \times 0.6 \times 0.4} = 1.095445$$

تابع – توزيع ذي الحدين

مثال:-

وجد في إنتاج أحد المصانع أنه من بين 1000 وحدة إنتاج يوجد 150 وحدة معيبة. أخذت عينة بإرجاع مكونة من 5 وحدات، أوجد الاحتمالات التالية:

1- الوحدات المختارة كلها سليمة
2- على الأكثر توجد واحدة معيبة
3- على الأقل توجد وحدتان معيبتان
4- القيمة المتوقعة و التباين للوحدات المعيبة .

الحل

احتمال النجاح (الحصول على وحدة معيبة) $p = 150/1000 = 0.15$

احتمال الفشل (عدم الحصول على وحدة معيبة) $q = 1-p= 1-0.15 =0.85$

عدد المحاولات (عينة بإرجاع مكونة من 5 وحدات) $n = 5$

X متغير عشوائي يمثل عدد الوحدات المعيبة يأخذ القيم 5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0 ويكون له توزيع ذي الحدين:

$$p(X=x)=\binom{5}{x}(0.15)^{x}(0.85)^{5-x} \quad , \quad x=0,1,2,3,4,5$$

تابع – توزيع ذي الحدين

1- الوحدات كلها سليمة يعنى أن X = 0

$$p(X=0)=\binom{5}{0}(0.15)^0(0.85)^{5-0} = \frac{5!}{0!(5-0)!}(1)(0.85)^5 = 0.4437$$

2- على الأكثر توجد وحدة معيبة يعنى أن X ≤ 1

P(X≤1) = p(X=0) + p(X=1)

$$p(X \le 1)=\binom{5}{0}(0.15)^0(0.85)^5 + \binom{5}{1}(0.15)^1(0.85)^4$$

$$= 0.4437 + \frac{5!}{1!5!}(0.15)(0.522)$$

$$= 0.4437 + 5 \times 0.0783 = 0.4437 + 0.3915 = 0.8352$$

تابع – توزيع ذي الحدين

3- على الأقل توجد وحدتان معيبتان ، أي أن $X \geq 2$

$$P(X \geq 2) = 1 - p(X < 2)$$
$$= 1 - [p(X = 0) + p(X = 1)]$$
$$= 1 - 0.8325 = 0.1648$$

4- القيمة المتوقعة و التباين للوحدات المعيبة .

القيمة المتوقعة = $n \, . \, P = 5 \times 0.15 = 0.75$

التباين = $n \times p \times (1 - p)$

$= 5 \times 0.15 \times 0.85 = 0.6375$

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

توزيع بواسون

ب - توزيع بواسون Poisson Distribution

توزيع بواسون هو توزيع احتمالي منفصل آخر يستخدم لتحديد احتمال وقوع عدد معين من النجاحات في وحدة الزمن، وذلك عندما تكون الأحداث أو "النجاحات " مستقلة عن بعضها البعض وعندما يبقى متوسط عدد النجاحات ثابتاً لوحدة الزمن. عندئذ :

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \quad x = 0,1,2,...$$

حيث : $P(x)$ = احتمال حدوث عدد x من النجاحات.

λ = متوسط أو معدل تكرار الحدث في وحدة الزمن. حيث $\lambda = np$

e = أساس نظام اللوغاريتمات الطبيعي ، وقيمتها تساوي **2.718** تقريبا، ويمكن حسابها باستخدام الآلة الحاسبة.

$x!$ = مضروب العدد " x " ويساوي: $x(x-1)(x-2)\ldots(2)(1)$

تابع: توزيع بواسون

- يعتبر بديلا لتوزيع ذي الحدين ولكن عندما تكون n كبيرة و p صغيرة جدا.
- يصف متغيرات عشوائية متقطعة تعبر عن عدد كبير من الظواهر مثل:
  - عدد الكرات الحمراء في عينة الدم
  - عدد الأخطاء المطبعية في الصفحات المختلفة للكتاب
  - عدد القطع التالفة في الإنتاج الكلى لسلعة معينة
- إذا كان للمتغير العشوائى X توزيع بواسون فإن:

التوقع : $E(X) = \lambda$

التباين : $Var(X) = \lambda$

تابع: توزيع بواسون

مثال :-

في كمية من القطع المصنعة ، كان من المعلوم أن نسبة القطع المعيبة بها هي 0.3%. أخذت عينة عشوائية حجمها 350 قطعة. احسب الاحتمالات الآتية:

1) عدم وجود أية قطع معيبة
2) وجود قطعة معيبة
3) وجود قطعتان معيبتان
4) وجود على الأكثر قطعتان معيبتان

الحل

عملية سحب العينة تمثل سلسلة عددها $n=350$

واحتمال أن تكون القطعة معيبة (النجاح) $p=0.003$

واضح أن n كبيرة و p صغيرة ، ولذلك يرجح استخدام توزيع بواسون

$$\lambda = np = 350(0.003) = 1.05$$

تابع: توزيع بواسون

بفرض أن X يمثل عدد القطع المعيبة في العينة له توزيع بواسون

$$p(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}=e^{-1.05}\frac{1.05^{x}}{x!}$$

x = 0, 1, 2, ….

1- عدم وجود أي قطع معيبة في العينة

$$p(X=0)=e^{-1.05}\frac{1.05^{0}}{0!}=0.350$$

2- وجود قطعة واحدة معيبة في العينة

$$p(X=1)=e^{-1.05}\frac{1.05^{1}}{1!}=(0.3499)(1.05)=0.367$$

تابع: توزيع بواسون

3- وجود قطعتان معيبتان فى العينة

$$p(X = 2) = e^{-1.05} \frac{1.05^2}{2!} = (0.3499)(0.55125) = 0.193$$

4- وجود على الأكثر وحدتان معيبتان

$P(X \leq 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$

$= 0.350 + 0.367 + 0.193$

$= 0.91$

تابع: توزيع بواسون

مثال :-

إذا كان عدد الأخطاء المطبعية في كتاب يتكون من 600 صفحة هو 50 خطأ فإذا كانت الأخطاء تتوزع توزيعا عشوائيا. فما احتمال إذا اختيرت 10 صفحات عشوائيا أن لا تحتوى على أخطاء.

الحل

بفرض أن X يمثل عدد الأخطاء في كل صفحة وأن عدد المحاولات (الصفحات) تمثل سلسلة من محاولات برنولي عددها $n = 10$

ونسبة الخطأ (النجاح) هي $p = \frac{50}{600} = 0.083$

وعليه فإن: $\lambda = np = 10\,(0.083) = 0.83$

تابع: توزيع بواسون

وبالتالي فإن لـ X توزيع بواسون:

$$p(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}=e^{-0.83}\frac{0.83^{x}}{x!}$$

x = 0, 1, 2, 3, …

احتمال أن لا يوجد أخطاء يساوى

P(X= 0) = $e^{-0.83}\frac{0.83^{0}}{0!}$

= 0.436

تابع: توزيع بواسون

مثال:-

إذا كان من المعلوم أن عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر تتبع توزيع بواسون بمتوسط 3 وحدات شهريا، إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر من هذه السلعة.

المطلوب:

- ما نوع المتغير العشوائي؟
- اكتب شكل دالة الاحتمال لهذا المتغير.
  - احسب الاحتمالات التالية:
    - احتمال أن الأسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر؟
    - احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر؟
  - احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.
  - حدد شكل التوزيع.

تابع: توزيع بواسون

الحل:-

عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة متغير كمي منفصل، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو:

$$X : \{x = 0,1,2,3,\ldots\}$$

شكل دالة الاحتمال:

بما أن متوسط عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر هو: $\lambda = 3$ ، إذا دالة الاحتمال هي:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-3}3^{x}}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,\ldots$$

حساب الاحتمالات:

حساب احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدتين خلال الشهر، $p(2)$

$$P(2) = \frac{e^{-3}3^{2}}{2!} = \frac{0.0498(9)}{2\times 1} = 0.22404$$

تابع: توزيع بواسون

احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر هو:

$$P(X \leq 3) = p(3) + p(2) + p(1) + p(0)$$

$$= \left[\frac{3^3}{3!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^0}{0!}\right]\left[\frac{0.0498}{1}\right]$$

$$= [0.0498]\left(\frac{27}{6} + \frac{9}{2} + \frac{3}{1} + \frac{1}{1}\right) = 0.0498(13) = 0.6474$$

تابع: توزيع بواسون

حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

- الوسط الحسابي (μ) في حالة توزيع بواسون هو معلمة معطاة هي: $\mu = 3$
- التباين يساوي الوسط الحسابي: أي أن: $\sigma^2 = \mu = 3$
- ومن ثم يكون الانحراف المعياري هو: $\sigma = \sqrt{3} = 1.732$

ويمكن حساب معامل الاختلاف النسبي، بتطبيق المعادلة التي سبق استخدامها ، وهو:

$$C.V = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{1.732}{3} \times 100 = 57.7\%$$

تحديد شكل التوزيع: دائما توزيع بواسون موجب الالتواء

تمت

بحمد الله