جامعة الملك فيصل

عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

# اسم المقرر

التحليل الإحصائي

# أستاذ المقرر

د/ محمد زايــد

# المحاضرة (3)

# المتغيرات العشوائية

# المتغيرات العشوائية :-

**المتغير العشوائي** هو الذي يأخذ قيما حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة، ومن ثم مجال هذا المتغير، يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين، وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

1- المتغيرات العشوائية المنفصلة (المتقطع)

Discrete Random Variables

2- المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

Continuous Random Variables

# المتغيرات العشوائية:-

## 1- المتغير العشوائى المنفصل :-

هو المتغير العشوائي الذي يأخذ قيماً حقيقية مختلفة (وبمعنى أخر فهو يشمل جميع القيم الصحيحة دون القيم الكسرية مثل عدد الطلاب في فصل دراسي – عدد الوحدات التالفة من منتج معين – عدد أفراد الأسرة كلها أرقام 1،2،3،4،5،....لا يمكن أن تأخذ صورة كسرية ).

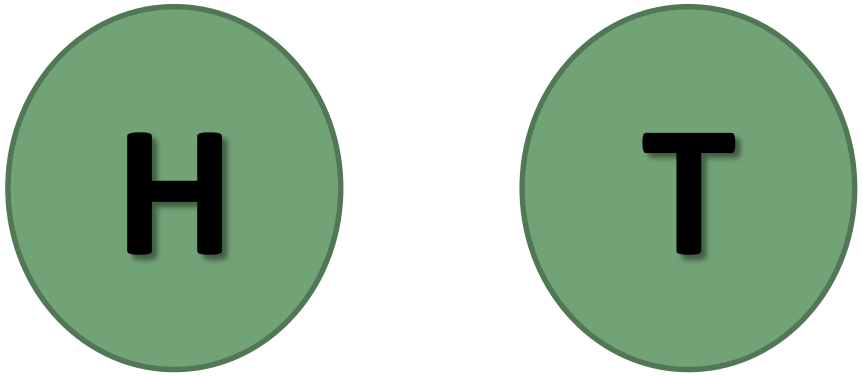
## 2- المتغير العشوائى المتصل :-

ويطلق علية المتغير العشوائي المستمر فذلك المتغير يأخذ عدد لا نهائي من القيم المتصلة (ومن ثم فإنه يأخذ القيم الصحيحة و جميع القيم الكسرية التي تقع بين هذه القيم و كمثال على هذه المتغيرات درجات الحرارة أو أطوال الطلاب أو المعدلات التراكمية للطلاب )

# المتغيرات العشوائية :-

مثال :-

في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين إذا كان المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور الصورة ، فأوجد القيم التي يأخذها ذلك المتغير واحتمالاته ؟

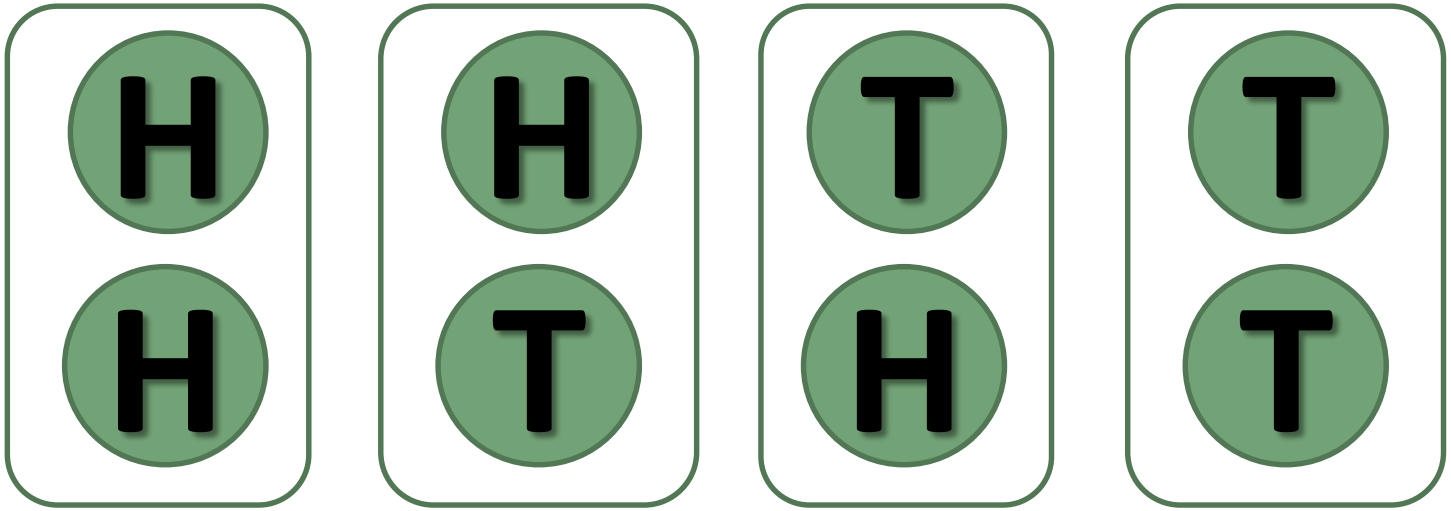


# المتغيرات العشوائية :-

## الحل

### 1- فراغ العينة (S):-

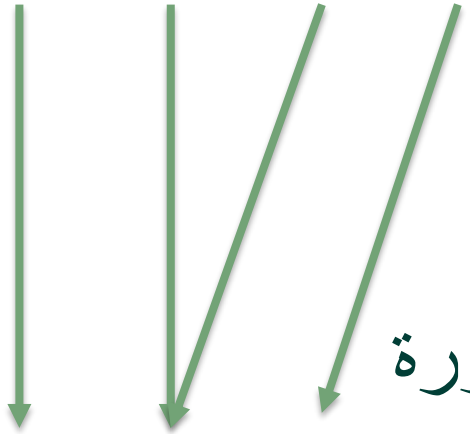
$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$



# المتغيرات العشوائية :-

## تابع حل المثال

S = {HH, HT, TH, TT}



## 2- المتغير العشوائى (X):-

هو وصف رقمي

لعدد مرات ظهور الصورة

X = { 2 , 1 , 0 }

# المتغيرات العشوائية :-

## 3- احتمال تحقق القيم المختلفة للمتغير p(x):-

عند ظهور الناتج TT : $P(X=0) = \frac{1}{4}$

عند ظهور الناتج HT أو TH : $P(X=1) = 2/4 = \frac{1}{2}$

عند ظهور الناتج HH : $P(X=2) = \frac{1}{4}$

لاحظ أن مجموع الاحتمالات دائماً تساوي واحد :-

$$P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

# المتغيرات العشوائية :-

مثال :-

في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين إذا كان المتغير العشوائي X هو مجموع العددين الظاهرين. ما القيم التي يأخذها المتغير X وما احتمال الحصول على كل من هذه القيم ؟

# المتغيرات العشوائية :-

## الحل

1- فراغ العينة (S):-

S = { (1,1), (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) ,(1,6) ,
(2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (2,6) ,
(3,1 ) , (3, 2) , (3, 3) , (3, 4) , (3, 5) , (3, 6) ,
(4, 1) , (4, 2) , (4, 3) , (4, 4) , (4, 5) , (4, 6) ,
(5, 1) , (5, 2) , (5, 3) , (5, 4) , (5, 5) , (5, 6) ,
(6, 1) , (6, 2) , (6, 3) , (6, 4) , (6, 5) , (6, 6) }

# المتغيرات العشوائية :-

## تابع حل المثال

## 2- المتغير العشوائى (X):-

(وصف رقمي لمجموع العددين الظاهرين )

$$X = \{2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 \}$$

# المتغيرات العشوائية :-

## 3- احتمال تحقق القيم المختلفة للمتغير p(x):-

P(x=2) = 1/36

P(x=3) = 2/36

P(x=4) = 3/36

P(x=5) = 4/36

P(x=6) = 5/36

P(x=7) = 6/36

P(x=8) = 5/36

P(x=9) = 4/36

P(x=10) = 3/36

P(x=11) = 2/36

P(x=12) = 1/36

نلاحظ أن مجموع الاحتمالات تساوي واحد :-

$$P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) \ldots\ldots + P(x = 12) = 1$$

# المتغيرات العشوائية :-

## التوزيع الاحتمالي :-

التوزيع الاحتمالي ، هو الذي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي ، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فراغ العينة، وبمعنى آخر هو التكراري النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير.

وهو جدول مكون من صفين ، الأول به القيم الممكنة للمتغير ، والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير.

# المتغيرات العشوائية :-

**مثال :-**

كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X (مجموع العددين الظاهرين على النرد) في المثال السابق ؟

الحل: نضع قيم X واحتمالاتها p(x) في جدول ليمثل التوزيع الاحتمالي:

| X | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P(x) | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | 1 |

# المتغيرات العشوائية :-

**مثال :-**

كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X المعبر عن عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء عملة معدنية مرتين متتاليتين ؟

P(x=0) = ¼ (الناتج TT)

P(x=1) = 2/4 = ½ (النواتج HT , TH )

P(x=2) = ¼ (الناتج HH)

| X | 0 | 1 | 2 | المجموع |
|---|---|---|---|---|
| P(x) | 1/4 | 1/2 | 1/4 | 1 |

# المتغيرات العشوائية :-

## شروط التوزيع الاحتمالي :-

يجيب أن يتوافر في أي توزيع احتمالي الشرطين التاليين: (شروط تتعلق فقط بـ p(x))

1- جميع الاحتمالات يجب أن تقع بالفترة [0,1] .

2- مجموع الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح.

**مثال :-** هل يمثل الجدول التالي توزيعا احتماليا؟ (الإجابة: لا)

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| P(x) | 0.2 | 0.3 | 0.1 | 0.4 | 0.1 |

**الشرط الأول متحقق (جميع الاحتمالات موجبة وتقع بين الصفر والواحد)**

**الشرط الثاني غير متحقق (مجموع الاحتمالات لا يساوي الواحد)**

# المتغيرات العشوائية :-

**مثال :-** هل يمثل الجدول التالي توزيعا احتماليا؟ (الإجابة: نعم)

| X | -2 | 0 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| P(x) | 0.1 | 0.3 | 0.2 | 0.3 | 0.1 |

**الشرط الأول متحقق (جميع الاحتمالات موجبة وتقع بين الصفر والواحد)**

**الشرط الثاني متحقق (مجموع الاحتمالات يساوي الواحد)**

**مثال :-** احسب الاحتمال غير المعلوم (A) في التوزيع الاحتمالي التالي.

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P(x) | 0.15 | A | 0.30 | 0.20 |

حيث أن مجموع الاحتمالات في أي توزيع احتمالي يساوي الواحد:

$$A = p(1) = 1 - [0.15 + 0.3 + 0.2] = 1 - 0.65 = 0.35$$

# المتغيرات العشوائية :-

## التوقع الرياضي :-

هو القيمة المتوقعة (أو الوسط الحسابي) للمتغير العشوائي ويرمز له بالرمز μ أو E(x)
وفي حالة المتغير المتقطع يتم حسابه باستخدام القانون التالي:-

$$\mu = E(x) = \sum(x\,P(x))$$

بمعنى أن التوقع يساوي حاصل جمع كل قيمة من قيم المتغير العشوائي مضروبة في احتمالها. ويوضح الجدول التالي كيفية الوصول إلى قيمة التوقع الرياضي :-

| x | الصف (1) | المجموع |
|---|---|---|
| P(x) | الصف (2) | 1 |
| E(x) | الصف (1) × الصف (2) | القيمة المتوقعة |

# المتغيرات العشوائية :-

## التوقع الرياضي

إذا كان $X$ متغير عشوائي منفصل .
و كان $p(x)$ هو توزيعه الاحتمالي .
فإن وسطه الحسابي أو توقعه الرياضي يعطى بالعلاقة:

$$\mu = E(X) = \sum_{\text{لجميع قيم } x} x\, p(x)$$

# المتغيرات العشوائية :-

## مثال :-

أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X المعبر عن عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء عملة معدنية مرتين متتاليتين ؟

| X | الصف (1) | 0 | 1 | 2 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| P(X =x ) | الصف (2) | ¼ | ½ | ¼ | 1 |
| μ = E(x) | (1) × (2) | 0 | ½ | ½ | 1 |

# المتغيرات العشوائية :-

**مثال :**

**إذا كان التوزيع الاحتمالي لعدد الأعطال اليومية لجهاز الحاسب كما يلي ، فأوجد معدل العطل اليومي للجهاز؟**

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P(X =x ) | 0.20 | 0.30 | 0.25 | 0.15 | 0.10 | 1 |
| μ = E(x) | 0 | 0.30 | 0.50 | 0.45 | 0.40 | 1.65 |

$$\mu = E(X) = \sum x \,.p(x) = 1.65$$

# المتغيرات العشوائية :-

## التباين والانحراف المعياري :-

التباين للمتغير العشوائي X الذي قيمته متوقعة E(x) هو :-

$$\text{Var(X)} = \sigma^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= [\sum x^2 p(x)] - \mu^2$$

والانحراف المعياري يمثل الجذر التربيعي للتباين :-

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

# المتغيرات العشوائية :-

و للوصول إلى قيمة التباين والانحراف المعياري يتم اتباع الخطوات التالية :-

| Σ | قيم المتغير X | X | صف (1) |
|---|---|---|---|
| 1 | الاحتمالات الخاصة بقيم X | P(X =x ) | صف (2) |
| القيمة المتوقعة | صف3 = صف 1 × صف 2 | μ = E(x) | صف (3) |
| | صف4 = صف 1 × صف 3 | $E(x^2)$ | صف (4) |

التباين = ناتج صف 4 – (ناتج صف 3)$^2$

# المتغيرات العشوائية :-

## تمرين :-

أوجد القيمة المتوقعة والتباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي التالي:-

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P(x) | 0.3 | 0.2 | 0.4 | 0.1 |

# المتغيرات العشوائية :-

الحل :-

| قيم المتغير | Σ | 3 | 2 | 1 | 0 | x |
|---|---|---|---|---|---|---|
| الاحتمال | 1 | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.3 | P(x) |
| التوقع | 1.3 | 0.3 | 0.8 | 0.2 | 0 | $E(X) = x \cdot P(x)$ |
| | 2.7 | 0.9 | 1.6 | 0.2 | 0 | $E(X^2) = x^2 \cdot P(x)$ |
| التباين | 1.01 | | | $=E(x^2)-(E(x))^2$ | | $\sigma^2$ |
| الانحراف المعياري | 1.005 | $= \sqrt{1.01}$ | | $= \sqrt{\sigma^2}$ | | $\sigma$ |

# المتغيرات العشوائية :-

## تمرين :-

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

| x | 2 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| P(x) | 0.15 | 0.35 | 0.25 | 0.25 |

المطلوب :-

1) الوسط الحسابي .
2) التباين .
3) الانحراف المعياري .
4) $P(x \geq 4)$ .
5) $P(2 \leq x \leq 5)$

# المتغيرات العشوائية :-

| x | 2 | 4 | 5 | 6 | Σ | قيم المتغير |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P(x) | 0.15 | 0.35 | 0.25 | 0.25 | 1 | الاحتمال |
| E(x)=x.P(x) | 0.3 | 1.4 | 1.25 | 1.5 | 4.45 | التوقع |
| $E(X^2) = x^2 . P(x)$ | 0.6 | 5.6 | 6.25 | 9 | 21.45 | |
| $v(x) = \sigma^2$ | $=E(x^2)-E(x)^2$ | | $=21.45-(4.45^2)=$ | | 1.647 | التباين |
| σ | $= \sqrt{\sigma^2}$ | | $= \sqrt{1.647}$ | | 1.284 | الانحراف المعياري |

# المتغيرات العشوائية :-

1) الوسط الحسابي = التوقع الرياضي = 4.45

2) التباين = 1.647

3) الانحراف المعياري = 1.2835

4) $P(x \geq 4) = P(4) + P(5) + P(6) = 0.35 + 0.25 + 0.25 = 0.85$

$= 1 - P(2) = 1 - 0.15 = 0.85$ (طريقة أخرى للحل)

5) $P(2 \leq x < 5) = P(2) + P(4) = 0.15 + 0.35 = 0.5$

# المتغيرات العشوائية :-

**تمرين :-**

**إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-**

| x | 0 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| P(x) | 0.1 | 0.2 | 0.4 | ? |

**المطلوب :-**

1) p(6)
2) الوسط الحسابي .
3) التباين .
4) الانحراف المعياري .
5) $P(x \geq 4)$ .

# المتغيرات العشوائية :-

| قيم المتغير | Σ | 6 | 4 | 2 | 0 | x |
|---|---|---|---|---|---|---|
| الاحتمال | 1 | 0.3 | 0.4 | 0.2 | 0.1 | P(x) |
| التوقع | 3.8 | 1.8 | 1.6 | 0.4 | 0 | E(x)=x.P(x) |
| مربع التوقع | 18 | 10.8 | 6.4 | 0.8 | 0 | $E(X^2) = x^2. P(x)$ |
| التباين | 3.56 | $=18-3.8^2=3.56$ | | | $=E(x^2)-E(x)^2$ | $v(x) =\sigma^2$ |
| الانحراف المعياري | 1.89 | $=\sqrt{3.56}$ | | | $=\sqrt{\sigma^2}$ | σ |

$$P(6) = 0.3, \quad P(x \geq 4) = P(4) + P(6) = 0.4 + 0.3 = 0.7$$

# تمرين واجب :-

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P(x) | 0.2 | 0.1 | 0.3 | ? |

المطلوب :-

1) p(3)
2) الوسط الحسابي .
3) التباين .
4) الانحراف المعياري .
5) $P(x \geq 2)$ .
6) $P(2 \leq x \leq 5)$

تمت بحمد الله