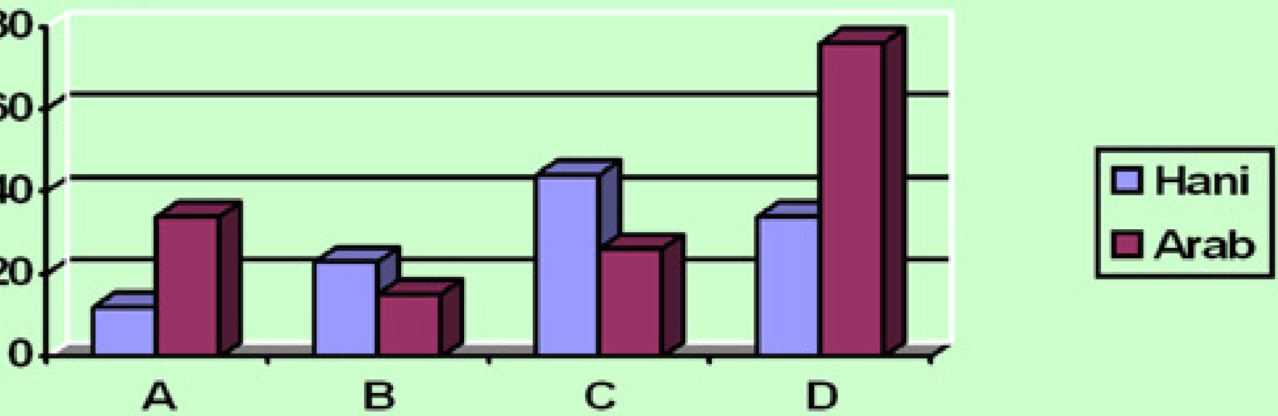
محاضرات في
مادة مبادئ الإحصاء

stat115



النسخة السادسة

ملتقى البحث العلمي

Rendezvous Sientific Researches

www.rsscrs.info

هاني عرب

haniharab@hotmail.com

1430هـ

هذا العمل للجميع ولا يباع بل ينسخ فقط
وقيمته دعوة بالهداية لكولي

بسم الله الرحمن الرحيم

تنويه هام

أخي الطالب / عليك الرجوع إلى الخطة الدراسية لمادة مبادئ الإحصاء، لمعرفة ما إذا كانت هناك بعض الفصول محذوفة من هذه المذكرة مع التنويه أنه هناك بعض مواضيع هذه المذكرة محذوفة بالنسبة لطلاب وطالبات الانتساب.

(النسخة السادسة)

- هذا المحتوى عبارة عن محاضرات إلكترونية يمكن الحصول على نسخة منه عن طريق الشبكة العنكبوتية (الإنترنت) ولا يباع، ويتم تصفحه بهيئته الإلكترونية.
- للحصول على نسخة من هذا المحتوى من المصدر المعتمد وهو ملتقى البحث العلمي على الشبكة العنكبوتية (الإنترنت) بعنوان ورابط www.rsscrs.info. مكتبة هاني عرب الإلكترونية.
- هذا المحتوى عبارة عن محاضرات إلكترونية قام المعد بجمعه من محاضرات تم إلقائها من قبل أساتذة ومحاضرين ومن الكتب ذات الاختصاص.
- جميع الأسئلة الواردة في هذا المحتوى أو المرفقة في نفس المجلد الإلكتروني هي نماذج لاختبارات قام المعد باستنتاجها من محتوى المحاضرات أو تم جمعها عن طريق الشبكة العنكبوتية (الإنترنت).
- إن هذه المحتوى لا يغني الطالب بأي حال من الأحوال عن الكتاب المقرر من قبل الجامعة أو المعهد العلمي أو المركز الأكاديمي الذي يدرس به، لذا على الطالب قراءة الكتاب المقرر بتمعن، ثم الاستعانة بهذه بالمحاضرات بعد الله تعالى، فهذه المحاضرات عبارة عن تبسيط للمادة ذات الاختصاص والمتطابقة مع هذا المحتوى وتشرح أهم النقاط المطلوب فهمها من المنهج المقرر.

جمع هذا المحتوى في عام ١٤٢٨هـ / عدد الصفحات: ١٢٢ صفحة

تم تحديث هذا المحتوى وإضافته على ملتقى البحث العلمي في عام ١٤٣٠هـ

هذا العمل للجميع ولا يباع بل ينسخ فقط
وقيمته دعوة بالهداية لك ولي

أسأل الله التوفيق والسداد فإن أصبت فذلك بفضل الله ومِنّة

وإن أخطأت فالرجاء مراسلتي على البريد الإلكتروني

haniharab@hotmail.com

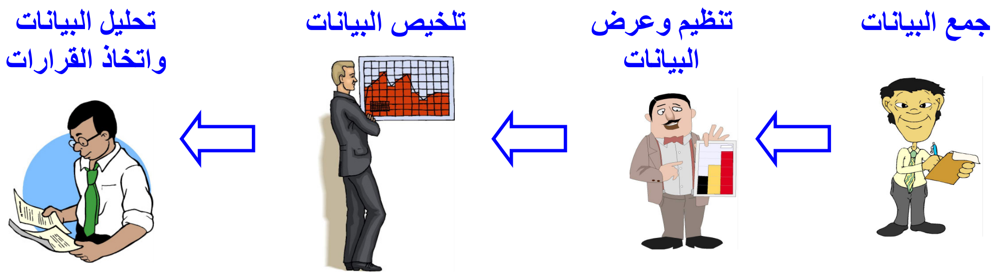
هاني عرب

المحتويات

المحاضرة الأولى

مدخل لمادة الإحصاء

الإحصاء هو أحد أدوات البحث العلمي، حيث إنه يستخدم لمعالجة البيانات في معظم الدراسات العلمية الحديثة والتي تحتاج إلى تنقيح وتنظيم وتلخيص، لاستخلاص النتائج والقرارات منها.



تم اقتباس المسمى الإنجليزي لعلم الإحصاء Statistics من اللفظ اللاتيني (Status) أي بمعنى الدولة، أي كل ما يخص الوصف الرقمي للأوضاع الاقتصادية والسكانية والاجتماعية للدولة. وقد تطور مفهوم علم الإحصاء ليدخل في معظم مجالات المعرفة الطبيعية والعلمية والإنسانية.

> علم الإحصاء هو العلم الذي يبحث في تصميم أساليب جمع البيانات والتقنيات المختلفة لتنظيم وتصنيف وعرض هذه البيانات، وتلخيصها في صورة مؤشرات رقمية لوصف وقياس خصائصها الأساسية، وتحليلها بغرض اتخاذ قرارات مناسبة.

وعادة عند الرغبة في دراسة ظاهرة ما، ولصعوبة دراسات جميع أعضاء مجتمع هذه الدراسة، يلجأ الباحث إلى دراسة عينة من هذا المجتمع وتعميم النتائج على باقي المجتمع.

- **المجتمع** Population: هو المجموعة الكلية لمفردات الدراسة سواء كانت أفراد أو أشياء، واستخلاص خصائص هذا المجتمع هو الهدف النهائي للدراسة الإحصائية.
- **العينة** Sample: هي مجموعة جزئية من مفردات المجتمع محل الدراسة يتم اختيارها بحيث تكون ممثلة للمجتمع تمثيل صحيح.

أهمية الإحصاء في مجال الاقتصاد والإدارة

الأسلوب الإحصائي هو الوسيلة الأساسية في دراسة الظواهر الاقتصادية وقياس العلاقات بينها، وهو وسيلة للتنبؤ بالقيم المستقبلية لهذه الظواهر. ويعتمد الاقتصاد القياسي والكمي على النماذج الإحصائية الاحتمالية، مثل نموذج الانحدار (العلاقة) بين الكمية المطلوبة والسعر الذي يمكن من خلاله تقدير مرونة الطلب السعرية. وغيرها من العلاقات بين متغيرات مختلفة مثل دخل الأفراد وإنفاقهم على السلع،

والعلاقة بين كميات الطلب على السلع وأسعارها وأسعار السلع البديلة والمكملة ودخل الفرد وغيرها.

تستخدم أيضاً الأساليب الإحصائية في إدارة جودة الإنتاج والمقارنة بين السياسات التسويقية والإدارية. وأيضاً يستخدم علم الإحصاء في قياس تغيرات الظواهر الاقتصادية المختلفة وذلك باستخدام الأرقام القياسية، مثل الرقم القياسي للأسعار وغيره.

البيانات

البيانات Data: هي مجموعة القيم التي يتم جمعها من مفردات المجتمع أو العينة لخاصية (متغير) معينة.
ويمكن تقسيم البيانات إلى نوعين رئيسيين:

١- **البيانات النوعية (الوصفية)**: هي البيانات التي يمكن حصرها في عدة أوجه وصفية ولا يمكن إجراء عمليات حسابية عليها. مثال ذلك: نوع الشخص (ذكر/أنثى)...الخ.
٢- **البيانات الكمية**: هي البيانات التي يتم الحصول عليها في شكل أعداد ويمكن ترتيبها. مثال ذلك: الرواتب، درجات الحرارة، درجات الاختبار...الخ.

ويمكن تقسيم البيانات الكمية إلى:

١- **بيانات كمية منفصلة**: هي البيانات التي يمكن عدها حتى ولو لم تأخذ قيماً صحيحة.مثال ذلك: عدد الأسهم، عدد أفراد الأسرة.
٢- **بيانات كمية متصلة**: هي البيانات التي لا يتم عدها إنما يتم الحصول عليها عن طريق القياس وتأخذ أي قيمة داخل مدى معين سواء كانت صحيحة أو كسرية. مثال ذلك: الدخل الشهري، أسعار الأسهم، المعدل الدراسي للطالب...الخ.

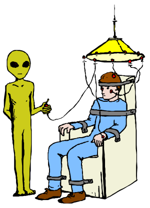
قياس البيانات

تقاس البيانات بأحد أربع قياسات، هي:
١- **المقياس الاسمي:** مجموعة من الأوجه أو الصفات التي يأخذها المتغير الوصفي مع عدم إمكانية ترتيبها. مثل فصيلة الدم والجنسية.
٢- **المقياس الترتيبي:** مجموعة من الأوجه التي يأخذها المتغير الوصفي مع إمكانية ترتيبها. مثل المستوى التعليمي.
٣- **مقياس الفترة:** مجموعة من الأعداد أو القيم التي يأخذها المتغير الكمي، وليس للصفر معنى حقيقي، أي لا يعني انعدام الخاصية محل الدراسة. مثل درجة الحرارة ودرجة امتحان الذكاء.
٤- **مقياس النسبة:** مجموعة من الأعداد أو القيم التي يأخذها المتغير الكمي، والصفر له معنى حقيقي، أي يعني انعدام الخاصية محل الدراسة. مثل الوزن والطول.

يلاحظ أن المقياس الاسمي والمقياس الترتيبي (التفصيلي) تستخدم لقياس البيانات النوعية، أما مقياس الفترة ومقياس النسبة تستخدم البيانات الكمية.

جمع البيانات

١ـ الأسلوب التجريبي:



يتم الحصول على البيانات عن طريق تصميم تجربة، يتم فيها قياس تـأثير العامل محل الاهتمام مع ثبات العوامل الأخرى، حيث نحصل على البيانات في هذه الحالة عن طريق المشاهدة. مثال ذلك الحصول على بيانات عن طريق تطبيق عدة سياسات تسويقية بهدف اختيار السياسة الأفضل.

٢ـ أسلوب المسح:

نحصل على البيانات في هذه الحالة من السجلات والتقارير وقواعد البيانات والإنترنت، أو عن طريق الاستبيانات والمقابلات الشخصية.
وينقسم أسلوب المسح إلى نوعين:

أ- **أسلوب المسح الشامل:** يتم جمع البيانات من كل مفردات المجتمع محل الدراسة. مثل دراسة آراء كل طلاب جامعة الملك عبدالعزيز عن أسلوب الاختبارات.

ب-**أسلوب المسح العينة العشوائية:** حيث تجمع البيانات من بعض مفردات المجتمع محل الدراسة. مثل دراسة آراء بعض طلاب كلية الاقتصاد فقط عن أسلوب الاختبارات وتعميم النتائج على باقي طلاب الجامعة في جميع الكليات.

ومن أنواع العينات العشوائية:

- **العينة العشوائية البسيطة:** وهي التي تعطي كل مفردة من مفردات المجتمع نفس الفرصة في الاختيار.
- **العينة العشوائية الطبقية:** يتم تقسيم المجتمع محل الدراسة إلى مجموعات متجانسة وغير متداخلة تسمى (طبقات) مثل كليات أو محافظات أو النوع. ثم نقوم بسحب عينة عشوائية بسيطة من كل طبقة. مثال ذلك دراسة مستوى الذكاء لطلاب جامعة الملك عبدالعزيز، هنا يقوم الباحث بتقسيم الطلاب إلى طبقتين أو مجموعتين (كليات علمية، وكليات أدبية) ويتم اختيار عينة عشوائية من كل طبقة تتناسب مع حجم الطلاب داخل كل مجموعة.
- **العينة العشوائية المنتظمة:** يتم تقسيم مفردات المجتمع إلى مجموعات عددها مساو لعدد مفردات العينة التي نريد اختيارها، ثم نختار مفردة من المجموعة الأولى بشكل عشوائي. فإذا كان الاختيار مثلاً وقع على المفردة الثالثة، فإننا نختار المفردة الثالثة من كل مجموعة حتى يكتمل حجم العينة التي نريدها.
- **العينة العشوائية العنقودية:** ويستخدم هذا النوع من العينات في حالة المجتمعات التي تتكون من عدة مجموعات تشكل كل مجموعة عنقوداً يتفرع منه أيضاً العديد من المجموعات. مثال ذلك لتقدير حجم الدخل في المملكة العربية السعودية، يستلزم ذلك تقسيم المملكة إلى مجموعات من المحافظات، وتنقسم المحافظات إلى مجموعات من المدن، ثم إلى مجموعات من الأحياء. ثم يتم اختيار عينة عشوائية من المحافظات كمرحلة أولى، ثم في المرحلة الثانية يتم اختيار عينة عشوائية من المدن داخل كل محافظة تم اختيارها في المرحلة

الأولى، ثم يتم في المرحلة الثالثة اختيار عينة عشوائية من الأحياء داخل كل مدينة تم اختيارها في المرحلة الثانية.

٣ـ أسلوب السلاسل الزمنية:

يتم الحصول على البيانات عن طريق رصد البيانات التي تعبر عن ظاهرة ما عند نقاط زمنية متتالية. مثل كمية الصادرات السنوية، حجم التعاملات الربع سنوية في البورصة، عدد المرضى الشهري في عيادات القلب...الخ.

يمكن أن تتعرض البيانات لنوعين من الأخطاء عند جمعها:

١ـ **خطأ التحيز**: هو الخطأ الذي يحدث عند جمع البيانات سواء من الباحث أو من مفردات المجتمع محل الدراسة.

٢ـ **خطأ المعاينة العشوائية**: هو الخطأ الذي يحدث عند إجراء الدراسة الإحصائية بأسلوب العينة العشوائية ويرجع فقط إلى الصدفة وليس لأخطاء من الباحث أو من العينة.

تنظيم وعرض البيانات

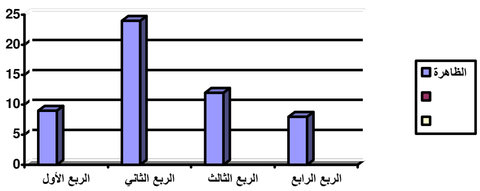
مهما كانت طبيعة الدراسة فيجب تنظيم وعرض البيانات بأسلوب يستطيع غير المتخصصين فهم معنى هذه البيانات.

الرسومات البيانية

تعتبر الرسوم البيانية وسيلة مفيدة لشرح وتوضيح الحقائق الرقمية وإبراز العلاقة بين المتغيرات. ومنها الرسوم التالية:

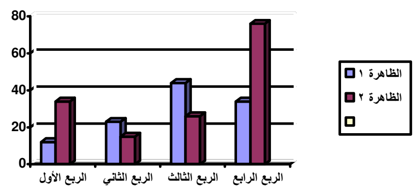
١ـ الأعمدة البسيطة:

وهي عبارة عن أعمدة رأسية أو مستطيلات متساوية القاعدة تتناسب ارتفاعاتها مع البيانات التي تمثلها.



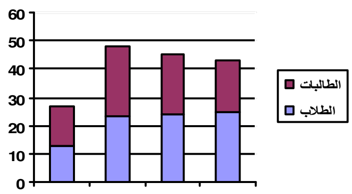
٢ـ الأعمدة المزدوجة:

وتستخدم لمقارنة ظاهرتين أو أكثر لعدة سنوات أو في حالة بيانات مختلفة مزدوجة لخواص مختلفة.

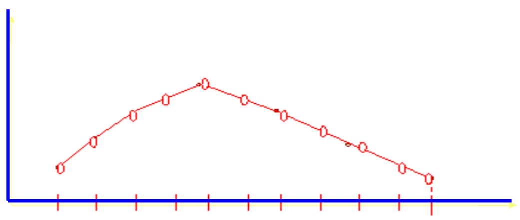


٣ـالأعمدة المجزأة:

وتستخدم في حالة مقارنة ظاهرتين بدلاً من الأعمدة المزدوجة ويتم رسمها بعمل عامود واحد يمثل كلا الظاهرتين محل الدراسة في كل سنة.

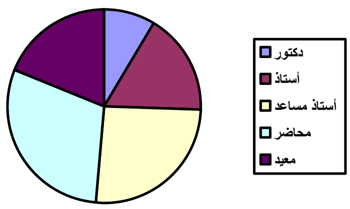


٤ـ المنحنى:



ويستخدم لتوضيح الاتجاه العام للظاهرة خلال فترة من الزمن، ويمكن رسم المنحنى برسم نقط تمثل السنوات كمحور أفقي مقابل قيم الظاهرة كمحور رأسي – ثم توصل هذه النقط.

٥ـ الرسم الدائري:



ويستخدم الرسم الدائري عندما يكون المجموع الكلي العام لبيانات الظاهرة مقسم إلى عدة أقسام مختلفة، بحيث يُمثل كل قسم بقطاع من الدائرة يتناسب مع حجمه بالنسبة لمجموع الأقسام.

طريقة إجراء الرسم الدائري:

١) نرسم أي دائرة لها نصف قطر نختاره.

٢) نحسب زاوية القطاع من القاعدة:

$$\text{زاوية القطاع} = \frac{\text{قيمة جزء الظاهرة}}{\text{المجموع الكلي}} \times 300$$

مثال (١ـ١):

المطلوب عرض البيانات التالية:

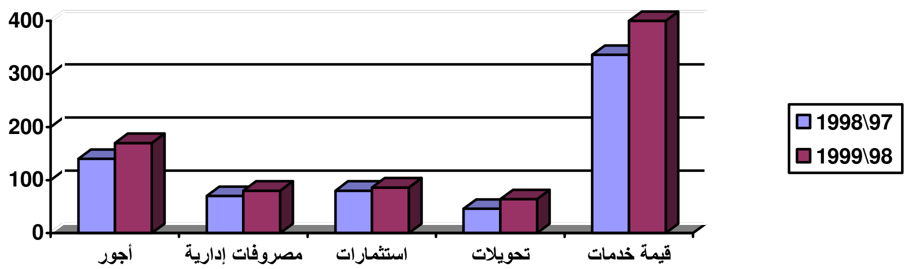
البيـان	أجور	مصروفات إدارية	استثمارات	تحويلات	قيمة خدمات
١٩٩٨/٩٧	140	70	80	46	336
١٩٩٩/٩٨	170	80	86	64	400

١) بالأعمدة.

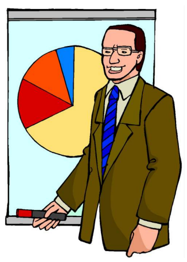
٢) بالمنحنى.

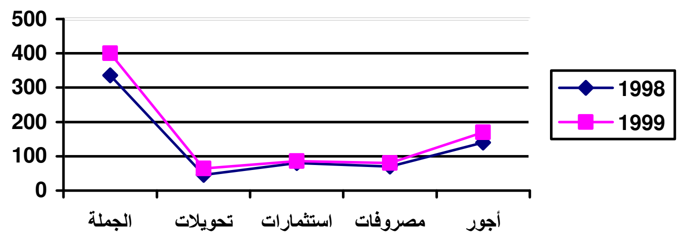
حل مثال رقم ١ – ١:

١ـ بالأعمدة:



٢ـ المنحنى:





تلخيص البيانات

إن تلخيص البيانات يساهم في معالجتها واستخلاص النتائج بشكل أفضل.ولكن في بعض الأبحاث يسعى الباحثون لدراسة العلاقة بين عدة ظواهر، ويستخدم في هذه الحالة معاملات الارتباط وتحليل الانحدار. وتندرج جميع الطرق التنظيمية والتلخيصية الاستكشافية تحت مسمى الإحصاء الوصفي، وهو أحد فروع الإحصاء.

> الإحصاء الوصفي هو مجموعة الطرق والأساليب التي تستخدم في تنظيم وعرض وتلخيص البيانات واستكشاف خصائصها الأساسية وتلخيصها في صورة مؤشرات رقمية.

تحليل البيانات واستخلاص القرارات

عندما نحلل بيانات المجتمع بأكمله فإننا نتخذ القرارات المناسبة من المؤشرات التي حصلنا عليها.

> الإحصاء الاستدلالي هو مجموعة الطرق والأساليب التي تستخدم في تعميم نتائج العينة على خصائص المجتمع الذي سحبت منه العينة. وقياس العلاقات بين الخصائص المختلفة للمجتمع والتنبؤ بالقيم المستقبلية لهذه الخصائص.

المحاضرة الثانية

التوزيعات التكرارية وتمثيلها بيانياً

التوزيعات التكرارية

عند حصولنا على بيانات فإننا نطلق عليها مسمى بيانات خام Raw Data، وبعد تلخيص البيانات وتنظيمها في توزيعات تكرارية يطلق عليها بيانات مبوبة.

التوزيعات التكرارية هي عبارة عن جداول لجميع الأوجه أو القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير موضوع الدراسة وعدد المفردات التي تمثل تكرارات مناظرة لكل وجه أو قيمة.

مثال رقم (١ – ٢) على البيانات النوعية:

الجدول التالي يبين حالة المرتبة الأكاديمية لعينة من 30 عضو هيئة تدريس بإحدى الجامعات:

أ. مشارك	أ. مساعد	محاضر	أ. مشارك	أ. مساعد
محاضر	أستاذ	أ. مساعد	محاضر	أ. مشارك
أ. مشارك	أ. مساعد	أ. مشارك	أستاذ	أ. مساعد
أ. مساعد	محاضر	أ. مشارك	أ. مساعد	أستاذ
أ. مشارك	أ. مساعد	محاضر	أ. مشارك	أ. مشارك
محاضر	أ. مساعد	أ. مشارك	محاضر	أستاذ

والمطلوب وضع البيانات في جدول تكراري.

حل مثال رقم (١ – ٢):

حيث إن البيانات وصفية فيمكننا تبويبها حسب الأوصاف التي تمثل الظاهرة، وهي: أستاذ، أ.مشارك، أ.مساعد، محاضر. $p = \frac{f}{\sum f} \times 100$ ← التكرار النسبي

المرتبة الأكاديمية	العلامات	العدد، التكرار f	النسبة
أستاذ	IIII	4	%13.33
أ. مشارك	IIIII IIIII	10	%33.33
أ. مساعد	IIIII IIII	9	%30
محاضر	IIIII II	7	%23.33
المجموع Σ		30	%100

مثال رقم (٢ – ٢) على البيانات الكمية المنفصلة:

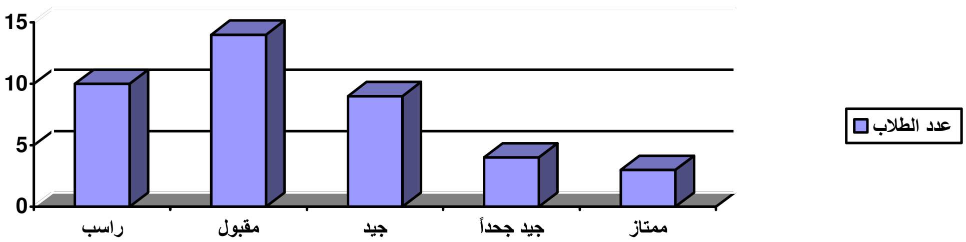
البيانات التالية توضح تقدير 40 طالبا في امتحان الإحصاء، والمطلوب وضع البيانات في جدول تكراري وتوصيفها بيانياً.

جيد	راسب	مقبول	راسب	مقبول	ممتاز	مقبول	راسب
جيد جداً	مقبول	جيد	مقبول	جيد جداً	مقبول	راسب	جيد
راسب	ممتاز	مقبول	راسب	مقبول	راسب	جيد	ممتاز
مقبول	جيد	جيد جداً	مقبول	جيد	راسب	جيد جداً	جيد
جيد	راسب	مقبول	مقبول	مقبول	مقبول	جيد	راسب

حل مثال رقم (٢ – ٢):
حيث إن البيانات وصفية (نوعية) فيمكن تبويبها حسب التقديرات.

التقدير	العلامات	عدد الطلاب، التكرار f	النسبة
راسب	IIIII IIIII	10	%25
مقبول	IIIII IIIII IIII	14	%35
جيد	IIIII IIII	9	%22.5
جيد جداً	IIII	4	%10
ممتاز	III	3	%7.5
المجموع Σ		40	%100

ولتمثيل هذه البيانات بيانيا نستخدم الأعمدة البسيطة:



مثال رقم (٣ – ٢) على البيانات الكمية المتصلة
الجدول الآتي يوضح أجر 100 عامل في إحدى المصانع بالريالات:

81	100	80	93	70	110	62	116	78	96
83	94	70	94	95	95	93	96	97	128
98	84	66	107	82	97	72	118	98	101
83	110	99	98	92	125	117	93	73	119
99	85	84	65	106	77	108	113	94	71
80	90	72	120	111	92	102	74	99	114
91	92	85	101	81	67	91	112	122	109
86	90	86	88	77	95	72	105	89	75
29	102	87	91	103	103	88	69	76	104
75	90	87	109	96	79	82	89	105	97

والمطلوب تلخيص أجور العمال في جدول تكراري ؟

حل مثال رقم (٣ – ٢):
عليك تتبع الخطوات التالية:
١- نحسب المدى (R) وهي الفرق بين أكبر قيمة (max) وأصغر قيمة (min).

$$R = \max - \min = 129 - 62 = 67$$

٢- نوجد عدد الفئات (k):

$k = 1 + (3.3 \times \log n) \leftarrow$ هذا قانون لإيجاد عدد الفئات بالآلة الحاسبة

عدد العمال (التكرار)= n

$$k = 1 + (3.3 \times \log 100)$$

$k = 1 + (3.3 \times 1.69897) = 6.7 \rightarrow 7$ يجب أن نقرب إلى عدد صحيح

ويمكن أيضاً إيجاد عدد الفئات (k) بالقانون التالي: $k = \frac{R}{h}$

٣- نحدد طول الفئة (h) =

$$h = \frac{R}{k} = \frac{67}{7} = 9.57 \rightarrow 10$$

ويمكن في طول الفئة (h) اختيار أي رقم يكون مناسب.

نبدأ الفئة الأولى بالرقم (60) وهو أصغر قيمة، ونستمر حتى آخر فئة والتي تبدأ بـ 120 وتنتهي بـ 130 أكبر قيمة.

ويسمى هذا بالجدول التكراري البسيط

فئة الأجور الفئات (c)	العلامات	عدد العمال التكرار f	نسبة العمال التكرار النسبي p
60 -	IIIII	5	%5
70 -	IIIII IIIII IIIII	15	%15
80 -	IIIII IIIII IIIII IIIII	20	%20
90 -	IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII	30	%30
100 -	IIIII IIIII IIIII	15	%15
110 -	IIIII IIIII	10	%15
120 - 130	IIIII	5	%5
	Σ	100	%100

الجدول التكراري البسيط لأجور العمال:

فئة الأجور الفئات (c)	عدد العمال التكرار f
60 -	5
70 -	15
80 -	20
90 -	30
100 -	15
110 -	10
120 - 130	5
Σ	100

ملاحظة:

١- يسمى هذا الجدول التكراري بسيطاً لأنه يمثل ظاهرة واحدة فقط وهي أجور العمال.

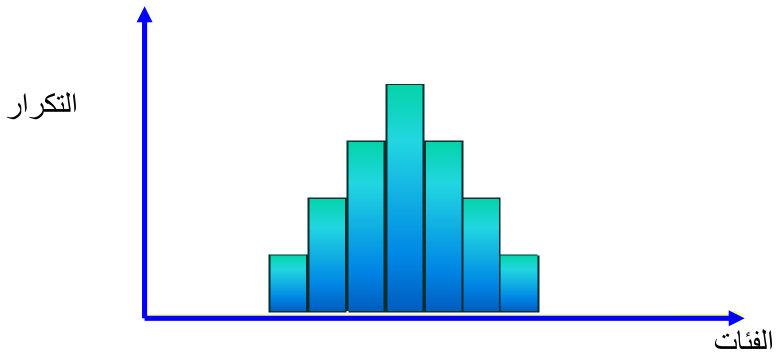
٢- تظهر في الجدول بداية الفئة فقط أما نهايتها فهي بداية الفئة التي تليها، ومعنى ذلك أن الفئة الأولى مثلاً تحتوي على جميع الأجور ابتداءً من 60 ريالاً وحتى ما قبل الـ 70 ريالاً .

التمثيل البياني للبيانات

يمكن وصف البيانات النوعية بشكل القطاعات الدائري، بالإضافة إلى شكل الأعمدة والذي يستخدم أيضاً لوصف البيانات الكمية المنفصلة، أما البيانات الكمية المتصلة يمكن تمثيلها بالمدرج التكراري، أو بالمضلع التكراري، أو بالمحنى التكراري.

١- المدرج التكراري:

نرسم مستطيلات طول قاعدتها هو طول الفئة وارتفاعها هو التكرارات المناظرة لكل فئة.

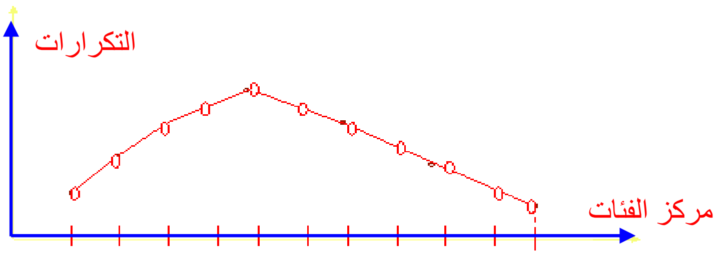


٢- المضلع التكراري:

١) نحسب مراكز الفئات من القاعدة :

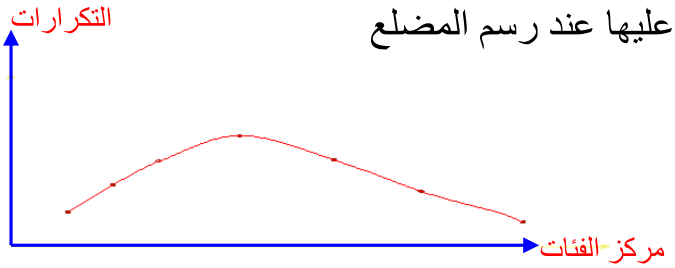
$$\text{مركز الفئة} = \text{بداية الفئة} + \frac{1}{2}\ \text{طول الفئة}$$

٢) نرسم فقط مراكز الفئات في مقابل التكرارات ونصل بينهم بالمسطرة



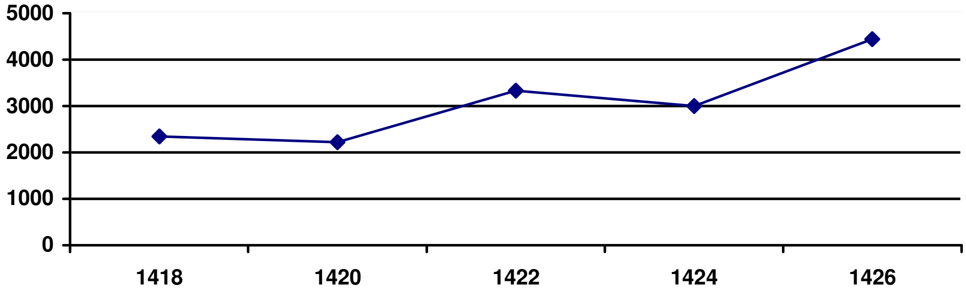
٣- المنحنى التكراري:

نصل بين النقط التي حصلنا عليها عند رسم المضلع التكراري بمنحنى باليد.



٤- شكل السلسلة الزمنية:

تتميز بعض الظواهر بالتطور خلال الزمن، مثل أسواق البورصة والأسهم، وسعر النفط. وأفضل تمثيل بياني لهذه المعلومات هو السلسلة الزمنية.



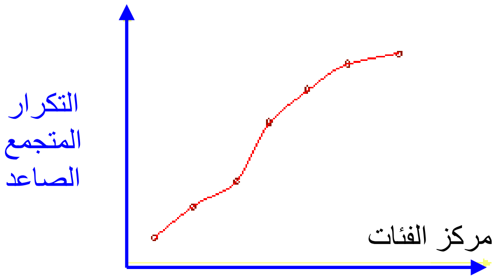
الجداول التكرارية المتجمعة

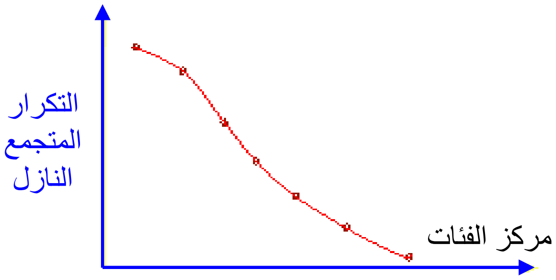
الجداول التكرارية المتجمعة نوعان:

١) الجدول المتجمع الصاعد: حيث نجمع التكرارات المناظرة لكل فئة من بداية حتى نصل إلى المجموع الكلي للبيانات، ويكون عنوان العامود الأول في الجدول هو: "أقل من الحد الأعلى للفئة".

٢) الجدول المتجمع النازل (الهابط): حيث نبدأ بالمجموع الكلي للبيانات ونطرح من التكرارات المناظرة لكل فئة من بداية الجدول حتى نصل إلى الصفر، ويكون عنوان العامود الأول في الجدول هو: "الحد الأدنى للفئة فأكثر" .

ويمكن تمثيل الجدول المتجمع الصاعد و النازل بيانياً بما يُعرف بالمنحنى المتجمع الصاعد والمنحنى المتجمع النازل واللذان يأخذان الشكلين التاليين:





مثال رقم (٤ – ٢):

البيانات الآتية تمثل الأجر اليومي بالريال لـ (100) عامل في إحدى المنشآت.

18	44	43	44	56	32	44	38	37	50
60	21	37	23	40	46	26	45	33	46
24	42	38	45	51	59	56	49	43	52
54	61	49	63	64	29	47	28	38	53
30	43	42	27	28	35	31	57	51	34
36	25	44	45	58	41	36	32	50	39
39	55	22	57	34	39	48	43	57	45
48	43	62	46	40	53	56	37	33	53
50	31	44	33	52	47	31	58	38	58
42	99	26	49	64	41	38	47	37	52

والمطلوب هو تكوين الجدول التكراري للعمال حسب فئات الأجر ثم:

أ- تمثيل هذه البيانات باستخدام :

١) المدرج التكراري ٢) المضلع التكراري ٣) المنحنى التكراري

ب - رسم المنحنى المتجمع الصاعد ثم حساب:

(١) عدد العمال الذين يقل أجرهم عن 45 ريالاً.

(٢) الحد الأعلى للأجر الذي حصل عليه 70 عاملاً.

ج- رسم المنحنى المتجمع النازل ثم حساب:

(١) عدد العمال الذين كانت أجورهم 33 فأكثر.

(٢) الحد الأدنى للأجر الذي حصل عليه 50 عاملاً.

حل مثال رقم (٤ – ٢):

عليك تتبع الخطوات التالية:

١- نحسب المدى (R) وهي الفرق بين أكبر قيمة (max) وأصغر قيمة (min).

$$R = \max - \min = 64 - 18 = 46$$

٢- نحدد طول الفئة (h) =

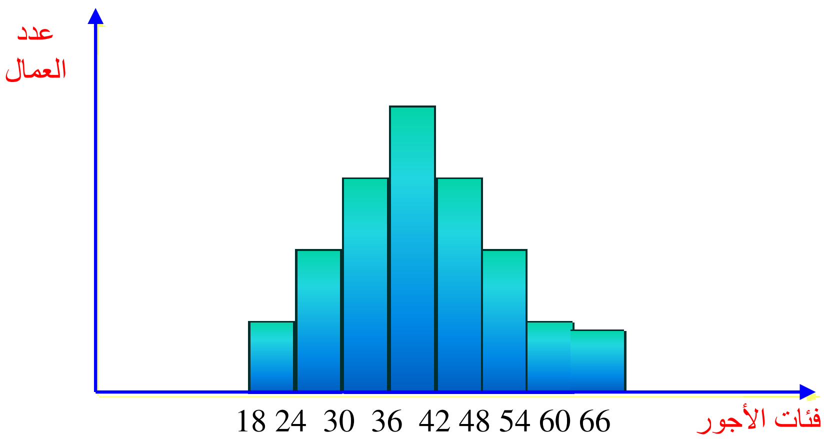
نختار أن تكون طول الفئة = 6

٣- نوجد عدد الفئات (k):

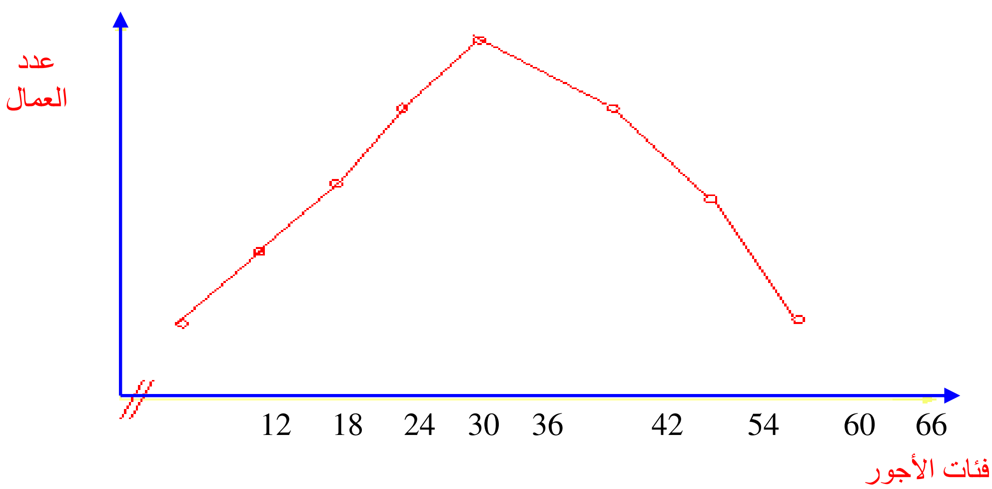
$$k = \frac{R}{h} = \frac{46}{6} = 7.66 \rightarrow 8$$

فئة الأجور الفئات (c)	العلامات	عدد العمال التكرار f	نسبة العمال التكرار النسبي p
18 -	IIII	4	
24 -	IIIII III	8	
30 -	IIIII IIIII II	12	
36 -	IIIII IIIII IIIII III	18	
37 -	IIIII IIIII IIIII IIIII IIII	24	
38 -	IIIII IIIII IIIII I	16	
54-	IIIII IIIII II	12	
60 - 66	IIIII I	6	
Σ		100	%100

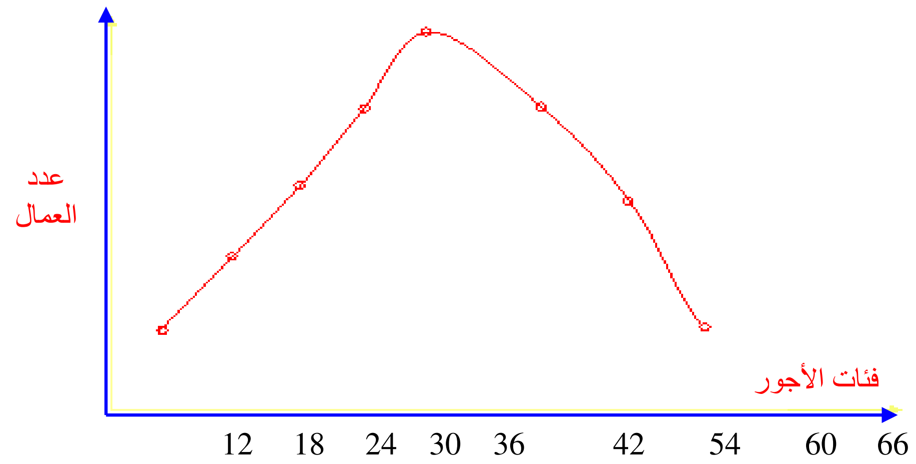
(أ – ١): رسم المدرج التكراري لفئات الأجور:



(أ – ٢): رسم المضلع التكراري لفئات الأجور:

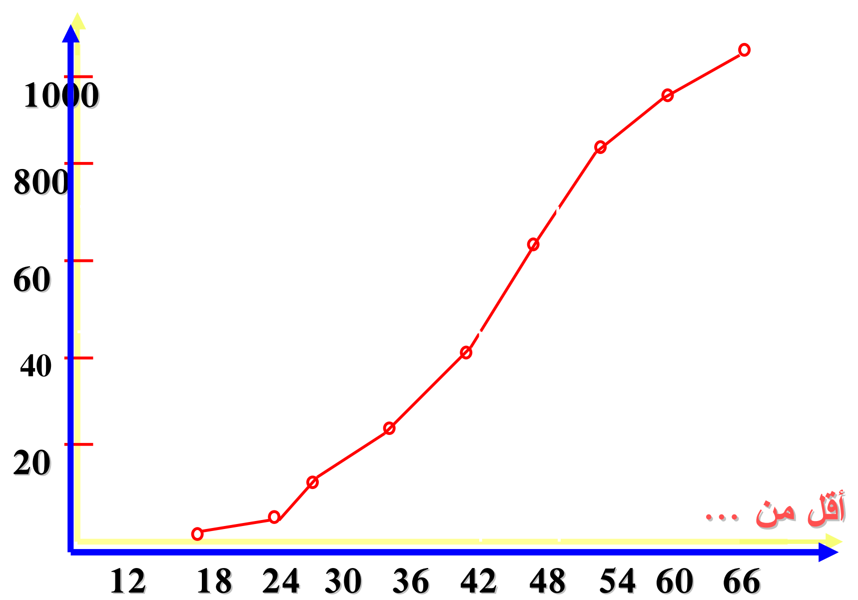


(أ – ٣): رسم المنحنى التكراري لفئات الأجور:



الجدول المتجمع الصاعد لأجور العمال		الجدول التكراري البسيط لأجور العمال	
التكرار المتجمع الصاعد	أقل من الحد الأعلى للفئة	عدد العمال التكرار f	فئة الأجور الفئات (c)
4	أقل من 24	4	18 -
12	أقل من 30	8	24 -
24	أقل من 36	12	30 -
42	أقل من 42	18	36 -
66	أقل من 48	24	37 -
82	أقل من 54	16	38 -
94	أقل من 60	12	54-
	أقل من 66	6	60 - 66
		100	Σ

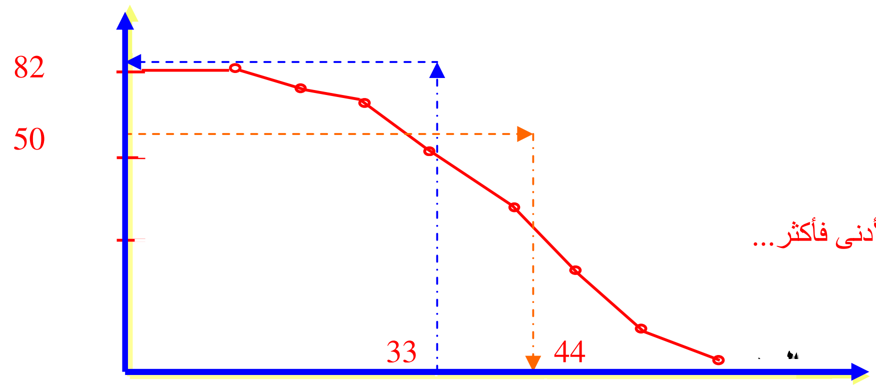
ب- ١ : المنحنى المتجمع الصاعد لأجور العمال:



١) عدد العمال الذين يقل أجرهم عن 45 ريالاً = 48 عاملاً

٢) الحد الأعلى للأجر الذي حصل عليه 70 عاملاً = 51 ريالاً

الجدول التكراري البسيط لأجور العمال		الجدول المتجمع النازل لأجور العمال	
فئة الأجور الفئات (c)	عدد العمال التكرار f	أقل من الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
18 -	4	18 فأكثر	100
24 -	8	24 فأكثر	96
30 -	12	30 فأكثر	88
36 -	18	36 فأكثر	76
37 -	24	42 فأكثر	58
38 -	16	48 فأكثر	34
54-	12	54 فأكثر	18
60 - 66	6	60 فأكثر	6
Σ	100		



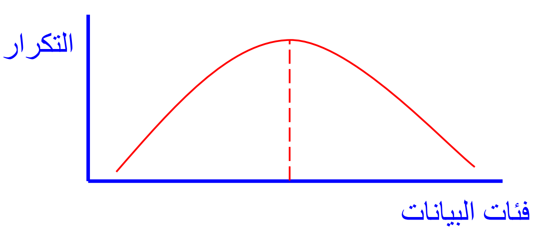
(١) عدد العمال الذين حصلوا على 33 ريالاً فأكثر = 82 عاملاً

(٢) الحد الأدنى للأجر الذي حصل عليه 50 عاملاً = 44 ريالاً

بعض أشكال المنحنيات التكرارية

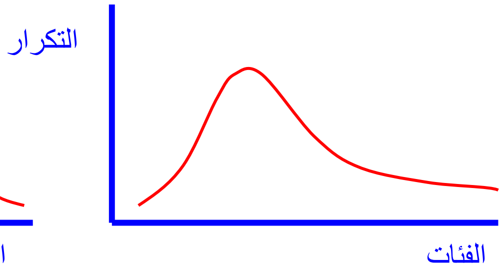
(١) المنحنى المتماثل:

وهو يمثل كثيراً من الظواهر الطبيعية مثل الأوزان والأطوال. ويسمى متماثلا لأن الخط النازل من قمته إلى قاعدته يقسمه إلى قسمين متماثلين.

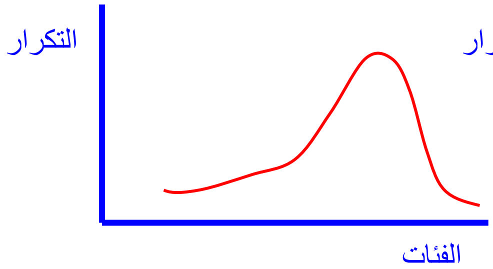


(٢) المنحنى الغير متماثل:

وله قمة واحدة ولكن فرعية غير متماثلين.
فإذا كان الفرع الأطول جهة اليمين سمي ملتوياً لليمين.
وإذا كان الفرع الأطول جهة اليسار سمي ملتوياً لليسار.
ويمثل مرتبات، أو دخول الأفراد في بعض الدول.



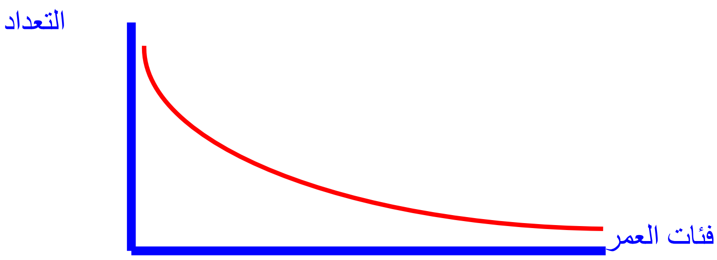
منحنى ملتوي لليمين



منحنى ملتوي لليمين

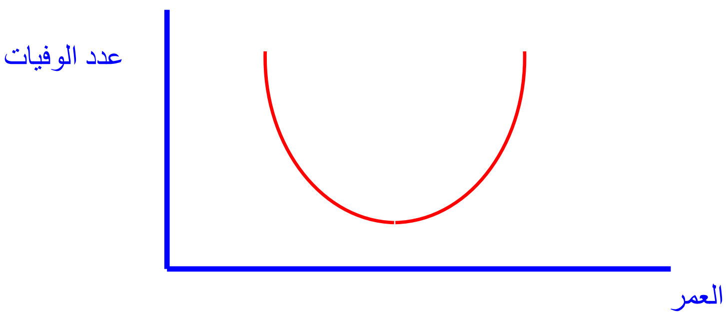
(٣) المنحنى ذو الفرع الواحد:

ويتكون من فرع واحد ومن استخداماته تمثيله لتوزيع السكان حسب فئات العمر.



(٤) المنحنى التكراري ذو النهاية الصغرى:

ويسمى "بالمنحنى النوني"، ويمثل ظاهرة تكون فيها القيم الصغيرة والكبيرة أكثر شيوعاً. ويستخدم في دراسة الوفيات حسب العمر.



المحاضرة الثالثة

مقاييس النزعة المركزية

مقاييس النزعة المركزية:

يقصد بمقاييس النزعة المركزية ميل البيانات للتراكم حول قيمة ما تسمى بالمتوسط – وهناك عدد من المقاييس لقياس هذا الميل منها:

١) الوسط الحسابي. **٢) الوسيط.** **٣) المنوال.**

١) الوسط الحسابي:

يُعدُّ الوسط الحسابي أهم مقاييس النزعة المركزية ويُعرَّف بأنه القيمة التي إذا أعطيت لجميع مفردات الظاهرة كان مجموع قيم المفردات مساوياً لمجموع القيم الأصلية لها.

أ- البيانات الغير مبوبة:

يمكن حساب الوسط الحسابي للبيانات الغير مبوبة بالعلاقة التالية:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x}{n}$$

مثال رقم (١ – ٣):

أوجد الوسط الحسابي للبيانات :

15 ، 10 ، 10 ، 15 ، 30

حل مثال رقم (١ – ٣):

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{80}{5} = 16$$

ب- البيانات المبوبة:

يمكن حساب الوسط الحسابي للبيانات المبوبة بالعلاقة التالية:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f}$$

حيث أن $\bar{X}$ ترمز إلى الوسط الحسابي

و Σ ترمز عن مجموع قيم الظاهرة، أي التي تأتي بعد Σ مثل (X)

و X ترمز إلى قيمة المفردة، أو الفئات.

و f ترمز إلى التكرار.

وفي حالة كون البيانات متصلة (أي مصنفة على شكل فئات) فإننا نعتبر مركز الفئة هو X، حيث:

مركز الفئات X = (بداية الفئة + نهاية الفئة) / 2

مثال رقم (٢ – ٣) :
من مثال أجور 100 عامل السابق أحسب المتوسط الحسابي لهذه الأجور؟

حل مثال رقم (٢ – ٣):

فئة الأجور الفئات (c)	عدد العمال التكرار f	مركز الفئة X	$X \times f$
60 -	5	$\frac{70+60}{2}=65$	325
70 -	15	75	1125
80 -	20	85	1700
90 -	30	95	2850
100 -	15	105	1575
110 -	10	115	1150
120 - 130	5	125	625
Σ	100	——	9350

$$\bar{X} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f} = \frac{9350}{100} = 93.5$$

المتوسط الحسابي = 93.5 ريالاً.

ميزات الوسط الحسابي:

يمتاز الوسط الحسابي باعتباره أحد مقاييس النزعة المركزية بميزتين:
١- سهولة حسابه.
٢- مشاركة جميع قيم مفردات الظاهرة في حسابه.

عيوب الوسط الحسابي:

ومما يعيب الوسط الحسابي مقارنة مع غيره من مقاييس النزعة المركزية:
١- تأثره بالقيم الشاذة.
٢- عدم إمكانية حسابه في حالة البيانات الوصفية.

٢) الوسيط:

هو القيمة التي تتوسط قيم البيانات بعد ترتيبها تصـاعدياً أو تنازلياً، بحيث يكون عدد المفردات التي قبلها مساوياً لعدد المفردات التي بعدها.

أ- البيانات الغير المبوبة:

لحساب قسمة الوسيط نرتب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً:

- فإذا كان عدد المفردات (n) فردياً فيكون:

الوسيط = بعد ترتيب المفردات أو القيم هو القيمة التي تقع في النصف.

- وإذا كان عدد المفردات (n) زوجياً فيكون:

$$\text{الوسيط } M = \frac{\text{مجموع المفردتان الوسطيان}}{2}$$

مثال رقم (٣ – ٣):

أوجد وسيط القيم لـ (أ) ، ثم لـ (ب):

(أ)	50	60	80	70	40	100	90
(ب)	40	50	60	70	100	80	

حل مثال رقم (٣ – ٣):

(أ) نرتب البيانات تصاعدياً: 40، 50، 60، 70، 80، 90، 100

٣ مفردات ٣ مفردات

القيمة الوسطى M

الوسيط $M = 70$

(ب) نرتب البيانات تصاعدياً: 40 ، 50 ، 70 ، 80 ، 90 ، 100

مفردتان مفردتان

القيمتان الوسيطان

$$M = \frac{70+80}{2} = 75$$

الوسيط $M = 75$

ب- البيانات المبوبة:

يمكن حساب الوسيط في حالة البيانات المبوبة على النحو التالي:

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - fm}{fl} \times h$$

حيث M هو الوسيط.

و L هي الفئة المقابلة لأعلى تكرار.

و n مجموع التكرارات.

و $f\,m$ القيمة السابقة للتكرار المتجمع الصاعد لترتيب الوسيط.

و $f\,L$ تكرار فئة الوسيط.

و h طول الفئة. وترتيب الوسيط $= \frac{n}{2}$

مثال رقم (٤ – ٣):

فئات الأجور	3-	5-	7-	9-	11-
عدد العمال	10	20	40	20	10

أوجد الوسيط:

حل مثال رقم (٤ – ٣):

الفئة	عدد العمال التكرار f	الحد الأعلى للفئة فأقل	تكرار متجمع صاعد $f\,m$
3-	10	5 فأقل	10
5-	20	7 فأقل	30
7-	40	9 فأقل	70
9-	20	11 فأقل	90
11-	10	13 فأقل	100
Σ	100	—	

50

ترتيب الوسيط

ترتيب الوسيط $= \frac{100}{2} = 50$

$$M = 7 + \frac{50-30}{40} \times 2 = 8$$

كما يمكن أيضاً حساب الوسيط للبيانات المبوبة بالعلاقة التالية، وهي لا تختلف كثيراً في فكرتها عن القانون السابق:

$$M = L + \frac{C_1 - C_2}{C_3} \times h$$

حيث أن:

L : الحد الأدنى لفئة الوسيط.

C_1 : ترتيب الوسيط.

C_2 : (ت.م.ص) التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط.

C_3 : التكرار الأصلي لفئة الوسيط.

h : طول الفئة.

مثال رقم (٥ – ٣):

تم اختبار طلاب الشعبة A1 في مادة الإحصاء (100 درجة) وكانت درجاتهم موزعة على النحو التالي:

الدرجات	4 –	20 –	36 –	52 –	68 –	84 – 100
عدد الطلاب	1	2	6	10	7	2

والمطلوب: حساب الوسيط لدرجات الطلاب في مادة اللغة الإنجليزية.

حل مثال رقم (٥ – ٣):

ترتيب الوسيط = $C_1 = \frac{28}{2} = 14$ ، وطول الفئة $h = 16$.

الفئة	عدد العمال التكرار f	الحد الأعلى للفئة فأقل	تكرار متجمع صاعد fm
4-	1	أقل من 20	1
20-	2	أقل من 36	3
36-	6	أقل من 52	C_2=9
L= 52-	C_3 = 10	أقل من 68	19
68-	7	أقل من 84	26
84 - 100	2	أقل من 100	28
Σ	$\Sigma f = 28$		

$C_1 = 14$

$$M = L + \frac{C_1 - C_2}{C_3} \times h = 52 + \frac{14 - 9}{10} \times 16 = 60$$

ميزات الوسيط:

يمتاز الوسيط باعتباره أحد مقاييس النزعة المركزية بميزتين:

١- عدم تأثره بالقيم الشاذة.
٢- ربما أمكن استخدامه في البيانات الوصفية.

عيوب الوسيط:

١- يسهم في تحديده سوى مفردة أو مفردتين من البيانات.

٣) المنوال:

هو القيمة الأكثر شيوعاً (تكراراً) في البيانات.
أيضاً هو (الرقم الشائع) أو (الأكثر تكراراً) أو (الأكثر شيوعاً).

أ- البيانات الغير المبوبة:

مثال رقم (٦ – ٣):
أوجد المنوال للبيانات:

6 ، 5 ، 8 ، 5 ، 7 ، 6 ، 5 ، 4

المنوال $D = 5$

ب- البيانات المبوبة:

يحسب المنوال بالعلاقة التالية:

$$D = L + \frac{d1}{d2 + d2} \times h$$

حيث D ترمز للمنوال.
و L هي الفئة المنوالية المقابلة لأعلى تكرار.
و $d1$ الفرق، حاصل طرح أعلى تكرار ــ التكرار السابق له.
و $d2$ الفرق، حاصل طرح أعلى تكرار ــ التكرار اللاحق له.
و h طول الفئة أي مقدار الزيادة من فئة إلى أخرى.

مثال رقم (٧ – ٣): أوجد المنوال:

فئات الأجور	3-	5-	7	9-	11-
عدد العمال	10	20	40	20	10

$$D = L + \frac{d1}{d2 + d2} \times h = 7 + \frac{20}{20 + 20} \times 2 = 8$$

مميزات المنوال:

يمتاز المنوال باعتباره أحد مقاييس النزعة المركزية بميزتين:

١- عدم تأثره بالقيم الشاذة.

٢- صلاحية استخدامه في البيانات الوصفية.

عيوب المنوال:

١- غير دقيق ويمكن وجود أكثر من منوال لنفس المجموعة من البيانات.

٤) المتوسط المرجح

المتوسط المرجح Weighted Mean لمجموعة من القيم، هو مجموع حواصل ضرب قيم مفردات العينة في أوزان مخصصة لكل منها، مقسوماً على مجموع هذه الأوزان، ويرمز له بالرمز ($\bar{X}_w$).

ونستخدم القانون التالي لحسابه:

$$\bar{X}_w = \frac{\sum wx}{\sum w}$$

مثال رقم (٨ – ٣):

أوجد المتوسط المرجح لدرجات أحد الطلاب في ثلاث مقررات بأحد الفصول الدراسية حيث كانت درجاته هي 50، 70، 40 وكانت الساعات الدراسية المعتمدة هي 4، 3، 2 على التوالي.

حل مثال رقم (٨ – ٣):

$$\bar{X}_w = \frac{\sum wx}{\sum w} = \frac{(2)(40)+(3)(70)+(4)(50)}{2+3+4} = 54.4 \text{ درجة}$$

مثال رقم (٩ – ٣):

أوجد المتوسط العام لأعمار المعتمرين خلال شهر رمضان في إحدى السنوات حسب البيانات الآتية:

منطقة القدوم	أعداد المعتمرين	متوسط العمر
جنوب آسيا	12000	50
الدول العربية	10000	60
الدول الغربية	1000	40

حل مثال رقم (٩ – ٣):

المتوسط العام لعمر المعتمرين يعتبر متوسطاً مرجحاً للأوساط المعطاة وذلك على اعتبار أن عدد المعتمرين يمثل الوزن المناظر. وبالتالي:

$$\bar{X}_w = \frac{\sum wx}{\sum w} = \frac{(50)(12000)+(60)(10000)+(40)(1000)}{23000} = 53.9 \text{ سنة}$$

مثال رقم (١٠ – ٣):

مثال عام

الجدول التالي يوضح التوزيع التكراري لعينة من أرصدة الحسابات في أحد البنوك بآلاف الريالات.

الرصيد	4 -	8 -	12 -	16 -	20 -
عدد الحسابات	10	15	20	10	5

١- أحسب الوسط الحسابي.

٢- أحسب الوسيط.

٣- المنوال (رقم الرصيد الشائع).

حل مثال رقم (١٠ – ٣):

فئة الأجور الفئات (c)	عدد العمال التكرار f	مركز الفئة X	$X \times f$
4 -	10	$\frac{4+8}{2}=6$	60
8 -	15	10	150
12 -	20	14	280
16 -	10	18	180
20 -	5	22	110
Σ	60	ـــــ	780

$$\bar{X} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f} = \frac{780}{60} = 13$$

١) المتوسط الحسابي $\bar{x}$ = 13 ريالاً.

الفئة	عدد العمال التكرار f	الحد الأعلى للفئة فأقل	تكرار متجمع صاعد fm
4 -	10	8 فأقل	10
8 -	15	12 فأقل	25
12 -	20	16 فأقل	45
16 -	10	20 فأقل	55
20 -	5	24 فأقل	60
Σ	60	ـــــ	

$\boxed{30}$

أولاً نعين ترتيب الوسيط:

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{60}{2} = 30$$

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - fm}{fl} \times h = 12 + \frac{30 - 25}{20} \times 4 = 13$$

٢) الوسيط $M = 13$

$$D = L + \frac{d1}{d2 + d2} \times h = 12 + \frac{5}{5 + 10} \times 4 = 13.33$$

٣) المنوال $D = 13.33$

المحاضرة الرابعة

مقاييس التشتت

تعريف التشتت:

يمثل التشتت مدى انحراف (تقارب أو تباعد) البيانات بعضها عن بعض.

وهناك مقاييس عدة للتشتت منها :

١- دليل التشتت للبيانات الوصفية.
٢- المدى.
٣- التباين والانحراف المعياري.

(١) دليل التشتت للبيانات الوصفية

دليل التشتت للبيانات النوعية هو مقياس نسبي يقيس نسبة تشتت البيانات الوصفية سواءً الاسمية منها أو التفصيلية ويرمز له بالرمز (DI).

ويمكن حسابه بالصيغة التالية:

$$DI = \frac{c(n^2 - \sum n^2)}{n^2(c-1)} \times 100\%$$

c : هي عدد الأصناف لكل متغير وصفي.
n : هي عدد مشاهدات الصنف.
Σn : مجموع مشاهدات أصناف المتغير الوصفي.

ملاحظة هامة
دليل التشتت تتراوح قيمته بين صفر (تجانس كامل) ومائة (تشتت كامل).

مثال رقم (١ – ٤):

الجدول التالي يوضح عدد الطلاب في بعض أقسام كلية الاقتصاد بجامعة الملك عبدالعزيز:

القسم	أعمال دولية	تسويق	موارد بشرية	مالية	محاسبة	قانون	سياسة	إدارة عامة	المجموع
عدد الطلاب	125	111	77	53	45	34	33	26	504

والمطلوب قياس مدى التباين بين أعداد طلاب كلية الاقتصاد حسب أقسام الكلية.

حل مثال رقم (١ – ٤):

$$DI = \frac{c(n^2 - \sum n^2)}{n^2(c-1)} \times 100\%$$

$$DI = \frac{8(504^2 - \left[125^2 + 111^2 + 77^2 + 53^2 + 45^2 + 34^2 + 33^2 + 26^2\right])}{504^2(8-1)} \times 100\%$$

$$= \frac{1699088}{1778112} \times 100 = 95.56\%$$

مثال رقم (٢ – ٤):
الجدول الآتي يمثل المستوى التعليمي بإحدى القطاعات الحكومية. قارن تشتت المستوى التعليمي بين الذكور والإناث:

	المستوى التعليمي				
	ثانوي	بكالوريوس	ماجستير	دكتوراه	**المجموع**
الذكور (١)	5	10	6	2	**23**
الإناث (٢)	3	7	4	1	**15**

حل مثال رقم (٢ – ٤):

$$DI_1 = \frac{4(23^2 - \left[5^2 + 10^2 + 6^2 + 2^2\right])}{23^2(4-1)} \times 100 = 91.75\%$$

$$DI_2 = \frac{4(15^2 - \left[3^2 + 7^2 + 4^2 + 1^2\right])}{15^2(4-1)} \times 100 = 88.89\%$$

مما سبق نلاحظ أن المستوى التعليمي للإناث أقل تشتتاً من المستوى التعليمي للذكور.

(٢) المدى:

في حالة البيانات غير المبوبة، المدى هو الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة من البيانات، أو الفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيرة والحد الأدنى للفئة الأولى في حالة البيانات المبوبة، ويرمز له بالرمز (R).

المدى R = أكبر قيمة في البيانات – أصغر قيمة فيها

مثال رقم (٣ – ٤):
البيانات الآتية تمثل أسعار سهم شركة معينة خلال خمسة أيام بالريال السعودي:
50 70 80 90 60
أحسب المدى؟

حل مثال رقم (٣ – ٤):

R = 90 – 50 = 40 ريال

مثال رقم (٤ – ٤):
إذا كان الجدول التالي يوضح مراقبة التقلبات في سعر شركتين (A وB) بالريال، فأوجد قيمة المدى لسعري السهمين في الشركتين:

الشركة (A)	59 ، 65 ، 58 ، 55 ، 60 ، 62
الشركة (B)	65 ، 59 ، 61 ، 60 ، 59 ، 55

حل مثال رقم (٤ – ٤):

الشركة (A)	R = 65 – 55 = 10
الشركة (B)	R = 65 – 55 = 10

وهذا لا يعني أن التقلبات في سعر سهمي الشركتين متشابهين، وذلك بالنظر للأسعار في الجدول السابق يتضح خلاف ذلك. لذا لا يعتمد على المدى كثيراً ويفضل استخدام الانحراف المعياري لأن جميع القيم تدخل في حسابه.

حساب المدى في حالة البيانات المبوبة

ملاحظة هامة
هناك تعريف آخر للمدى حيث يعبر عنه بالفرق بين مركز الفئة الأخيرة ومركز الفئة الأولى.

مثال رقم (٥ – ٤):
الجدول التالي يوضح توزيع (100) شخص حسب أوزانهم بالكيلوجرام، والمطلوب حساب مدى الوزن لهؤلاء الأشخاص:

فئات الوزن	50-	58-	66-	74-	82-	90 – 98
عدد الأشخاص	3	10	24	40	15	8

حل مثال رقم (٥ – ٤):
يتضح أن هناك تفاوتاً بين أوزان الأشخاص لأن مدى الأوزان يساوي (48) كجم.

R = 98 – 50 = 48 كيلوجرام

مميزات المدى:

١- سهولة حسابه.

٢- مقياس يعطي فكرة سريعة عن تفاوت البيانات.

عيوب المدى:

١- لا يدخل في حسابه إلا قراءتين (العظمى والصغرى) ولربما تكون إحداهما أو كلاهما قيم متطرفة، لذا لا يعتمد عليه كثيراً.

٢- يصعب حسابه في البيانات الوصفية أو الجداول التكرارية المفتوحة.

(٣) التباين والانحراف المعياري:

هو أهم مقاييس التشتت على الإطلاق، ويقيس مدى تشتت البيانات عن متوسطها.

تعريفه:

حيث إن الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي لما يسمى بالتباين، يحسن بنا أن نعرف التباين أولاً ثم نُعرِّج على تعريف الانحراف المعياري.

التباين هو: الوسط الحسابي لمجموع مربع انحراف المفردات عن متوسطها، ويعطى بالعلاقة:

أ- في حالة البيانات الغير مبوبة:

$$S=\sqrt{\frac{\sum X^{2}}{n}-(\bar{X})^{2}}$$

ب- في حالة البيانات المبوبة:

$$S=\sqrt{\frac{\sum X^{2}f}{\sum f}-(\bar{X})^{2}}$$

مميزات الانحراف المعياري:

١- سهولة حسابه والتعامل معه جبرياً.

٢- تدخل جميع القيم في حسابه ولذلك يعتبر من أدق مقاييس التشتت.

٣- له نفس وحدة القياس للظاهرة محل الدراسة.

عيوب الانحراف المعياري:

١- تأثره بالقيم الشاذة.

٢- لا يمكن حسابه للبيانات الوصفية.

٣- يصعب حسابه للجداول التكرارية المفتوحة.

مثال رقم (٦ – ٤):

مثال عام

لديك البيانات التالية: 15 – 20 – 10 – 15 – 30

- أحسب الوسط الحسابي ؟
- الانحراف المعياري ؟
- المنوال الرقم الشائع ؟
- الوسيط ؟
- والمجال (المدى) ؟

حل مثال رقم (٦ – ٤):

أولاً: نرتب البيانات:

10 – 15 – 15 – 20 – 30

١- الوسط الحسابي

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{90}{5} = 18$$

٢- الانحراف المعياري

يجب أن نربع البيانات:

$X^2 = 100 – 225 – 225 – 400 – 900$

$\sum x^2 = 1850$

$n = 5$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1850}{5} - (18)^2} = 6.68$$

٣- المنوال (الرقم الشائع) = 15

٤- الوسيط = 15

٥- المجال أو المدى = أكبر قيمة ـ أصغر قيمة

20 = 10 - 30

مثال رقم (٧ – ٤):

مثال عام

لديك البيانات التالية:

فئة	10 -	20 -	30 -	40 -	50 -
تكرار	10	20	40	20	10

- أوجد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري، والمنوال (الرقم الشائع).
- والوسيط.

حل مثال رقم (٧ – ٤):

الفئة	التكرار f	X	$x\,f$	$X^2 f$
10 -	10	15	150	2250
20 -	20	25	500	12500
30 -	40	35	1400	49000
40 -	20	45	900	40500
50 -	10	55	550	30250
Σ المجموع	100	——	3500	134500

١- الوسط الحسابي

$$\bar{X} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f} = \frac{3500}{100} = 35$$

٢- الانحراف المعياري

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2 f}{\sum f} - (\bar{X})^2} = \sqrt{\frac{134500}{100} - (35)^2} = 10.95$$

٣- المنوال أو الرقم الشائع

$$D = L + \frac{d1}{d2 + d2} \times h = 30 + \frac{20}{20 + 20} \times 10 = 35$$

٤ـ الوسيط

تكرار متجمع صاعد fm	الحد الأعلى للفئة فأقل	التكرار f	الفئة
10	20 فأقل	10	10 -
30 $\boxed{50}$	30 فأقل	20	20 -
70	40 فأقل	40	30 -
90	50 فأقل	20	40 -
100	60 فأقل	10	50 -
----------	--------	100	المجموع Σ

أولاً نعين ترتيب الوسيط:

$$\frac{100}{2}=50$$

$$M = L+\frac{\frac{n}{2}-fm}{fl}\times h = 30+\frac{50-30}{40}\times 10 = 72.5$$

معامل الاختلاف (مقياس التشتت النسبي)

يستخدم معامل الاختلاف في المقارنة بين تشتت مجموعتين أو أكثر من البيانات، حيث لا يمكننا استخدام أحد مقاييس التشتت لعمل هذه المقارنة مباشرة في جميع الأحول وذلك لسببين:

١ـ اختلاف وحدات القياس المستخدمة في المجموعتين كما لو كنا نقارن بين تشتت درجات مجموعة من الطلاب وتشتت أوزانهم أو أطوالهم.

٢ـ وجود فرق كبير بين المتوسطين الحسابيين للمجموعتين المراد المقارنة بين تشتتيهما.

$$c.v = \frac{s}{\bar{X}}\times 100\%$$

معامل الالتواء: (أحد مقاييس عدم التماثل)

الالتواء هو بعد المنحنى التكراري للظاهرة عن التماثل ويقاس بمعامل يسمى بـ: معامل الالتواء، فإما أن يكون المنحنى التكراري :

١ـ متماثلاً وعندها تكون قيمة معامل الالتواء صفراً،

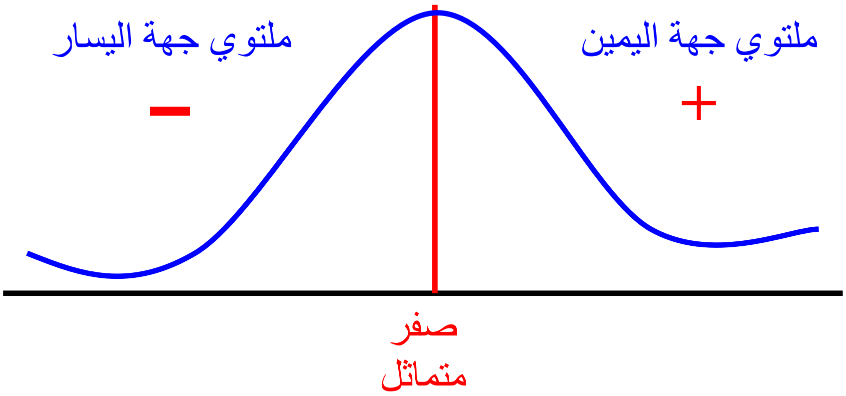
عندها يكون الوسط الحسابي $\bar{X}$ = المنوال D

٢- أو ملتويا إلى جهة اليمين وتكون قيمة معامل الالتواء موجبة،

عندها يكون الوسط الحسابي $\bar{x}$ > المنوال D ($D < \bar{x}$)

٣- أو ملتويا إلى جهة اليسار وتكون قيمة معامل الالتواء سالبة.

عندما يكون الوسط الحسابي $\bar{x}$ < المنوال D ($D > \bar{x}$)



ويمكن إيجاد معامل الالتواء بأحد القانونين التاليين:

معامل الالتواء الأول:

$$SK_1 = \frac{\bar{X} - D}{S}$$

معامل الالتواء الثاني:

$$SK_2 = \frac{3(\bar{X} - M)}{S}$$

يجب أن تعلم:

- إذا كان ناتج SK (معامل الالتواء) يساوي صفراً يكون الوسط الحسابي $\bar{x}$ يساوي المنوال D ، وعندما يكون الناتج موجب أي ملتوي جهة اليمين ، فيجب أن يكون $\bar{x}$ (الوسط الحسابي) أكبر من D (المنوال)، وأيضاً يكون $\bar{x}$ (الوسط الحسابي) أكبر من M (الوسيط).
- إذا كان ناتج SK (معامل الالتواء) سالب أي ملتوي جهة اليسار ، يجب أن يكون $\bar{x}$ (الوسط الحسابي) أقل من D (المنوال) ، وأيضاً يكون $\bar{x}$ أقل من M (الوسيط).
- **كما أن معامل الالتواء يعتبر أحد مقاييس عدم التماثل.**

مثال رقم (٨ – ٤):

مثال عام

الجدول التالي يوضح التوزيع التكراري لعينة من الشركات بملايين الريالات:

الفئات	3 -	5 -	7 -	9 -	11 -
عدد الشركات	10	20	40	20	10

- احسب معامل الاختلاف (مقياس التشتت النسبي).
- أدرس تماثل التوزيع (أوجد معامل الالتواء).

حل مثال رقم (٨ – ٤):

فئة	تكرار f	X	xf	$X^2 f$
3 -	10	4	40	160
5 -	20	6	120	720
7 -	40	8	320	2560
9 -	20	10	200	2000
11 -	10	12	120	1440
المجموع Σ	100	—	800	6880

أولاً: نوجد الوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f} = \frac{800}{100} = 8$$

ثم نوجد الانحراف المعياري:

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2 f}{\Sigma f} - (\bar{X})^2} = \sqrt{\frac{6880}{100} - (8)^2} = 2.19$$

ونوجد معامل الاختلاف (مقياس التشتت النسبي):

$$c.v = \frac{s}{\bar{X}} \times 100\% = \frac{2.19}{8} \times 100 = 27.37\%$$

ولدراسة تماثل التوزيع (أي معامل الالتواء):

أولاً : نوجد المنوال:

$$D = L + \frac{d1}{d2 + d2} \times h = 7 + \frac{20}{20 + 20} \times 2 = 8$$

ثم نوجد معامل الالتواء:

$$SK_1 = \frac{\bar{X} - D}{S} = \frac{8 - 8}{2.19} = 0$$

∵ بما أن الالتواء يساوي صفر

∴ إذاً التوزيع متماثل

مثال رقم (٩ – ٤):

مثال عام

البيانات التالية توضح درجات عينة من 10 طلاب في الاختبار الدوري لمادة الإحصاء:

10 - 8 - 6 - 6 - 7 - 5 - 6 - 9 - 6 - 7

المطلوب :

١- الوسط الحسابي.   ٢- الانحراف المعياري.   ٣- المنوال.

٤- الوسيط.   ٥- معامل الاختلاف.   ٦- معامل الالتواء الأول.

٧- معامل الالتواء الثاني.

حل مثال رقم (٩ – ٤):

أولاً : نرتب البيانات ونعطيها الرمز X

X = 5 - 6 - 6 - 6 - 6 - 7 - 7 - 8 - 9 - 10

$n = 10$

١) الوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{70}{10} = 7$$

٢) الانحراف المعياري:

X^2 = 25 - 36 - 36 - 36 - 36 - 49 - 49 - 64 - 81 - 100

$\sum x^2 = 512$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2} = \sqrt{\frac{512}{10} - (7)^2} = 1.48$$

٣) المنوال (الرقم الأكثر شيوعاً):

$D = 6$

٤) الوسيط M :

5 - 6 - 6 - 6 - 6 - 7 - 7 - 8 - 9 - 10

$$m = \frac{6+7}{2} = 6.5$$

٥) معامل الاختلاف:

$$c.v = \frac{s}{\bar{X}} \times 100\% = \frac{1.48}{7} \times 100 = 21.14\%$$

٦) معامل الالتواء الأول (باستخدام المنوال):

$$SK_1 = \frac{\bar{X} - D}{S} = \frac{7-6}{1.48} = 0.67$$

∴ ملتوي جهة اليمين.

٧) معامل الالتواء الثاني (باستخدام الوسيط):

$$SK_2 = \frac{3(\bar{X} - M)}{S} = \frac{3(7-6.5)}{1.48} = 1.01$$

∴ ملتوي جهة اليمين.

مثال رقم (١٠ – ٤):

مثال عام

الجدول التالي يوضح التوزيع التكراري لعينة من أجور الموظفين بآلاف الريالات.

الأجور	4 -	8 -	12 -	16 -	20 -	المجموع
عدد الموظفين	10	15	20	10	5	60

١) احسب معامل الاختلاف (مقياس التشتت النسبي) ؟

٢) إذا علمت أن المصروفات لنفس الموظفين تتبع توزيع تكراري متماثل، منوال يساوي 5 ، وانحراف معياري يساوي 2 ، فأدرس أي الظاهرتين أكثر تشتت، الأجور أم المصروفات ؟

٣) أدرس تماثل التوزيع أو (أوجد معامل الالتواء) ؟

حل مثال رقم (١٠ – ٤):

فئة	تكرار f	مركز الفئة X	X f	X^2 f
4 -	10	6	60	360
8 -	15	10	150	1500
12 -	20	14	280	3920
16 -	10	18	180	3240
20 -	5	22	110	2420
المجموع	60	--------	780	11440

أولاً نوجد الوسط الحسابي:

$$\bar{X}=\frac{\Sigma xf}{\Sigma f}=\frac{780}{60}=13$$

ثم الانحراف المعياري:

$$S=\sqrt{\frac{\sum X^2 f}{\sum f}-(\bar{X})^2}=\sqrt{\frac{11440}{60}-(13)^2}=4.65$$

ثم نوجد معامل الاختلاف (مقياس التشتت النسبي):

$$c.v=\frac{s}{\bar{X}}\times 100=\frac{4.65}{13}\times 100=35.77\%$$

لمقارنة تشتت، نقارن معامل الاختلاف للأجور، ومعامل الاختلاف للمصروفات، ويكون صاحب الناتج أو الرقم الأكبر، هو الأكثر تشتت:

الأجور	المصروفات
$\bar{X}=13$	$\bar{X}=5$
$S=4.65$	$S=2$
$c.v=\frac{s}{\bar{X}}\times 100\%$	$c.v=\frac{s}{\bar{X}}\times 100\%$
$c.v=\frac{4.65}{13}\times 100=35.77\%$	$c.v=\frac{2}{5}\times 100=40\%$

∵ بما أن معامل اختلاف المصروفات أكبر من معامل اختلاف الأجور.

∴ إذاً المصروفات أكثر تشتت.

معامل الالتواء (دراسة التماثل):

أولاً: نوجد المنوال:

$$D=L+\frac{d1}{d2+d2}\times h=12+\frac{5}{5+10}\times 4=13.33$$

ثم نوجد معامل الالتواء (باستخدام المنوال):

$$SK_1=\frac{\bar{X}-D}{S}=\frac{13-14.4}{4.65}=9.9$$

∴ ملتوي جهة اليمين.

مثال رقم (١١ – ٤):

في عينة من 60 أسرة، متوسط استهلاكها من المياه، يتبع توزيع تكراري، حيث:

$\sum Xf = 900$

$\sum X^2 f = 13840$

- احسب الوسط الحسابي؟ الانحراف المعياري؟
- معامل الاختلاف (مقياس التشتت النسبي)؟

حل مثال رقم (١١ – ٤):

أولاً نوجد الوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f} = \frac{900}{60} = 15$$

ثم الانحراف المعياري :

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2 f}{\Sigma f} - (\bar{X})^2} = \sqrt{\frac{13840}{60} - (15)^2} = 2.25$$

ثم نوجد معامل الاختلاف:

$$c.v = \frac{s}{\bar{X}} \times 100 = \frac{2.25}{15} \times 100 = 15\%$$

مثال رقم (١٢ – ٤):

إذا علمت أن دخل الأسر يتبع توزيع تكراري حيث الوسط الحسابي يساوي 12 وانحراف معياري يساوي 3 ، وكذلك الإنفاق لنفس الأسر يتبع توزيع تكراري حيث الوسط الحسابي يساوي 8 ، وانحراف معياري يساوي 2 ، فأدرس أي الطرفين أكثر تشتتاً ؟

حل مثال رقم (١٢ – ٤):

الأجور

$\bar{X} = 12$

$S = 3$

$$c.v = \frac{s}{\bar{X}} \times 100\%$$

$$c.v = \frac{12}{3} \times 100 = 25\%$$

المصروفات

$\bar{X} = 8$

$S = 2$

$$c.v = \frac{s}{\bar{X}} \times 100\%$$

$$c.v = \frac{8}{2} \times 100 = 25\%$$

∴ تشتت الدخل مساوي لتشتت الإنفاق.

مثال رقم (١٣ – ٤):

مثال عام

فئات الأجور	3-	5-	7	9-	11-
عدد العمال	10	20	40	20	10

أوجد: ١) الوسط الحسابي ؟ ٢) الانحراف المعياري ؟ ٣) المنوال ؟
٤) الوسيط ؟ ٥) أدرس تماثل التوزيع ، باستخدام المنوال ؟
٦) أدرس تماثل التوزيع (أوجد معامل الالتواء)، باستخدام الوسيط ؟
٧) أوجد معامل الاختلاف ؟

حل مثال رقم (١٣ – ٤):

فئة	التكرار f	X	xf	$x^2 f$
3 -	10	4	40	160
5 -	20	6	120	720
7 -	40	8	320	2560
9 -	20	10	200	2000
11 -	10	12	120	1440
المجموع	100	——	800	6880

١) الوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f} = \frac{800}{100} = 8$$

٢) الانحراف المعياري:

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2 f}{\Sigma f} - (\bar{X})^2} = \sqrt{\frac{6880}{100} - (8)^2} = 2.19$$

٣) المنوال:

$$D = L + \frac{d1}{d2 + d2} \times h = 12 + \frac{20}{20 + 20} \times 2 = 8$$

٤) الوسيط :

الفئة	التكرار f	الحد الأعلى للفئة فأقل	تكرار متجمع صاعد fm
3 -	10	5 فأقل	10
5 -	20	7 فأقل	30 $\boxed{50}$
7 -	40	9 فأقل	70
9 -	20	11 فأقل	90
11 -	10	13 فأقل	100
المجموع	100	--------	------------

أولاً نعين ترتيب الوسيط:

$$\frac{100}{2} = 50$$

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - fm}{fl} \times h = 7 + \frac{50-30}{40} \times 2 = 8$$

٥) دراسة تماثل التوزيع (معامل الالتواء الأول) باستخدام المنوال :

$$SK_1 = \frac{\bar{X} - D}{S} = \frac{8-8}{2.19} = 0$$

∴ التوزيع متماثل.

٦) دراسة تماثل التوزيع (معامل الالتواء الثاني) باستخدام الوسيط:

$$SK_2 = \frac{3(\bar{X} - M)}{S} = \frac{3(8-8)}{2.19} = 0$$

∴ التوزيع متماثل.

٧) معامل الاختلاف:

$$cv = \frac{s}{\bar{X}} \times 100 = \frac{2.19}{8} \times 100 = 27.37\%$$

مثال رقم (١٤ – ٤):

أسئلة نظري

١) أحد مقاييس النزعة المركزية ؟

لا شيء	D	الوسيط	**<u>C</u>**	معامل الاختلاف	B	الانحراف المعياري	A

٢) مركز الفئة هو ؟

لا شيء	D	منتصف الفئة	**<u>C</u>**	طول الفئة	B	عرض الفئة	A

٣) القيمة الأكثر تكرار (شيوعاً) ؟

الانحراف المعياري	D	الوسط الحسابي	C	الوسيط	B	المنوال	**<u>A</u>**

٤) معامل الاختلاف هو ؟

مقياس التشتت النسبي	**<u>D</u>**	مقياس التماثل	C	مقياس التشتت	B	مقياس الالتواء	A

٥) معامل الاختلاف هو ؟

D مقياس التماثل	**C** مقياس التشتت	B لا شيء	A مقياس الالتواء

٦) أحد المقاييس التالية هي مقياس التشتت ؟

D الانحراف المعياري	C مقياس التماثل	B مقياس الوسيط	A مقياس الالتواء

٧) مجموعة القيم وسطها الحسابي (4) وعدد بياناتها (10) ، هو ؟

D لا شيء	**C** 40	B 0.4	A 25

٨) الانحراف المعياري هو ؟

D لا شيء	**C** الجزر التربيعي للتباين	B مربع التباين	A التباين

٩) التباين هو ؟

D لا شيء	C الانحراف المعياري	**B** مربع الانحراف المعياري	A جزر الانحراف المعياري

١٠) إذا كان التوزيع متماثل ، والمنوال يساوي 7 فإن الوسط الحسابي يساوي ؟

D 9	C 0.7	B 9.9	**A** 7

١١) إذا كان التوزيع متماثل فإن قيمة الوسط الحسابي ؟

D أكبر من الوسيط	C أقل من المنوال	**B** تساوي المنوال	A أكبر من المنوال

١٢) إذا كانت قيمة الوسط الحسابي أكبر من المنوال أو الوسيط ، فإن التوزيع يكون

D لا شيء	C متماثل	**B** ملتوي جهة اليمين	A ملتوي جهة اليسار

١٣) إذا كان قيمة المنوال أقل من الوسط الحسابي فإن التوزيع يكون ؟

D لا شيء	C متماثل	**B** ملتوي جهة اليمين	A ملتوي جهة اليسار

١٤) القيمة السالبة لمعامل الاختلاف تعني أن التوزيع ؟

D لا شيء	C متماثل	**B** ملتوي جهة اليسار	A ملتوي جهة اليمين

١٥) المدى للبيانات 40 – 60 – 90 – 50 – 40 يساوي ؟

D 290	C 90	B 40	**A** 50

١٦) المنوال للبيانات 50 – 60 – 90 – 50 – 40 يساوي ؟

D 290	C 90	B 40	**A** 50

١٧) أحد المقاييس التالية هو مقياس التشتت ؟

A مقياس الوسيط	**B** معامل الالتواء	C معامل الوسيط	D لا شيء

١٨) أحد مقاييس التشتت هو ؟

A مقياس التماثل	B مقياس الوسط الحسابي	**C** معامل الاختلاف	D لا شيء

١٩) أحد مقاييس النزعة المركزية هو ؟

A الانحراف المعياري	**B** الوسط الحسابي	C مقياس التماثل	D معامل الاختلاف

٢٠) أحد مقاييس النزعة المركزية هو ؟

A الانحراف المعياري	**B** المدى	C مقياس التماثل	D معامل الاختلاف

٢١) القيمة الموجبة لمعامل الاختلاف تعني أن التوزيع ؟

A ملتوي جهة اليمين	B ملتوي جهة اليسار	C متماثل	D لا شيء

٢٢) إذا كان الوسط الحسابي أقل من المنوال ، يعني أن التوزيع ؟

A ملتوي جهة اليمين	**B** ملتوي جهة اليسار	C متماثل	D لا شيء

٢٣) إذا كان الوسط الحسابي أقل من الوسيط ، يعني أن التوزيع ؟

A ملتوي جهة اليمين	**B** ملتوي جهة اليسار	C متماثل	D لا شيء

٢٤) معامل الالتواء يعتبر أحد مقاييس ؟

A النزعة المركزية	**B** عدم التماثل	C التشتت	D لا شيء

٢٥) للمقارنة بين تشتت مجموعتين مختلفتين من القيم نستخدم ؟

A التباين	B مربع التباين	**C** معامل الاختلاف	D لا شيء

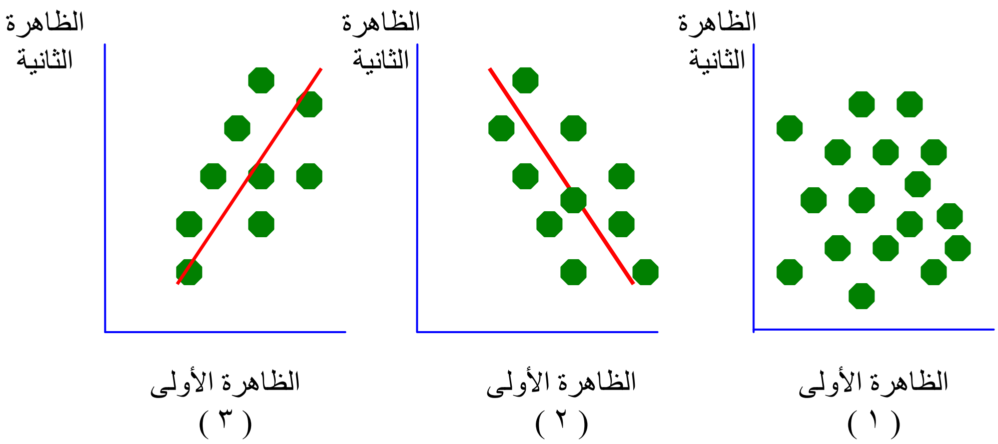
المحاضرة الخامسة

الارتباط والانحدار

درسنا فيما سبق من الأبواب كيفية وصف مجموعة من القيم التي تمثل ظاهرة واحدة حيث قمنا بحساب بعض المقاييس الإحصائية مثل مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت ومعامل الاختلاف والالتواء .

وسندرس في هذا الباب كيفية وصف مفردات ظاهرتين مختلفتين من حيث العلاقة بينهما، مثل ظاهرتي الدخل والإنفاق الشهري لمجموعة من الأفراد.

ولنأخذ الأشكال الثلاثة التالية والتي توضح العلاقة بين ظاهرتين:



في الشكل (١) نلاحظ عدم وجود ترابط بين قيم الظاهرتين .
في الشكلين (٢&٣) نلاحظ وجود ترابط ويسمى هذا بالترابط الخطي .

(١) معامل ارتباط بيرسون (الخطي)

وهو مقياس يكشف لنا عن مدى وجود علاقة بين ظاهرتين ما ويمكننا إيجاد قيمته على النحو التالي:

لنفرض أن لدينا الظاهرة **X** والظاهرة **Y** بحيث توجد المفردات التالية (n مفردة) لتمثيل كل من الظاهرتين

$$X_1 ، X_2 ، ..... ، X_n$$

$$Y_1 ، Y_2 ، ..... ، Y_n$$

فتكون قيمة معامل الارتباط هي:
معامل ارتباط بيرسون (الخطي)، في حالة البيانات المبوبة و الغير مبوبة:

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{X}\,\bar{Y}}{S_x \,.\, S_y}$$

حيث S_x ، S_y = الانحراف المعياري للظاهرتين X ، Y

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{X})^2} \qquad S_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\bar{Y})^2}$$

ملاحظة : ويكون **التباين** ، **الناتج** ما قبل الجزر.

ويسمى هذا المقياس بمعامل ارتباط بيرسون

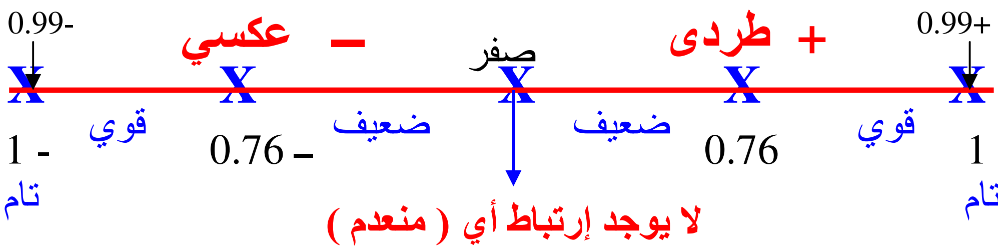
خصائص معامل الارتباط الخطي:

تنحصر قيمة معامل الارتبط (r) دائماً بين 1- و 1+ وتكون العلاقة بين الظاهرتين **طردية** إذا كانت قيمة (r) موجبة بينما تكون العلاقة **عكسية** إذا كانت قيمة (r) سالبة، كما يعنى اقتراب القيمة من 1- أو 1+ أن قوية بينما يعني اقتراب قيمة (r) من **الصفر** أن الارتباط (أو العلاقة) **ضعيفة**، وعموماً فإن:

$$-1 \le r \le 1$$

r = 1 أو r = 1- ⟵ ارتباط تام

r = صفر ⟵ ارتباط منعدم



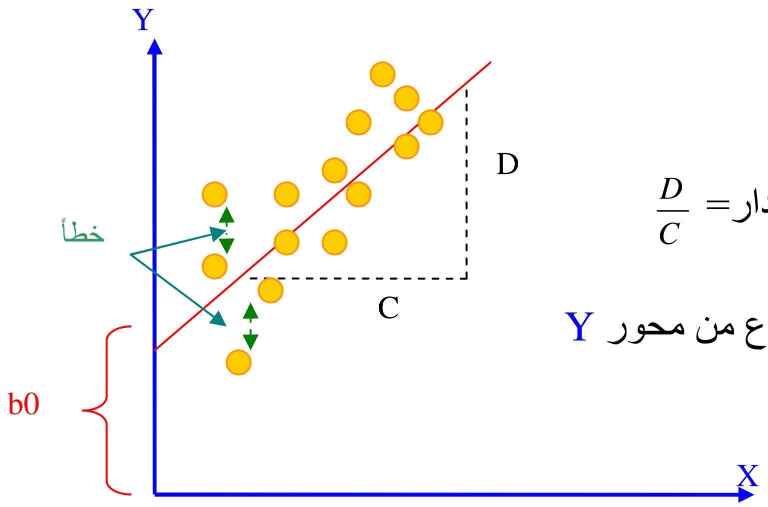
(٢) معادلة خط الانحدار:

تعرضنا فيما سبق لدراسة العلاقة بين ظاهرتين من حيث ترابط مفرداتهما مع بعضهما لبعض ، ونتعرض الآن إلى دراسة شكل هذه العلاقة بين الظاهرتين بافتراض أن أحداهما (X) تمثل متغير **مستقل** بينما تمثل الظاهرة (Y) متغير **تابع**.

يهدف موضوع الانحدار إلى تقدير الخط الذي يمثل العلاقة بين **X** و **Y** وذلك عن طريق جعل مجموع مربع الأخطاء (المتمثلة في بعد نقاط الانتشار عن ذلك الخط) أقل ما يمكن، ويحدد خط الانحدار بالميل والذي يرمز له بـ **b1** وبالجزء المقطوع من محور **Y** والذي يرمز له بالرمز b0، وتعطى معادلة هذا الخط بالتالي:

$$Y = b0 + b1 \; X$$

وتسمى هذه المعادلة بخط انحدار Y على X



b1 = ميل خط الانحدار = $\frac{D}{C}$

b0 = الجزء المقطوع من محور Y

ويمكننا حساب b1 و b0 بالمعادلتين التاليتين:

$$b1 = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{s^2 x}$$

$$b0 = \bar{Y} - b1\bar{X}$$

حيث:

التباين S^2X مربع الانحراف المعياري ما قبل الجزر.

الانحراف المعياري Sx الجزر التربيعي للتباين.

وبالتعويض عن الميل **b1** والمقطع **b0** ، وقيمة **X** المعطاة في المعادلة نحصل على قيمة **Y**

مثال رقم (١ – ٥):

في عينة من 10 أسرة كانت (X) تمثل عدد أطفال الأسرة، و Y تمثل عدد غرف المسكن للأسرة، وحصلنا على النتائج التالية:

$\sum x = 50$ $\sum y = 80$ $\sum x^2 = 446$

$\sum y^2 = 1040$ $\sum xy = 180$ $n = 10$

١- أحسب قيمة معامل الارتباط الخطي (بيرسون) وعلل على النتيجة ؟

٢- احسب معادلة خط الانحدار، ثم قدر عدد الغرف عندما يكون عدد أطفال الأسرة يساوي ستة أطفال ؟

حل مثال رقم (١ – ٥):

١) معامل ارتباط بيرسون الخطي:

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{Sx . Sy}$$

أولاً نوجد الوسط الحسابي X :

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{50}{10} = 5$$

ثم الانحراف المعياري X :

$$Sx = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2} = \sqrt{\frac{446}{10} - (5)^2} = 4.43$$

التباين ، ما قبل الجزر

$S^2x = 19.6$

ثانياً نوجد الوسط الحسابي Y :

$$\bar{Y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{80}{10} = 8$$

ثم الانحراف المعياري Y :

$$Sy = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\bar{Y})^2} = \sqrt{\frac{1040}{10} - (8)^2} = 6.32$$

وهنا لا نحتاج لتباين Sy

ثم نعوض في معادلة "معامل ارتباط بيرسون":

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \overline{X}\,\overline{Y}}{Sx . Sy} = \frac{\frac{180}{10} - 5 \times 8}{(4.43)(6.32)} = -0.79$$

عكسي قوي.

٢) معادلة خط الانحدار

$$b0 = \overline{Y} - b1\overline{X}$$

$$b1 = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \overline{X}\,\overline{Y}}{s^2x}$$

$$b1 = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \overline{X}\,\overline{Y}}{s^2x} = \frac{\frac{180}{10} - 5 \times 8}{19.6} = -1.12$$

فتكون معادلة خط الانحدار على النحو التالي:

$$b0 = \overline{Y} - b1\overline{X}$$

$$= 8 + 1.12\,(5) = 13.6$$

ثم نقدر عدد الغرف، عندما يكون عدد الأطفال 6 :

Y = b0 + b1 X

$\hat{Y} = 13.6 - 1.12\ (6) = 6.88 = 7$ غرف

ملاحظة : يجب أن نقرب الناتج إلى اقرب قيمة.

مثال رقم (٢ – ٥):

الجدول التالي يبين دخل ثمانية أسر وما تنفقه (بعشرات الريالات):

الدخل	64	52	84	64	76	56	68	64
الإنفاق	52	40	60	52	60	42	50	52

المطلوب :

١) معامل ارتباط بيرسون، خط انحدار الإنفاق على الدخل؟

٢) قدر إنفاق الأسرة التي يبلغ دخلها 700 ريال؟

حل مثال رقم (٢ – ٥):

الدخل X	الإنفاق Y	X Y	X^2	Y^2
64	52	3328	4096	2704
52	40	2080	2704	1600
84	60	5040	7056	3600
64	52	3328	4096	2704
76	60	4560	5776	3600
56	42	2352	3136	1764
68	50	3400	4624	2500
64	52	3328	4096	2704
528	**408**	**27416**	**35584**	**21176**

١) معامل ارتباط بيرسون الخطي :

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{Sx \cdot Sy}$$

أولاً نوجد الوسط الحسابي X :

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{528}{8} = 66$$

ثم الانحراف المعياري X :

$$Sx = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2} = \sqrt{\frac{35584}{8} - (66)^2} = 9.59$$

$S^2x = 92$ ← التباين ، ما قبل الجزر

ثانياً نوجد الوسط الحسابي Y :

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{408}{8} = 51$$

ثم الانحراف المعياري Y :

$$Sy = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\bar{Y})^2} = \sqrt{\frac{21176}{8} - (51)^2} = 6.78$$

وهنا لا نحتاج لتباين Sy

ثم نعوض في معادلة "معامل أرتباط بيرسون":

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{Sx.Sy} = \frac{\frac{27416}{8} - 66 \times 51}{(9.59)(6.78)} = 0.94$$ طردي قوي

٢) معادلة خط الانحدار

$$b0 = \bar{Y} - b1\bar{X}$$

$$b1 = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{s^2x}$$

$$b1 = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{s^2x} = \frac{\frac{27416}{8} - 66 \times 51}{92} = 0.66$$

فتكون معادلة خط الانحدار على النحو التالي:

$$b0 = \bar{Y} - b1\bar{X}$$
$$= 51 - 0.66\ (66)\ =\ 7.44$$

تقدير إنفاق الأسرة التي يبلغ دخلها 700 ريال:

700 = 70 (بعشرات الريالات).

Y = b0 + b1 X

$\hat{Y} = 7.44 + 0.66\ (70) = 53.64 = 53.6$ (عشرات الريالات)

❖ إذاً يقدر إنفاق الأسرة 536 ريال.

٣) معامل أرتباط سبيرمان (الرتب)

أحيانا تكون بيانات الظاهرتين أو إحداهما بيانات غير كمية لكنها ذات طبيعة ترتيبية مثل تقديرات الطلاب في مادة من المواد (A, B, C..) أو تكون البيانات كمية لكن لا تتوفر فيها بعض الخصائص المطلوبة، فنلجأ حينئذ لاستبدال قيم البيانات بترتيبها ونستخدم ما يسمى بمعامل ارتباط الرتب لسبيرمان. ويمكن حسابه من خلال الخطوات التالية:

١) نرقم بيانات الظاهرتين في موقعيهما حسب الترتيب التصاعدي ونسمي هذه رتب القيم.
٢) نحسب فروق الرتب ومجموع مربعاتها فيكون معامل ارتباط الرتب:

$$r = 1 - \frac{6 \times \Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$$

ملاحظة.

- إذا وجد مفردتان أو أكثر لهم نفس القيمة فإن رتبهم ستكون متوسط الرتب التي كانوا سيأخذونها لو لم تكن لهم نفس القيمة.
- لمعامل سبيرمان نفس الخواص السابقة لمعامل بيرسون للارتباط.

مثال رقم (٣ – ٥):

البيانات التالية توضح تقدير عينة من ثمانية طلاب في مادتي الإحصاء والمحاسبة

تقدير الإحصاء	A	F	B	B	C	C	A	B
تقدير المحاسبة	80	90	60	60	80	70	90	60

- أوجد معامل الأرتباط ، معامل أرتباط سبيرمان (الرتب) ؟

حل مثال رقم (٣ – ٥):

X	Y	رتبة X	رتبة Y	d	d^2
A	80	7.5	5.5	2	4
F	90	1	7.5	-6.5	42.25
B	60	5	2	3	9
B	60	5	2	3	9
C	80	2.5	5.5	-3	9
C	70	2.5	4	1.5	2.25
A	90	7.5	7.5	0	0
B	60	5	2	3	9
n = 8				**0**	**84.5**

$$r = 1 - \frac{6 \times \Sigma d^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 84.5}{8(64 - 1)} = 1 - \frac{507}{504}$$

$= 1 - 1.006 = - 0.006$

الارتباط عكسي ضعيف.

لإيجاد الرتب:

- رتب الأرقام من الأكبر إلى الأصغر x: F ،C ،C ،B ،B ،B ،A ،A
- رتب الأرقام من الأكبر إلى الأصغر y: 60 ،60 ،60 ،70 ،80 ،80 ،90 ،90

الرتب d: ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨

ثم نضعها في عامود يسمى رتبة x والثانية في عامود يسمى رتبة y.

- في حالة تشابه رقمين أو أكثر:
  نجمع قيم الرتب ونقسمها على عددها، كما يوضح الجدول أعلاه.
  ١ + ٢ + ٣ = ٦ ÷ ٢ = ٢
  ثم نضع ناتج القسمة في كل خانة من خانات الرتب المتساوي أعدادها.

ولإيجاد d = رتب x – رتب y

المحاضرة السادسة
السلاسل الزمنية

١. تعريف السلسلة الزمنية:
هي مجموعة القراءات التي تأخذها ظاهرة ما عند فترات زمنية غالباً تكون متساوية وتختلف هذه الفترات حسب طبيعة الظاهرة.

٢. مكونات السلسلة الزمنية:
تتكون السلسلة الزمنية للظاهرة من العناصر الآتية:

أ. الاتجاه العام :
وهو الاتجاه الذي تأخذه السلسلة الزمنية خلال فترة طويلة من الزمن بالرغم من التذبذبات الموجودة بها.

ب. التغيرات الموسمية:
وهي التغيرات التي تتكرر بانتظام خلال فترة زمنية أقل من السنة.

ج. التغيرات الدورية :
وهي التغيرات التي تحدث في فترات زمنية أكثر من سنة.

د. التغيرات العرضية :
وهي التغيرات التي تحدث نتيجة حوادث فجائية لا تكون في الحسبان مثل الحروب والأوبئة ... الخ.

(وسنكتفي في دراستنا بحالة الخط المستقيم " الاتجاه العام ")

٣. معادلة خط الاتجاه العام:

$$\mathbf{Y = b0 + b1\ X}$$

حيث:

$$b0 = \bar{Y} - b1\bar{X}$$

$$b1 = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{s^2 x}$$

مثال رقم (١ – ٦):

الجدول التالي يبين قيمة الصادرات لأحد الدول بالمليون ريال ، في الفترة من عام 1411 إلى عام 1416 هـ.

السنة	1411	1412	1413	1414	1415	1416
قيمة الصادرات	5	4	7	6	9	10

- احسب معادلة خط الاتجاه العام ، ثم قدر قيمة الصادرات في سنة 1418 هـ ؟
- احسب القيمة النسبية (لاستبعاد أثر الاتجاه العام) عام 1414 هـ ؟

حل مثال رقم (١ – ٦):

السنوات	Y الصادرات	X الرتب	X Y	X^2 تربيع الرتب
1411	5	0	0	0
1412	4	1	4	1
1413	7	2	14	4
1414	6	3	18	9
1415	9	4	36	16
1416	10	5	50	25
n = 6	$\sum Y = 41$	$\sum X = 15$	$\sum XY = 122$	$\sum X^2 = 55$

معادلة خط الاتجاه العام :

$$\mathbf{Y = b0 + b1\ X}$$

X تمثل السنة المطلوبة ، رتبتها = السنة المطلوبة ـ سنة البداية

= 1418 - 1411 = 7 سنوات

الميل b1:

$$b1 = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{s^2 x}$$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{15}{6} = 2.5$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{41}{6} = 6.83$$

$$S^2x = \frac{\Sigma x^2}{n} - (\bar{X})^2 = \frac{55}{6} - (2.5)^2 = 2.92$$

وبالتعويض في الميل b1 :

$$b1 = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{s^2x} b = \frac{\frac{122}{6} - 2.5 \times 6.83}{2.92} = 1.12$$

المقطع b0:

$$b0 = \bar{Y} - b1\bar{X}$$

$= 6.83 - 1.12\ (2.5)$

$b0 = 4.03$

- قيمة الصادرات في 1418 هـ :

x = 7 سنوات	**b1 = 1.12**	**b0 = 4.03**

$Y = b0 + b1\ X$

$\hat{Y} = 4.03 + 1.12\ X$

$\hat{Y} = 4.03 + 1.12\ (7) = 11.87$ مليون ريال

استبعاد أثر الاتجاه العام للظاهرة:

القيمة النسبية y ، نطبق العلاقة الآتية :

قيمة y الاتجاهية عام ١٤١٤هـ:
(من المعادلة المحسوبة)

$\hat{Y} = 4.03 + 1.12\ X$

$$\frac{y}{\Upsilon} \times 100 = \frac{6}{7.39} \times 100 = 81.10\%$$

حيث:

y : القيمة الفعلية للظاهرة عام 1414

Ŷ : القيمة الاتجاهية للظاهرة عام 1414

المحاضرة السابعة

الأرقام القياسية

الأرقام القياسية:

سنكتفي هنا بالرقم القياسي للأسعار، ويعرف بأنه رقم نسبي يقيس التغير الذي يطرأ على ظاهرة أو أكثر من زمن لآخر وتعرف الفترة التي تنسب إليها فترة الأساس، والفترة التي ننسبها فترة المقارنة.

ونحصل عليه:

بقسمة أسعار السلع في فترة المقارنة على أسعار السلع في فترة الأساس ونضرب الناتج في 100

الرموز المستخدمة في إيجاد الرقم القياسي:

السعر يرمز له بالرمز	P
الكمية يرمز لها بالرمز	Q
فترة الأساس يرمز لها بالرمز	0
فترة المقارنة يرمز لها	1

وسندرس الأرقام القياسية الأربعة الآتية:

١ـ الرقم القياسي البسيط للأسعار:

$$I_S = \frac{\Sigma P1}{\Sigma P0} \times 100$$

٢ـ الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات الأساس (لاسبير):

$$I_L = \frac{\Sigma P1.Q0}{\Sigma P0.Q0} \times 100$$

٣ـ الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات المقارنة (باتش):

$$I_P \frac{\Sigma P1.Q1}{\Sigma P0.Q1} \times 100$$

٤- الرقم القياسي الأمثل للأسعار (فيشر):

$$I_F = \sqrt{I_L + I_P}$$

$$\text{فيشر} = \sqrt{\text{لاسبير} \times \text{باتش}}$$

مثال رقم (١ – ٧):
الجدول التالي يوضح الكميات لعدد من السلع في سنة 1420 ، 1422

السلعة	P0	السعر P1	Q0	الكمية Q1
	1420	1422	1420	1422
السكر	2	4	25	30
الأرز	3	5	20	25

١) احسب الرقم القياسي البسيط؟
٢) احسب رقم لاسبير؟
٣) احسب رقم باتش؟
٤) احسب رقم فيشر (الأمثل)؟

حل مثال رقم (١ – ٧):
١) الرقم القياسي البسيط:

$$I_S = \frac{\Sigma P1}{\Sigma P0} \times 100 = \frac{9}{5} \times 100 = 180\%$$

٢) الرقم القياسي المرجح بكميات الأساس (لاسبير):

P0 . Q0	P1. Q0
2 × 25 = 50	4 × 25 = 100
3 × 20 = 60	5 × 20 = 100
110	200

$$I_L = \frac{\Sigma P1.Q0}{\Sigma P0.Q0} \times 100 = \frac{200}{110} \times 100 = 181.81\%$$

٣) الرقم القياسي للاسعار المرجح بكميات سنة المقارنة (باتش):

P0 . Q1	P1. Q1
2 × 30 = 60	4 × 30 = 120
3 × 25 = 75	5 × 25 = 125
135	245

$$I_P \frac{\Sigma P1.Q1}{\Sigma P0.Q1} \times 100 = \frac{245}{135} \times 100 = 181.48\%$$

٤) الرقم القياسي الأمثل للأسعار (فيشر):

$$I_F = \sqrt{I_L + I_P} = \sqrt{181.81 \times 181.48} = 181.64\%$$

مثال رقم (٢ – ٧):

	P0	Q0	P1	Q1
السلعة	السعر 1400	الكمية 1400	السعر 1410	الكمية 1410
A	6	50	7	60
B	8	40	10	50
C	7	30	7	40

المطلوب:

١- مجموعة أسعار سنة الأساس؟
٢- مجموع أسعار سنة المقارنة؟
٣- الرقم القياسي للأسعار البسيط؟
٤- مجموع حاصل ضرب أسعار سنة المقارنة في كميات سنة الأساس؟
٥- مجموع حاصل ضرب أسعار سنة الأساس في كميات سنة الأساس؟
٦- رقم لاسبير (القياس للأسعار المرجح بكميات سنة الأساس)؟
٧- مجموع حاصل ضرب أسعار سنة المقارنة في كميات سنة المقارنة؟
٨- مجموع حاصل ضرب أسعار سنة الأساس في كميات سنة المقارنة؟
٩- رقم باتشي؟
١٠- الرقم الأمثل للأسعار (فيشر)؟

حل مثال رقم (٢ – ٧):

١) أسعار سنة الأساس تساوي: $6 + 8 + 7 = 21$

٢) أسعار سنة المقارنة تساوي: $7 + 10 + 7 = 24$

٣) الرقم القياسي للأسعار البسيط يساوي:

$$I_S = \frac{\Sigma P1}{\Sigma P0} \times 100 = \frac{24}{21} \times 100 = 114\%$$

٤) مجموع حاصل ضرب أسعار سنة المقارنة في كميات سنة الأساس يساوي:

P1 .		Q0		
7	×	50	=	350
10	×	40	=	400
7	×	30	=	210
				960

٥) مجموع حاصل ضرب أسعار سنة الأساس في كميات سنة الأساس يساوي:

P0 . Q0
$6 \times 50 = 350$
$8 \times 40 = 400$
$7 \times 30 = 210$
830

٦) رقم لاسبير (القياسي للأسعار المرجح بكميات سنة الأساس) يساوي:

$$I_L = \frac{\Sigma P1.Q0}{\Sigma P0.Q0} \times 100 = \frac{960}{830} \times 100 = 115.66\%$$

٧) مجموع حاصل ضرب أسعار سنة المقارنة في كميات سنة المقارنة يساوي:

P1 . Q1
$7 \times 60 = 420$
$10 \times 50 = 500$
$7 \times 40 = 280$
1200

٨) مجموع حاصل ضرب أسعار سنة الأساس في كميات سنة المقارنة يساوي :

P0 . Q1
$6 \times 60 = 360$
$8 \times 50 = 400$
$7 \times 40 = 280$
1040

٩) الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات سنة المقارنة (باتش) يساوي:

$$I_P \frac{\Sigma P1.Q1}{\Sigma P0.Q1} \times 100 = \frac{1200}{1040} \times 100 = 115.38\%$$

١٠) الرقم الأمثل للأسعار (فيشر) يساوي :

$$I_F = \sqrt{I_L + I_P} = \sqrt{115.38 \times 115.66} = 115.52\%$$

المحاضرة الثامنة

التحليل الإحصائي للبيانات السكانية

تعداد السكان:

يعرف تعداد السكان بأنه تسجيل لعدد الأشخاص الموجودين على قيد الحياة عند نقطة زمنية محددة، وكذلك تسجيل خصائصهم الحيوية والاقتصادية والاجتماعية في تلك النقطة.

ويتم تعداد السكان بطريقة الحصر الشامل لجميع أفراد المجتمع. وغالباً ما يتم على فترات زمنية منتظمة (كل عشرة سنوات)، لتكوين سلسلة منتظمة من البيانات تقيم الماضي وتصف الحاضر وتستخدم لتقدير المستقبل.

وأول من قام بعمل تعداد للسكان هم قدماء المصريين. وفي العصور الإسلامية الأولى برزت فكرة حصر عدد السكان لتقدير الزكاة والجهاد...الخ.

المسوحات السكانية البيئية:

ويقصد بها المسوح المتخصصة في جانب معين بالخصوبة أو الجوانب الاقتصادية أو السكانية أو التعليمية أو الصحية. أو مسوح عامة تشتمل جوانب عديدة مثل: مستوى الدخل ومستوى المعيشة، والجوانب الإسكانية والتعليمية والصحية...الخ.

الإحصاءات الحيوية:

تعتبر الإحصاءات الحيوية أهم مصدر من مصادر الإحصاءات السكانية حيث تستخدم الأساليب الإحصائية لدراسة حركة ونمو وشكل وكثافة السكان في العالم داخل حدود جغرافية معينة وتُعتبر حجر الأساس في جميع مراحل التخطيط الاجتماعي والاقتصادي والزراعي والصناعي والصحي...الخ.

تعرف الإحصاءات الحيوية بأنها تلك الإحصاءات التي تتناول الوقائع المتعلقة بحياة الفرد منذ ولادته وحتى وفاته. فهي بذلك تشمل كافة ما يتعلق بحالة السكان وتكوينهم وحركتهم والحوادث الهامة التي تقع لهم، وهذا يتمثل في تعدادات السكان وإحصاءات المواليد والوفيات والزواج والطلاق والهجرة وإحصاءات الأمراض وأسبابها.

وتخدم الإحصاءات الحيوية عدة أغراض أهمها:

١- التخطيط في جميع المجالات التعليمية والصحية والاقتصادية والاجتماعية.
٢- تنظيم وتحسين الخدمات العامة والخاصة.
٣- قياس المستوى العلمي والحضري والثقافي للمجتمع.
٤- البحث العلمي بجميع فروعه خاصة في ميادين البيئة، والطب، والاجتماع، والتعليم...الخ.
٥- المقارنات المحلية والدولية.

بعض القوانين المستخدمة في الإحصاءات الحيوية:

حساب مقياس درجة ازدحام الدولة بالسكان:

$$\text{كثافة السكان} = \frac{\text{عدد السكان في الدولة}}{\text{مساحة الدولة بالكيلومتر المربع}}$$

حساب مقياس درجة الازدحام داخل المسكن:

$$\text{كثافة السكن} = \frac{\text{عدد السكان في الدولة}}{\text{عدد حجرات المساكن}}$$

حساب مقياس يساعد على تقدير عدد السكان في غير سنوات التعداد:

$$\text{معدل الزيادة السنوية في عدد السكان} = \frac{\text{عدد السكان في سنة المقارنة} - \text{عدد السكان في سنة الأساس}}{\text{عدد السنوات}}$$

حساب معدل المواليد الخام:

$$\text{معدل المواليد الخام} = \frac{\text{عدد المواليد الأحياء خلال عام}}{\text{عدد السكان منتصف العام}} \times 100$$

حساب معدل الخصوبة العام:

$$\text{معدل الخصوبة العام} = \frac{\text{عدد المواليد الأحياء خلال عام}}{\text{عدد النساء في سن الحمل}} \times 100$$

حساب معدل المواليد:

$$\text{معدل المواليد} = \frac{\text{عدد المواليد الأحياء خلال عام}}{\text{عدد النساء المتزوجات في سن الحمل}} \times 100$$

حساب معدل الوفاة الخام:

$$\text{معدل الوفاة الخام} = \frac{\text{عدد الوفيات خلال العام}}{\text{عدد السكان منتصف العام}} \times 100$$

معدل الزيادة الطبيعية الخام:

معدل الزيادة الطبيعية الخام = معدل المواليد الخام – معدل الوفيات الخام

معدل وفيات الأطفال الرضع:

$$\frac{\text{عدد الوفيات في الأطفال الذين تقل أعمارهم عن سنة واحدة}}{\text{عدد الأطفال المولودين أحياء في نفس العام}} \times 100$$

معدل الوفيات لفئة عمرية معينة:

$$\frac{\text{عدد الوفيات خلال السنة من تلك الفئة العمرية في الدولة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة من تلك الفئة العمرية}} \times 100$$

المعدل الخام للمسجلين في المراحل التعليمية المختلفة:

$$\frac{\text{عدد المسجلين في المراحل التعليمية المختلفة}}{\text{عدد السكان الكلي}} \times 100$$

المعدل العمري للتسجيل:

$$\frac{\text{عدد المسجلين في المؤسسات التعليمية من فئة عمرية معينة}}{\text{عدد السكان في تلك الفئة العمرية}} \times 100$$

معدل الأمية الخام:

$$\text{معدل الأمية الخام} = \frac{\text{عدد الأميين من السكان من تلك الفئة}}{\text{عدد السكان من فئة معينة}} \times 100$$

معدل الأمية العمري:

$$\text{معدل الأمية العمري} = \frac{\text{عدد الأميين من السكان في فئة عمرية معينة}}{\text{عدد السكان في تلك الفئة العمرية المعينة}} \times 100$$

معدل النشاط الاقتصادي الخام:

$$\text{معدل النشاط الاقتصادي الخام} = \frac{\text{عدد الأفراد الناشطين اقتصادياً}}{\text{عدد السكان الكلي}} \times 100$$

معدل النشاط الاقتصادي العام:

$$\text{معدل النشاط الاقتصادي العام} = \frac{\text{عدد الأفراد الناشطين اقتصادياً}}{\text{عدد السكان في سن العمل}} \times 100$$

معدل الإعالة:

$$\text{معدل الإعالة} = \frac{\text{عدد السكان غير الناشطين اقتصادياً}}{\text{عدد السكان الناشطين اقتصادياً}} \times 100$$

معدل الهجرة الوافدة لمنطقة معينة:

$$\text{معدل الوفاة الخام} = \frac{\text{عدد المهاجرين الوافدين في منطقة معينة}}{\text{عدد السكان الكلي}} \times 100$$

معدل الهجرة الصافية:

$$\frac{\text{عدد المهاجرين الوافدين في منطقة معينة} - \text{عدد المهاجرين المغادرين لمنطقة معينة}}{\text{عدد السكان الكلي}} \times 100$$

الاختبار الدوري الأول

أولاً: اختر جواباً واحد فقط مما يلي باستخدام القلم الرصاص:

رقم السؤال	أ	ب	ج	د

البيانات 4 ,5 ,7 ,3 ,8 ,5				
١- الوسط الحسابي يساوي	6	5.33	4	6.5
٢- الوسيط يساوي	5	5.5	6	4.5
٣- المنوال يساوي	7	6	5	4
٤- المدى يساوي	8	5	7	4

التوزيع التكراري للإنفاق لعدد 50 أسرة هو

الفئات	5 -	15 -	25 -	35 -	45 – 55
التكرارات	5	10	11	14	10

٥- الوسط الحسابي للإنفاق يساوي	33.10	39.29	32.80	30.49
٦- المنوال للإنفاق يساوي	39.29	32.80	30.71	35.59
٧- الانحراف المعياري للإنفاق يساوي	13.15	12.66	11.09	14.01
٨- معامل الالتواء للإنفاق يساوي	-0.51	0.43	-0.43	-0.60
٩- التوزيع التكراري للإنفاق	متماثل	ملتو لليمين	ملتو لليسار	لا شيء
١٠- معامل الإنفاق يساوي	38.58%	40.25%	42.90%	37.10 %
وجد أن الوسط الحسابي لدخل هذه الأسرة يساوي 75 والانحراف المعياري للدخل يساوي 30				
١١- معامل الاختلاف للدخل يساوي	41.98%	38.33%	33.33%	40.00 %
١٢- من حيث التشتت النسبي للدخل والإنفاق	الدخل أكثر تشتت	الإنفاق أكثر تشتت	لهما نفس التشتت	لا شيء مما سبق

١٣- مقياس الموضع (النزعة المركزية) الذي يتأثر بالقيم الشاذة هو	الوسيط	الوسط الحسابي	المنوال	التباين
١٤- عدد حوادث المرور على إحدى الطرق السريعة متغير عشوائي	متصل	وصفي	منفصل	لاشيء مما سبق
١٥- لاختبار تماثل التوزيع نستخدم	معامل الالتواء	معامل الارتباط	معامل الاختلاف	المدى
١٦- أدى مجموعة من الطلاب امتحاناً في مادة الإحصاء ووجد أن قيم الوسط الحسابي والوسيط والمنوال هي 12 ، 11، 9، على الترتيب.فإن التوزيع التكراري للدراجات يكون	ملتوى لليسار	متماثل	ملتوى لليمين	لا يمكن تحديده

تكاليف الدعاية (x) لنوع من السلع وقيمة المبيعات (y) معطاة كما يلي:

x	11	5	12	4	9
y	16	12	10	12	12

الوسط الحسابي للدعاية يساوي 8.2 والوسط الحسابي للمبيعات 12.4 والانحراف المعياري للدعاية يساوي 3.19 والانحراف المعياري للمبيعات يساوي 1.96

١٧- معامل ارتباط بيرسون يساوي	0.12	0.89	0.51	-1
١٨- الارتباط بين x و y	طردي	عكسي	طردي تام	عكسي تام

إذا كان (y) تمثل قيمة صادرات المملكة العربية السعودية لدولة تونس (بعشرات الملايين) خلال الفترة 1999-2003 معطاة بالجدول

السنة	1999	2000	2001	2002	2003
الصادرات	11	16	15	18	14

إذا كان $\bar{Y} = 14.80$ ، $Sx = \sqrt{2}$ ، وأخذنا معادلة خط الاتجاه العام لهذه السلسلة الزمنية في الصورة $\hat{y} = b0 + b1\ \ X$

١٩- الوسط الحسابي يساوي	4	2	1	5
٢٠- قيمة $\sum xy$ تساوي	156	150	160	146
٢١- قيمة b1 تساوي	-0.80	1.90	0.80	-2.01
٢٢- قيمة b0 تساوي	14.01	13.20	15.29	12.80
٢٣- قيمة الصادرات المتوقعة عام 2005 يساوي	16.00	17.56	21.20	18.00
٢٤- قيمة y الاتجاهية عام 2002 تساوي	15.60	17.10	14.90	16.96
٢٥- قيمة y النسبية (لاستبعاد أثر الاتجاه العام) عام 2002 تساوي	116.90	110.15	98.79	115.38

الجدول التالي يوضح أسعار ثلاثة سلع والكميات المستهلك منها عامي 1407 ، 1410

السلع	1407		1410	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
أ	5	30	8	40
ب	8	10	12	20
ج	7	20	10	30

٢٦- الرقم التجميعي البسيط للأسعار	150 %	120 %	130 %	160 %
٢٧- الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات الأساس (لاسبير)	124.44 %	122.4%	151.4%	150 %
٢٨- الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات المقارنة (باش)	151.9%	150.9%	150 %	160 %
٢٩- الرقم القياسي الأمثل للأسعار (فيشر)	148.44 %	120 %	151.1%	150 %
٣٠- الرقم القياسي الأمثل يشير أن الأسعار	انخفضت	تضاعفت	زادت	لم تتغير

ثانياً: أختر جواباً واحداً فقط:

١) مركز الفئة هو ؟

لا شيء	D	منتصف الفئة	**C**	عرض الفئة	B	طول الفئة	A

٢) يسمى الرقم الأكثر تكراراً أو شيوعاً ؟

الانحراف المعياري	D	الوسط الحسابي	C	المنوال	**B**	الوسيط	A

٣) معامل الاختلاف هو ؟

مقياس التشتت النسبي	**D**	مقياس التشتت	C	معامل الاختلاف	B	الوسط الحسابي	A

٤) معامل الاختلاف هو ؟

الانحراف المعياري	D	مقياس التشتت	**C**	معمل الالتواء	B	تماثل التوزيع	A

٥) الآتي أحد مقاييس المركز؟

الوسط الحسابي	**D**	معامل الاختلاف	C	معامل الالتواء	B	الانحراف المعياري	A

٦) الآتي أحد مقاييس النزعة المركزية؟

معامل الاختلاف	D	التباين	C	الانحراف المعياري	B	المنوال	**A**

٧) الآتي أحد مقاييس المركز ؟

معامل الالتواء	D	معامل الاختلاف	C	الوسيط	**B**	الانحراف المعياري	A

٨) التي لا يعتبر من مقاييس المركز ؟

الانحراف المعياري	**D**	منوال	C	وسيط	B	وسط حسابي	A

٩) الآتي هو أحد مقاييس التشتت؟

المنوال	D	الوسيط	C	الوسط الحسابي	B	الانحراف المعياري	**A**

١٠) الآتي هو أحد مقاييس التشتت ؟

المنوال	D	الوسيط	C	المدى	**B**	الوسط	A

١١) الآتي هو أحد مقاييس التشتت النسبي ؟

المنوال	D	معامل الالتواء	C	الوسيط	B	معامل الاختلاف	**A**

١٢) الآتي لا يعتبر من مقاييس التشتت ؟

الوسط الحسابي	**D**	معامل الاختلاف	C	المدى	B	الانحراف	A

١٣) تدخل جميع قيم المجموعة في حساب ؟

A المنوال	B الوسيط	**C** الوسط الحسابي	D الانحراف

١٤) لا يتأثر بالقيم الشاذة ؟

A المنوال والوسيط	B المنوال	C الانحراف المعياري	D الوسط الحسابي

١٥) يتأثر بالقيم الشاذة ؟

A الوسيط	B المنوال	C الانحراف المعياري	**D** الوسط الحسابي

١٦) لا يدخل في حسابه سوى قراءة واحدة أو قراءتين من المجموعة كلها ؟

A الوسط الحسابي	**B** الوسيط	C الانحراف	D المنوال

١٧) لا يتأثر بالقراءة الشاذة ؟

A المنوال	B الانحراف	C الوسط	D معامل الاختلاف

١٨) القيمة الموجبة لمعامل الالتواء تعني أن التوزيع ؟

A متماثل	**B** ملتوي جهة اليمين	C ملتوي جهة اليسار	D لا شيء

١٩) إذا كان الوسط الحسابي أكبر من المنوال فإن التوزيع ؟

A ملتوي جهة اليمين	B ملتوي جهة اليسار	C متماثل	D لا شيء

٢٠) إذا كان المنوال أقل من الوسط الحسابي يعني التوزيع ؟

A متماثل	B ملتوي جهة اليسار	**C** ملتوي جهة اليمين	D لا شيء

٢١) إذا كان ناتج الالتواء = صفر ، فإن التوزيع ؟

A متماثل	B ملتوي جهة اليمين	C ملتوي جهة اليسار	D لا شيء

٢٢) إذا كان التوزيع متماثل والمنوال يساوي 100 فإن الوسط الحسابي ؟

A 12	**B** 10	C 9	D 8

٢٣) إذا كان التوزيع متماثل والوسط الحسابي = 8 ، فإن الوسيط ؟

A 10	**B** 8	C 9	D 7

٢٤) إذا كان ناتج الالتواء سالب فإن التوزيع ؟

A ملتوي جهة اليمين	B متماثل	**C** ملتوي جهة اليسار	D لا شيء

٢٦) إذا كان التوزيع ملتوي جهة اليسار فإن الوسط الحسابي ؟

A أقل من الوسيط	B أكبر من الوسيط	C مساوي للتوسيط	D لا شيء

٢٧) مجموع قيم وسطها الحسابي 8 وعددها 7 هو ؟

A 40	B 60	**C** 56	D 80

٢٨) تنحصر قيمة الارتباط دائماً بين ؟

A	0 , 1	B	-1 , 0	**C**	-1 , +1	D	لا شيئ

٢٩) القيمة السالبة للالتواء تعني أن الارتباط ؟

A	طردي	**B**	عكسي	C	تام	D	لا شيء

٣٠) القيمة الموجبة لمعامل الالتواء تعني أن الارتباط ؟

A	طردي	B	عكسي	C	تام	D	لا شيء

٣١) إذا كانت قيمة معامل الارتباط 1.2 هذا يعني ؟

A	الارتباط طردي	B	الارتباط عكسي	C	طردي تام	**D**	هناك خطأ

٣٢) التباين هو ؟

A	الانحراف المعياري	**B**	مربع الانحراف	C	الجزر الانحراف	D	لا شيء

٣٣) الانحراف هو ؟

A	مربع التباين	B	التباين	**C**	جزر التباين	D	جزر الانحراف

٣٤) يسمى المتغير المطلوب تقديره في معادلة خط الانحدار دائماً ؟

A	المستقبل	B	النائب	**C**	التابع	D	لا شيء

٣٥) إذا كانت قيمة الانحراف المعياري $S=\sqrt{6}$ ، فإن التباين يساوي ؟

A	36	B	1	**C**	6	D	3

٣٦) إذا كان التباين = (3) فإن الانحراف المعياري يساوي ؟

A	3	**B**	$\sqrt{3}$	C	9	D	3

٣٧) يسمى الرقم القياسي للأسعار الخاص بنسبة الأساس ؟

A	باتش	B	لاسبير	**C**	البسيط	D	الامثل فشر

٣٨) رقم لاسبير هو الرقم الخاص بكميات ؟

A	سنة المقارنة	**B**	سنة الأساس	C	البسيط	D	لا شيء

٣٩) يسمى الرقم القياسي للأسعار الخاص بسنة المقارنة ؟

A	لاسبير	**B**	باتش	C	البسيط	D	لا شيء

٤٠) يسمى الرقم الأمثل للأسعار ؟

A	باتش	B	لاسبير	**C**	فيشر	D	لا شيء

مع تمنياتي للجميع بدوام التوفيق والنجاح ،،، H.A

المحاضرة التاسعة

مبادئ الاحتمالات

مقدمة:

تلعب الاحتمالات دوراً هاماً في حياتنا اليومية، لأننا نستخدمها في قياس عدم التأكد والاحتمالات أحد فروع الرياضيات الذي يهتم بدراسة التجارب العشوائية، وتسمى التجربة عشوائية إذا كانت نتائجها غير مؤكدة، أي لا نستطيع التنبؤ بها مسبقاً.

وتنقسم نتائج التجارب من وجهة نظر الاحتمالات إلى ثلاث أنواع هي:

أ- نتائج أو حوادث مؤكدة:

وهي نتائج أو حوادث لابد من وقوعها أو حدوثها.

فمثلاً:

إذا ألقيت تفاحة في الهواء، فإنها لابد وتسقط على الأرض.

وإذا كانت الحادثة مؤكدة الوقوع فإن احتمال وقوعها = 1

ب- نتائج أو حوادث مستحيلة:

وهي نتائج أو حوادث يستحيل وقوعها أو حدوثها.

فمثلاً:

سحب كرة حمراء من صندوق لا يحتوي إلا على كرات بيضاء

وإذا كانت الحادثة مستحيلة الوقوع فإن احتمال وقوعها = صفر

ج – نتائج أو حوادث محتملة (ممكنة / غير مؤكدة).

وهي نتائج التجارب العشوائية التي لا نستطيع التنبؤ بوقوعها مسبقاً، ولكننا نستطيع باستخدام تعريف الاحتمالات أن نحسب احتمال وقوعها.

وإذا كانت الحادثة محتملة فإن احتمال وقوعها ينحصر بين **صفر** & **1**

تعريف الاحتمال:

إذا كان لدينا تجربة ما تقع بطرق عددها (n) طريقة وكان من بينها حدث معين (A) مثلاً، يقع بطرق عددها (X) طريقة [n ≥ X] . فإن احتمال وقوع الحدث (A) ويرمز له بالرمز P(X) هو:

$$P(X) = \frac{X}{n} = \frac{\text{عدد مرات ظهور الحدث } (X)}{\text{عدد الحالات الكلية } (n)}$$

مبادئ الاحتمالات:

١) قاعدة أو　　　　٢) قاعدة و

١) قاعدة (أو) ⟵ **اتحاد U**

(قاعدة الجمع للحالات المانعة والغير مانعة)

زيد　أو　عبيد

A　U　B

مانـــع	غير مانع
عندما لا يوجد تكرار (تقاطع) بين الحادثتين A و B أو $P(A \cup B) = P(A) + p(B)$	عندما يوجد تكرار بين الحادثتين A و B أو　　تقاطع $P(A \cup B) = P(A) + p(B) - P(A \cap B)$

مثال رقم (١ – ٨):

إذا ألقيت زهرة نرد مرة واحدة ، فما احتمال ظهور عدد فردي أو عدد أكبر من 5

A　　B

حل مثال رقم (١ – ٨):

احتمال إلقاء النرد { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 }　6 محاولات

A عدد فردي　{ 1 ، 3 ، 5 }　3 احتمالات

أو

B عدد أكبر من 5　{ 6 }　احتمال واحد فقط

لا يوجد تكرار مانع

أو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

مثال رقم (٢ – ٨):
إذا سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب، فما احتمال أن تكون الورقة المسحوبة عليها صورة البنت أو صورة الولد ؟

حل مثال رقم (٢ – ٨):
ورقة اللعب 52 ورقة

A صورة البنت (4) احتمالات
أو
B صورة الولد (4) احتمالات

لا تكرار
مانع

أو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52}$$

مثال رقم (٣ – ٨):
إذا ألقيت زهرة نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد فردي أو عدد يقبل القسمة على (3) هو ؟

حل مثال رقم (٣ – ٨):
احتمال إلقاء النرد { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 } 6 محاولات

A عدد فردي { 1 ، 3 ، 5 } 3 احتمالات
أو
B عدد أكبر من 5 {3 ، 6 } احتمالين

يوجد تكرار $\frac{1}{6}$
غير مانع

أو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{n} = \frac{4}{6}$$

مثال رقم (٤ – ٨):
إذا ألقيت زهرة نرد، ما احتمال:
١) ظهور عدد زوجي؟
٢) ظهور عدد أكبر من (2)؟
٣) ظهور عدد زوجي أو عدد اكبر من (2)؟

حل مثال رقم (٤ – ٨):
احتمال إلقاء النرد { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 } 6 محاولات
١) ظهور عدد زوجي:

{ 2 ، 4 ، 6 } 3 احتمالات $= \frac{3}{6}$

٢) ظهور عدد أكبر من (2):

{ 3 ، 4 ، 5 ، 6 } 4 احتمالات $= \frac{4}{6}$

٣) ظهور عدد زوجي أو عدد أكبر من (2):

A عدد زوجي { 2 ، 4 ، 3 } 3 احتمالات

أو

B عدد أكبر من 2 {3 ، 4 ، 5 ، 6 } 4 احتمالات

يوجد تكرار غير مانع $\frac{2}{6}$

أو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

مثال رقم (٥ – ٨):

إذا ألقيت عملة معدنية مرة واحدة ، فما هو احتمال ظهور الصورة أو كتابة؟

ظهور الصورة $= \frac{1}{2}$

ظهور الكتابة $= \frac{1}{2}$

ظهور صورة أو كتابة $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

٢) قاعدة (و) ⟵ تقاطع ∩

قاعدة الضرب للاحتمالات المستقلة والغير مستقلة

تتميز باللفظ (و) (∩) والقاعدة الضرب

مستقلة

غير مستقلة

أولاً: قاعدة الضرب للأحداث المستقلة:

يقال أن الحدثان A و B حدثان مستقلان إذا كان وقوع الحدث الأول لا يؤثر على وقوع الحدث الثاني.

$$P(A \cap B) = P(A) . P(B)$$

مثال رقم (٦ – ٨):

ما احتمال ظهور الصورة والكتابة في رميتين لعملة معدنية ؟

حل مثال رقم (٦ – ٨):

رمية أولى صورة A

لا تتأثر و مستقلان

رمية ثانية كتابة B

$$P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

مثال رقم (٧ – ٨):

ما احتمال ظهور واحد و واحد و واحد في ثلاث رميات لنرد ؟

ضرب

حل مثال رقم (٧ – ٨):

I في الأولى

II في الثانية

III في الثالثة

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

ملاحظة: في حالة أعطي في المثال نسبتين: أي نسبة تمثل حادثة، ونسبة تمثل حادثة أخرى، فعليك أن تعرف أن هذه الأحداث مستقلة.

- لو طلب الاثنين، كلاهما، (و): أي أن تعوض الأول × الثاني.
- لو طلب ايهما أو أحدهما على الأقل: الناتج يكون {1 - الأول × الثاني}.

نجاح أحدهما على الأقل : 1 – فشل الأول × فشل الثاني

فشل أحدهما على الأقل : 1 – نجاح الأول × نجاح الثاني

مثال رقم (٨ – ٨):

إذا كان احتمال نجاح الطالب في مادة الاحصاء هو 0.8 ، وكان احتمال نجاح الطالب في مادة المحاسبة هو 0.7 ، اخذت أحدى الحادثتين فاحسب احتمال :

١) نجاح الطالب في المادتين ؟

٢) فشل الطالب في المادتين ؟

٣) نجاح الطالب في إحدى المادتين على الأقل ؟

٤) فشل الطالب في إحدى المادتين على الأقل ؟

حل مثال رقم (٨ – ٨):

إحصاء	محاسبة
نجاح 0.8	نجاح 0.7
فشل 0.2	فشل 0.3

١) نجاح الطالب في المادتين :

$= 0.8 \times 0.7 = 0.56$

٢) فشل الطالب في المادتين :

$= 0.2 \times 0.3 = 0.06$

٣) نجاح الطالب في إحدى المادتين على الأقل :

1 – (فشل الأول × فشل الثاني)

$1- (0.2 \times 0.3)$

$1 - 0.06 = 0.94$

٤) فشل الطالب في إحدى المادتين على الأقل :

1 – (نجاح الأول × نجاح الثاني)

$1- (0.8 \times 0.7)$

$1 - 0.56 = 0.44$

ثانياً : قاعدة الضرب للاحتمالات الغير مستقلة:

يقال أن الحدثان A و B حدثان غير مستقلان ، إذا كان وقوع الحدث الأول يؤثر في وقوع الحدث الثاني.

$$P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B / A)$$

مؤثر

و

احتمال شرط

يعني وقوع B بشرط وقوع A أولاً

مثال رقم (٩ – ٨):

صندوق به خمسة كرات منها 4 بيضاء و 6 حمراء، إذا سحبت كرتان ما احتمال:

١) أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء، بدون إرجاع ؟
٢) أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء، مع الإرجاع ؟
٣) أن تكون الكرتان من نفس اللون، بدون إرجاع ؟
٤) أن تكون الكرتان من نفس اللون، مع الإرجاع ؟

حل مثال رقم (٩ – ٨):

١) كرتان بيضاء وحمراء ، بدون إرجاع:

$$\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{24}{90}$$

٢) كرتان بيضاء وحمراء، مع الإرجاع:

$$\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{24}{100}$$

٣) كرتان من نفس اللون، بدون إرجاع:

الثانية حمراء و الأولى حمراء أو الثانية بيضاء و الأولى بيضاء

$$\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}+\frac{6}{10}=\frac{5}{9}$$

$$\frac{12}{90}+\frac{30}{90}=\frac{42}{90}$$

٤) كرتان من نفس اللون، مع إرجاع:

الثانية حمراء و الأولى حمراء أو الثانية بيضاء و الأولى بيضاء

$$\frac{4}{10}\times\frac{4}{10}+\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}$$

$$=\frac{16}{100}+\frac{36}{100}=\frac{52}{100}$$

المحاضرة العاشرة

التوزيعات الاحتمالية

١- المتغير العشوائي:

يرافق نتائج التجربة العشوائية مقدار يسمى "المتغير العشوائي" وهذا المقدار يأخذ قيماً مختلفة حسب نتيجة التجربة العشوائية.

فمثلاً:

عند إلقاء زهرة طاولة (نرد) مرة واحدة، التجربة هنا عشوائية، ناتج التجربة هي الأرقام التي تظهر على السطح العلوي للزهرة.

المقدار: الذي يرافق نتائج هذه التجربة والذي يسمى المتغير العشوائي، ويرمز له بالرمز (X)

يمكن أن يكون: 1، 2 ، 3 ، .... ، 6

أي أن س يمكن أن تأخذ: 1، 2 ، 3 ، .... ، 6

(أ) المتغير العشوائي المنفصل:

يقال أن المتغير العشوائي "س" منفصلاً إذا كان يأخذ قيماً صحيحة فقط تنتمي إلى مجموعة محدودة أو معدودة.

مثل:

عدد أفراد الأسرة ، متغير منفصل لأنه يأخذ القيم : 1،2،3

(ب) المتغير العشوائي المستمر:

يقال أن المتغير العشوائي "س" مستمراً إذا كان يأخذ جميع القيم الصحيحة والكسرية في مدى تغيره، أو كان ينتمي إلى مجموعة غير محدودة أو معدودة.

مثل:

طول الطالب متغير مستمر لأنه يمكن أن يأخذ قيم صحيحة وكذلك قيم كسرية.

٢- التوزيع الاحتمالي

التوزيع الاحتمالي المنفصل:

يكون فقط في حالة الأحداث المستقلة والغير مستقلة.

إذا كانت (X) متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم

X_1 ، X_2 ، .... ، X_n

$P(X_1)$, $P(X_2)$ …….. $P(X_n)$

المحاضرة الحادية عشر

بعض التوزيعات الاحتمالية

حالة الأحداث المستقلة:

أولاً: توزيع ذي الحدين:

إذا كان لدينا تجربة تتكرر (n) مرة ، وكان احتمال ظهور حدث ما مرة واحدة هو (P) واحتمال عدم ظهور الحدث مرة واحدة هو (q)] بشرط أن $P + q = 1$]

فان احتمال ظهور الحدث (X) مرة من بين الـ (n) مرة، يتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية:

$$P(X) = {}^{n}C_{x} \; .P^{x} \; .q^{n-x}$$

$X = 0 \;,\; 1 \;,\; 2 \;,\; \ldots\ldots\ldots \; n$

وحتى يكون هذا التوزيع احتمالياً لابد أن يكون:

$$P(X) = {}^{n}C_{x} \; .P^{x} \; .q^{n-x} \quad = 1$$

ويلاحظ أن هذا التوزيع منفصل ، يستخدم في حالة الأحداث المستقلة ويتوقف على قيمة الاحتمال (P) .

خصائص التوزيع:

١) متوسط التوزيع = القيمة المتوقعة = الوسط الحسابي

ميو $\mu = n \times p$

٢) التباين سيجما تربيع $\sigma^2 = n . p . q$

٣) الانحراف المعياري سيجما $\sigma = \sqrt{n . p . q}$

وهذه الخصائص يمكن إيجادها مباشرة من المسألة، حتى قبل حساب التوزيع الاحتمالي.

ما هو احتمال في وجود نسبة و عدد:

شرح النظرية (بطريقة مبسطة)

أ) النسبة:

أبيض أو أسود $\qquad$ أبيض + أسود = 1 = 100%

أبيض	أسود	ذكور	إناث	متزوج	أعزب
20%	80%	30%	70%	40%	60%

النسبة

نسبة مطلوبة P $\qquad$ نسبة غير مطلوبة q

ب) العدد :

عدد محاولات دراسة الظاهرة $\qquad$ (n)

الاحتمالات الوارد حدوثها $\qquad$ $X = 0 , 1 , 2 , \ldots\ldots\ldots n$

فانه يتبع ذات الحدين بالمعادلة (القانون) :

نسبة (احتمال)

$$\mathbf{P(X) = {}^{n}C_{x} \ .P^{n} \ .q^{n-x}}$$

حيث:

n هي عدد ممارسات دراسة الظاهرة.
X هي الاحتمالات الوارد حدوثها.
P هي النسبة المطلوب دراستها.
q هي النسبة الغير مطلوب دراستها.
C التوافيق.

بشطر أن:

١) أي احتمال $\qquad$ $P(X) \geq 0$

٢) مجموع الاحتمالات $\qquad$ $\sum P(X) = 1$

$$0 \leq P(X) \leq 1$$

أهم شيء على الإطلاق

طريقة تحديد القيمة العددية للاحتمال المطلوب (X)

مثال رقم (١ – ١٠):

لو أن عدد الاحتمالات $n = 7$

الاحتمالات الوارد حدوثها $X = 0 , 1 , 2, 3, 4 , 5 , 6 , 7$

١) التوزيع الاحتمالي :

$P(x=0), p(x=1), p(x=2), p(x=3), p(x=4), p(x=5), p(x=6), p(x=7) = 1$

٢) الجميع :

$P(x = 7) \longleftarrow p(x = n)$

٣) بالضبط (3) منهم:

$p(x = 3)$

٤) أقل من (2):

$p(x < 2) = p(x = 0) + p(x = 1)$

٥) أكبر من (5):

$P(x > 5) = p(x = 6) + p(x = 7)$

٦) على الأكثر (2): (أي أقل أو يساوي 2)

$P(x \leq 2) = P(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 2)$

٧) على الأقل (2): (أي أكثر أو تساوي 2)

$P(x \geq 2) = p(x=2) + p(x=3) + p(x=4) + p(x=5) + p(x=6) + p(x=7)$

ملاحظة: عندما يكون المطلوب كبير كما هو في المثال رقم (7) أعلاه، نستخدم قاعدة

المجموع – [البيان السهل]

$$1 - [\, p(x = 0) + p(x = 1) \,]$$

مثال رقم (٢ – ١٠):

إذا كانت نسبة الطلاب المتزوجين (20%)، أخذت عينة من (3) طلاب فاحسب احتمال:

١) أن يكون جميع الطلاب عزاب ؟
٢) احتمال وجود (2) من الطلاب عزاب ؟
٣) احتمال وجود طالب واحد على الأكثر من المتزوجين ؟
٤) احتمال وجود طالب واحد على الأقل من المتزوجين ؟
٥) متوسط التوزيع التباين والانحراف المعياري لعدد الطلاب المتزوجين ؟

حل مثال رقم (٢ – ١٠):

النسبة

متزوج عازب

20% = **0.2** **P**

80% = **0.8** **q**

العدد $n = 3$

الاحتمالات الوارد حدوثها $X = 0 , 1 , 2 , 3$

المعادلة:

$$\mathbf{P (X) = {}^{n}C_{x} \; .P^{x} \; .q^{n-x}}$$

$$P (X) = {}^{3}C_{x} \; (0.8)^{x} \; (0.2)^{3-x}$$

١) احتمال جميع الطلاب عزاب:

$$P (X= 3) = {}^{3}C_{3} \; (0.8)^{3} \; (0.2)^{0}$$

$$= 0,512$$

٢) احتمال وجود (2) طلاب من العزاب :

$$P (X= 2) = {}^{3}C_{2} \; (0.8)^{2} \; (0.2)^{1}$$

$$= 0,384$$

٣) احتمال وجود طالب واحد على الأكثر من المتزوجين :

$$P(X) \quad = {}^{3}C_{x}\ (0.2)^{x}\ (0.8)^{3-x}$$

$$P(X \le 1) = p(x=0) + p(x=1)$$

$$= {}^{3}C_{0}\ (0.2)^{0}(0.8)^{3} + {}^{3}C_{1}\ (0.2)^{1}\ (0.8)^{2}$$

$$= 0{,}512 + 0.384$$

$$= 0.896$$

٤) احتمال وجود طالب واحد على الأقل من المتزوجين :

$$P(X \ge 1) = p(X=1) + p(X=2) + p(X=3)$$

$$= 1 - p(X=0)$$

$$= 1 - 0.512$$

$$= 0.488$$

ملاحظة : في هذه الحالة ، وبما أن لدينا ناتج $P(X=0)$ ، نستخدم قاعدة:

المجموع – [البيان السهل]

$$\mathbf{1 - [\,p(x=0)\,]}$$

٥) متوسط التوزيع، والتباين، والانحراف المعياري للمتزوجين:

ميو $\mu = n \times p$

$$= 3\,(0.2) = 0.6$$

سيجما تربيع $\sigma^{2} = n \cdot p \cdot q$

$$= 3\,(0.2)\,(0.8) = 0.48$$

سيجما $\sigma \quad = \sqrt{n\ .p\ .q}$

$$= \sqrt{3(.02)(0.8)}$$

$$= 0.69$$

مثال رقم (٣ – ١٠):

إذا كانت نسبــة الوحدات الفاخرة في إنتاج أحد المصانع هــي $\frac{3}{5}$ ، اختيــرت عينـة مــن (4) وحدات، فاحسب احتمال :

١) عدم وجود أي وحدات من النوع الفاخر؟
٢) وجود وحدة واحدة من النوع الفاخر ؟
٣) وجود وحدة واحدة على الأكثر من النوع الفاخر ؟
٤) أن تكون جميع الوحدات من النوع المعيب ؟
٥) متوسط التوزيع والانحراف المعياري لعدد الوحدات الفاخرة ؟

حل مثال رقم (٣ – ١٠):

ما هو احتمال في وجود نسبة وعدد ← ذات الحدين.

النسبة

$\frac{3}{5}$ فاخر 0.6 P

معيب 0.4 q

العدد $n = 4$

الاحتمالات الوارد حدوثها $X = 0 , 1 , 2 , 3 , 4$

المعادلة :

$$P (X) = {}^{n}C_{x} \; .P^{x} \; .q^{n-x}$$

$$P (X) = {}^{4}C_{x} \; (0.6)^{x} \; (0.4)^{4-x}$$

١) احتمال عدم وجود أي وحدات فاخرة :

$$P (X= 0) = {}^{4}C_{0} \; (0.6)^{0} \; (0.4)^{4}$$

$$= 0,0256$$

ملاحظة: طريقة إيجاد المعادلة بالآلة الحاسبة:

اتبع الخطوات التالية:

^{y}x	0.4	×	^{y}x	0.6	×	0	nCr	4
أو			أو					
^			^					

٢) احتمال وجود وحدة واحدة فاخرة:

$$P(X=1) = {}^4C_1\ (0.6)^1\ (0.4)^3$$

$$= 0,1536$$

٣) احتمال وجود واحدة على الأكثر فاخرة:

$$P(X \leq 1) = p(x=0) + p(x=1)$$

$$= 0,0256 + 0.1536$$

$$= 0.1792$$

٤) احتمال وجود جميع الوحدات من النوع المعيب:

$$P(X) = {}^4C_x\ (0.4)^x\ (0.6)^{4-x}$$

$$P(X=0) = {}^4C_0\ (0.4)^4\ (0.6)^0$$

$$= 0,0256$$

٥) متوسط التوزيع ، والانحراف المعياري للمتزوجين:

ميو $\mu = n \times p$

$$= 4\,(0.6) = 2.4$$

سيجما $\sigma = \sqrt{n\ .p\ .q}$

$$= \sqrt{2.4 \times 0.4}$$

$$= 0.98$$

ثانياً: توزيع بواسون / ما هو احتمال في وجود:

أما معدل في وحدة الزمن ← توزيع بواسون
أو يطلب في المسألة، معدل يتبع توزيع بواسون

يسمى المعدل (λ) لمدا

والاحتمالات الممكنة $X = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{X!}$$

حيث :

X هي العدد الاحتمالي المطلوب

! مضروب العدد، مثال:

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$3! = 3 \times 2 \times 1$
$2! = 2 \times 1$
$1! = 1$
$0! = 1$

$(\text{عدد})^{\text{صفر}} = 1$

كيفية إيجاد (!) الضرب بالآلة:

| 5 | SHIFT | x^{-1} | = | 120 |

$e^{-\lambda}$ تعني e^{-2} e^{-3} e^{-4} حسب المعطى من المسألة،
$= 0.018 \text{ ، } 0.4978 \text{ ، } 0.135$

وبالآلة:

| SHIFT | in | (-) | 2 | = |

خصائص توزيع بوسون

١) متوسط التوزيع = القيمة المتوقعة = الوسط الحسابي $\mu = \lambda$

٢) التباين $\sigma^2 = \lambda$

٣) الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\lambda}$

مثال رقم (٤ – ١٠):
إذا كانت الحوادث الشهرية التي حدثت على إحدى الطرق السريعة تتبع توزيع بواسون بمعدل حادثين (2) ، فاحسب احتمال :

١) عدم حدوث أي حادثة ؟
٢) حدوث حادثتين (2) ؟
٣) حدوث حادث واحد على الأكثر ؟
٤) حدوث حادث واحد على الأقل ؟
٥) متوسط التوزيع والتباين والانحراف المعياري ؟

علماً بأن $e^{-2} = 0.135$ ، $e^{-3} = 0.25$

حل مثال رقم (٤ – ١٠):

$\lambda = 2 \quad , \quad X = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots \infty$

$$P(x) = \frac{\lambda^x . e^{-2}}{X\,!} = \frac{2^x . e^{-2}}{X\,!} = \frac{2^2 (0.135)}{X\,!}$$

X هي عدد الحوادث

١) عدم وجود أي حادث:

$$P(x = 0) = \frac{2^0 (0.135)}{0\,!} = 0.135$$

٢) حدوث حادثتين (2) :

$$P(x = 2) = \frac{2^2 (0.135)}{2\,!} = 0.135$$

٣) حدوث حادثة واحدة على الأكثر:

$P(x \leq 1) = p(0) + p(1)$

$$= 0.135 + \frac{2^1 .(0.135)}{1\,!}$$

$$= 0.135 + 0.27 = 0.405$$

٤) حادثة واحدة على الأقل : (واحد فأكثر) :

$P(x \geq 1) = p(1) + p(2) + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \infty$

مستحيل

$1 - p(0)$

$= 1 - 0.135 = 0.865$

٥) حدوث أكثر من حادثة :

$P(x > 1) = p(2) + p(3) + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \infty$

مستحيل

$1 - [\ 0.135 + 0.27\ ]$

$= 1 - 0.405 = 0.595$

٦) متوسط التوزيع والتباين والانحراف المعياري :

$\mu = \lambda = 2$

التباين $\sigma^2 = \lambda = 2$

الانحراف $\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2} = 1.41$

مثال رقم (٥ – ١٠):

إذا كانت الزلازل تقع في دول جنوب شرق أسيا بمعدل زلزال واحد كل سنة ، فاحسب احتمال :

١) عدم حدوث أي زلزال ؟
٢) حدوث زلزالين على الأقل ؟
٣) حدوث زلزال واحد على الأكثر ؟
٤) متوسط التوزيع والتباين والانحراف المعياري خلال سنتين ؟

علماً بأن $e^{-1} = 0.368$

حل مثال رقم (٥ – ١٠):

$\lambda = 1 \quad , \quad X = 0, 1, 2, 3, 4 \dots\dots \infty$

$$P(x) = \frac{\lambda^x . e^{-2}}{X\ !} = \frac{1^x . e^{-2}}{X\ !} = \frac{1^x\ (0.368)}{X\ !}$$

X هي عدد الزلازل

١) عدم حدوث أي زلزال:

$$P(x = 0) = \frac{1^0 (0.368)}{0!} = 0.368$$

٢) حدوث زلزالين على الأقل : (أثنين فأكثر):

$$P(x \geq 2) = p(2) + \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \infty$$

مستحيل

$$1 - p(0) + p(1)$$

$$1 - [0.368 + \frac{1^0.(0.368)}{0!}] =$$

$$1 - [0.368 + 0.368]$$

$$1 - 0.736 = 0.264$$

٣) حدوث زلزال واحد على الأكثر:

$$P(x \leq 1) = p(0) + p(1)$$

$$0.368 + 0.368 = 0.736$$

٤) متوسط التوزيع والتباين والانحراف المعياري خلال سنتين:

بما أن : كل سنة : $\mu = \lambda = 1$

إذاً : كل سنتين : $\mu = \lambda = 2$

التباين $\sigma^2 = \lambda = 2$

الانحراف $\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2} = 1.41$

مثال رقم (٦ – ١٠):
إذا كـان معـدل وصـول البـواخر إلـى ميناء جدة يتبـع توزيـع بواسـون بمعـدل (3)، بواخر، فاحسب احتمال :

١) عدم وصول أي باخرة ؟
٢) حدوث حادث واحد على الأكثر ؟
٣) حدوث حادث واحد على الأقل ؟
٤) حدوث أكثر من حادثة ؟
٥) متوسط التوزيع والتباين والانحراف المعياري ؟

علماً بأن $e^{-2} = 0.135$ ، $e^{-3} = 0.05$ ، $e^{-4} = 0.018$

حل مثال رقم (٦ – ١٠):

$\lambda = 3 \quad , \quad X = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 \ldots\ldots . \infty$

$$P(x) = \frac{\lambda^{x} . e^{-2}}{X\ !} = \frac{3^{x} . e^{-3}}{X\ !} = \frac{3^{x}\ (0.05)}{X\ !}$$

X هي عدد الحوادث

١) عدم وجود أي حادث:

$$P(x = 0) = \frac{3^{0}(0.05)}{0\,!} = 0.05$$

٢) حدوث حادثة واحدة على الأكثر:

$P (x \leq 1) = p (0) + p (1)$

$$= 0.05 + \frac{3^{1}(0.05)}{1\,!}$$

$= 0.05 + 0.15 = 0.20$

٣) حادثة واحدة على الأقل : (واحد فأكثر):

$P (x \geq 1) = p (1) + p (2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \infty$

مستحيل

$1 - p (0)$

$= 1 - 0.05 = 0.95$

٤) حدوث أكثر من حادثة :

$P (x > 1) = p (2) + p (3) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \infty$

مستحيل

$1 - [\ 0.05 + 0.15\ ]$

$= 1 - 0.2 = 0.8$

٥) متوسط التوزيع و التباين و الانحراف المعياري:

$\mu = \lambda = 3$

التباين $\sigma^2 = \lambda = 3$

الانحراف $\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{3} = 1.73$

مثال رقم (٧ – ١٠):

إذا علمت أن $e^{-4} = 0.018$ و x متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون:

١) فإن متوسط التوزيع μ ؟

A	0	**B**	4	C	3	D	2

٢) التباين التوزيع ي σ^2 ؟

A	4	B	- 4	C	1.67	D	0.018

٣) الانحراف المعياري ؟

A	2	B	4	C	-4	D	0.018

٤) احتمال عدم حدوث أي حادث بالنسبة x ؟

A	0.018	B	2	C	-4	D	13.5

حل مثال رقم (٧ – ١٠):

$\boxed{\lambda}$

$e^{-4} = 0.018$

$\lambda = 4$

$e^{-\lambda}$

$$\frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{X\ !}$$

$\mu = \lambda = 4$

$$= \frac{4^0 \times (0.018)}{0!} = 0.018$$

$\sigma^2 = \lambda = 4$

$\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{4}$

التوزيع الاحتمالي المتصل:

عند دراستنا للتوزيع الاحتمالي المنفصل، ذكرنا أن المتغير العشوائي المنفصل (X) يأخذ قيم صحيحة فقط، وأن هناك احتمالاً يرافق كل قيمة من قيم المتغير (X).

أما في حالة المتغير العشوائي المتصل، فإن (X) تأخذ جميع القيم الصحيحة والكسرية من مدى التغير.

فمثلاً:

X = (صفر ، 1) نجد أن (x) تأخذ عدد لا نهائي من القيم حيث (x) يمكن أن = 0, ….,1 ……,2……,3……9

- ما هو احتمال في وجود توزيع طبيعي ؟
- في وجود المعالم التالية ، متوسط التوزيع (μ) والانحراف المعياري (σ) ؟

[أوزان – أطوال – درجات – أعمار – مسافات .... الخ]

الاحتمال المطلوب

x

بالتحويل من رقم طبيعي لا نستطيع قياس مساحته (x) إلى رقم جديد قياسي (Z).

وهذا المتغير المستمر يمثل بيانياً بمنحنى :

وأن المساحة أسفل هذا المنحنى = 1

أي أن المساحة أسفل المنحنى = مجموع الاحتمالات للمتغير (X) = 1

ثالثاً: التوزيع الطبيعي (المعتدل):

مقدمة:

هو توزيع مستمر يأخذ شكل منحنى متماثل ذو قيمة واحدة ويمتد طرفاه إلى ما لا نهاية.

وقد وجد أن معظم التوزيعات مثل الأطوال – الأعمار ... الخ، تأخذ شكلاً قريباً من المنحنى الطبيعي.

ملاحظة: ولصعوبة حل المسائل الإحصائية بطريقة التوزيع الطبيعي العادي (المعتدل)، لن يقرر في المنهج الحل بهذه الطريقة، بل باستخدام طريقة أبسط، وأكثر سهولة، وهي "طريقة التوزيع الطبيعي القياسي".

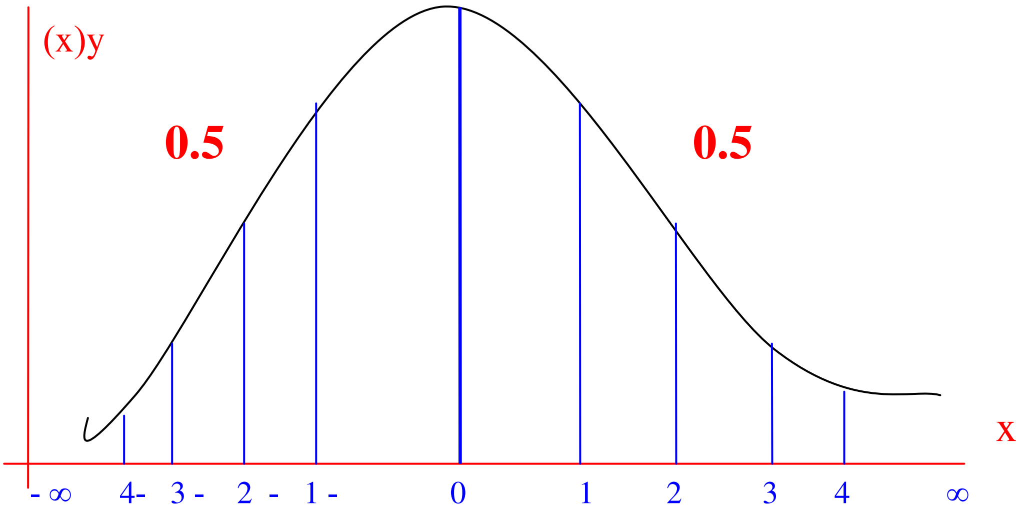
التوزيع الطبيعي القياسي:

بالتحويل من رقم طبيعي لا نستطيع قياس مساحته (x) إلى رقم جديد قياسي (Z).

البداية

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \pm 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

بالتحويل من رقم طبيعي لا نستطيع قياس مساحته (x) إلى رقم جديد قياسي (Z).



الشكل للتوزيع الطبيعي (القياسي)

البداية

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \pm 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

أولاً / نترجم القياس إلى مساحة من الجدول.

طريقة تحديد المساحة الاحتمالية المطلوب تحديدها :

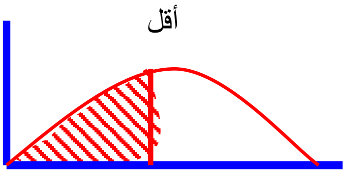
أولاً / بناءاً على الإشارات والاتجاه :

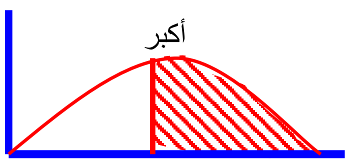
+	**يمين**	**أكبر من**	**يمين**
-	**يسار**	**أقل من**	**يسار**

أ) إذا كان هناك قيمة واحدة لـ (Z):

أكيد الإجابة فقط 0.5 (أو مساحة **Z** -0.5) (أو مساحة **Z** + 0.5)

١) إذا كانت **Z** = 0 ، أكيد الإجابة = 0.5





٢) إذا كانت Z = + عدد أكبر من يمين ، إذا كانت Z = - عدد أقل من يسار
يمين يمين يسار يسار

<u>اتحاد</u>

مساحة (Z) — 0.5

إذا كانت Z = + 1.5 أكبر من يمين ، إذا كانت Z = - 1.5 أقل من يسار
يمين يمين يسار يسار

<u>اتحاد</u>

مساحة (1.5) — 0.5

---

٣) إذا كانت Z = + عدد أقل من يسار ، إذا كانت Z = - عدد أكبر من يمين
يمين يسار يسار يمين

<u>اختلاف</u>

مساحة (Z) + 0.5

إذا كانت Z = + 1.64 أقل من يسار ، إذا كانت Z = - 1.64 أكبر من يمين
يمين يسار يسار يمين

<u>اختلاف</u>

مساحة (1.64) + 0.5

ب) إذا كان هناك قيمتين لـ (Z):

١) إذا كانت **Z1** = 0 ، ± عدد = **Z2**

تكون الإجابة عبارة عن مساحة الكشف فقط عن العدد

Z1 = 0   Z2 = 2   Z1 = -2   Z2 = 0

الإجابة مساحة الكشف لـ (2)

---

٢) Z1 = 0   Z2 = 2   Z1 = -2   Z2 = 0
يمين يمين يسار يسار

<u>اتحاد</u>

نطرح المساحة الكبيرة – المساحة الصغيرة

إذا كانت Z1 = + 1   Z2 = 2 ، إذا كانت Z1 = - 1.1   Z2 = -2

<u>اتحاد</u>

مساحة الكشف الكبيرة – مساحة الكشف الصغيرة

٣) إذا كانت $Z1 = +$ عدد ، إذا كانت $Z2 = -$ عدد

اختلاف

نجمع مساحة الكشف الأولى + مساحة الكشف الثانية

إذا كانت $Z1 = + 1.5$ ، إذا كانت $Z2 = - 2.5$

اختلاف

نجمع 2.5 + 1.5

جدول التوزيع الطبيعي القياسي

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2518	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2342	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3168	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4014
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4279	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4758	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4754	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4811	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4952	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.5	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
4.0	0.4999									

مثال رقم (٨ – ١٠):

إذا كانت أعمار البطاريات تتبع توزيع طبيعي ومتوسط قدره (80) ساعة وانحراف معياري قدره (10) ساعات، أخذت بطارية عشوائياً ، فاحسب احتمال:

١) أن يزيد العمر عن 80 ساعة ؟
٢) أن يقل العمر عن 65 ساعة ؟
٣) أن يزيد العمر عن 105 ساعة ؟
٤) أن يقل العمر عن 95 ساعة ؟
٥) أن يزيد العمر عن 65 ساعة ؟
٦) أن يكون العمر ما بين 60 إلى 80 ساعة ؟
٧) أن يكون العمر بين 90 إلى 105 ساعة ؟
٨) أن يكون العمر بين 65 إلى 105 ساعة ؟

حل مثال رقم (٨ – ١٠):

المتوسط μ = 80   الانحراف المعياري σ = 10

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-80}{10}$$

١) احتمال أن يزيد العمر عن 80 ساعة: x = 80

$$Z=\frac{X-80}{10}=\frac{80-80}{10}=0$$

من جدول
التوزيع
الطبيعي

فقط   = 0.5

٢) احتمال أن يقل العمر عن 65 ساعة: x = 65

$$Z=\frac{X-80}{10}=\frac{65-80}{10}=1.5$$

من جدول
التوزيع
الطبيعي

ـ يسار ، أقل يسار ، = اتحاد ـ

0.5 – 0.4332 = 0.0668

٣) احتمال أن يزيد العمر عن 105 ساعة: x = 105

$$Z=\frac{X-80}{10}=\frac{105-80}{10}=2.5$$

+ يمين ، يزيد يمين ، = اتحاد ـ

0.5 – 0.4938 = 0.0062

٤) احتمال أن يقل العمر عن 95 ساعة: x = 95

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{95 - 80}{10} = 1.5$$

+ يمين ، أقل يسار ، = اختلاف +

0.5 + 0.4332 = 0.9332

٥) احتمال أن يزيد العمر عن 65 ساعة: x = 65

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{65 - 80}{10} = -1.5$$

ـ يسار ، يزيد يمين ، = اختلاف +

0.5 + 0.4332 = 0.9332

٦) احتمال أن يكون العمر مابين 60 إلى 80 ساعة: x2 = 80 ، x1 = 60

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{60 - 80}{10} = -2$$

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{80 - 80}{10} = 0$$

بما أن أحد الناتجين يساوي صفر ، إذاً نكتفي بالكشف عن مساحة الأخر وتكون هذا هو الناتج

مساحة الكشف (2)
= 0.4772

٧) احتمال أن يكون العمر مابين 90 إلى 105 ساعة : x2 = 105، x1 = 90

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{90 - 80}{10} = +1$$

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{105 - 80}{10} = +2.5$$

اتحاد الاشارات = سالب

مساحة الرقم الصغير ـ مساحة الرقم الكبير

2.5		1		
0. 4938	-	0.3413	=	0.1525

٨) احتمال أن يكون العمر مابين 65 إلى 105 ساعة : x2 = 105، x1 = 65

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{65 - 80}{10} = -1.5$$

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{105 - 80}{10} = +2.5$$

اختلاف الاشارات = موجب

مساحة الرقم الصغير + مساحة الرقم الكبير

1   2.5

0.9270 = 0.4332 + 0.4938

مثال رقم (٩ – ١٠):

مدينة بها 5000 أسرة ، إذا كان استهلاكهم من المياه يتبع توزيع طبيعي عن وسط قدره 800 جالون ، وانحراف معياري قدره 200 جالون ، أخذت أسرة عشوائياً ، فاحسب احتمال :

١) أن يزيد الاستهلاك عن 800 جالون ؟
٢) أن يقل متوسط الاستهلاك عن 500 جالون ؟
٣) أن يقل متوسط الاستهلاك عن 1100 جالون ؟
٤) أن يتراوح الاستهلاك ما بين 800 إلى 1100 جالون ؟
٥) عدد الأسر التي تتراوح ما بين 600 إلى 1100 جالون ؟

حل مثال رقم (٩ – ١٠):

المتوسط μ = 800   الانحراف المعياري σ = 200

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 800}{200}$$

١) احتمال أن يزيد الاستهلاك عن 800 جالون: x = 800

$$Z = \frac{X - 800}{200} = \frac{800 - 800}{200} = 0$$

فقط = 0.5

٢) أن يقل متوسط الاستهلاك عن 500 جالون: x = 500

$$Z = \frac{X - 800}{200} = \frac{500 - 800}{200} = -1.5$$

- يسار ، أقل يسار ، اتحاد = –

0.5 - 0.4332 = 0.0668

٣) أن يقل متوسط الاستهلاك عن 1100 جالون: x = 1100

$$Z=\frac{X-800}{200}=\frac{1100-800}{200}=+1.5$$

+ يمين ، أقل يسار ، = اختلاف +

0.5 + 0.4332 = 0.9332

٤) أن يتراوح الاستهلاك مابين 800 إلى 1100 جالون: x1 = 800 ،x2 = 1100

$$Z_1=\frac{X-800}{200}=\frac{800-800}{200}=-0$$

$$Z_2=\frac{X-800}{200}=\frac{1100-800}{200}=1.5$$

مساحة الكشف (1.5)

= 0.4332

٥) عدد الأسر الذين يتراوح استهلاكهم ما بين 600 إلى 1100 :

أولاً العدد الإجمالي = 5000

ثانياً النسبـــــــــــة = الاحتمال

x1 = 600 ، x2 = 1100

$$Z_1=\frac{X-800}{200}=\frac{600-800}{200}=-1$$

$$Z_2=\frac{X-800}{200}=\frac{1100-800}{200}=+1.5$$

مساحة الرقم الصغير + مساحة الرقم الكبير

1   1.5

0.7745 = 0.3413 + 0.4332

عددهم = النسبـــة × العدد الإجمالي

= 0.7745 × 5000 = 3872 أسرة.

ملاحظة: عندما يطلب عدد:

١) نوجد النسبة (الاحتمال).

٢) نضرب النسبة في العدد الإجمالي تساوي العدد المطلوب.

المحاضرة الثانية عشر

العينات وتوزيعات المعاينة

(١) مقدمة:

يتكون المجتمع الإحصائي من مجموعة من المفردات التي يهمنا دراستها وهذا المجتمع له بعض المعالم أو الخصائص مثل متوسط المجتمع M وانحرافه المعياري σ ونسبة صفة معينة في المجتمع P

وبدلاً من دراسة جميع مفردات المجتمع ، فإننا نختار عينة ممثلة له ، ثم نقوم بدراسة مفردات العينة وحساب بعض المقاييس منها مثل : متوسط العينة X وانحرافها المعياري σ ونسبة صفة معينة في العينة n .

(٢) توزيعات المعاينة:

نفرض أن لدينا مجتمع حجمه (n) مفردة، اخترنا منه عينة حجمها (n) وحسبنا وسطها الحسابي وليكن (X_1) ، ثم عينة ثانية لها نفس الحجم (n) وحسبنا وسطها الحسابي وليكن (X_2) ، ثم عينة ثالثة لها نفس الحجم (n) وحسبنا وسطها الحسابي وليكن (X_3) ، وهكذا بالنسبة لجميع العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع.

سيتوفر لدينا عدد كبير من **القيم للوسط الحسابي**، لا نتوقع أن تكون كلها متساوية، وعلى ذلك يمكن النظر إلى هذا المقياس (الوسط الحسابي) على أنه متغير عشوائي له **توزيع احتمالي** ويسمى هذا المجتمع الجديد: **مجتمع المتوسطات الحسابية أو توزيع المعاينة.**

مجتمع المتوسطات الحسابية للعينات وبعض خصائصه

نظرية النهاية المركزية:

نظرية (١):

إذا كان لدينا مجتمع مفرداته (X) يتبع توزيعاً احتمالياً متوسطه (M)، وانحرافه المعياري، سحبنا منه عينات حجم كل منها (n) مفردة، وحسبنا الوسط الحسابي لكل عينة.

فإن الوسط الحسابي للعينات ($\bar{X}$) يتبع توزيعاً طبيعياً

متوسطه $M = (X) M :$

وانحرافه المعياري $\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma}} = (X) \sigma :$

وهذا يتطلب تحويل المتوسط المطلوب (X) من توزيع طبيعي عادي إلى طبيعي قياسي بالتحويلة الآتية:

نظرية (١):

في وجود متوسط التوزيع μ ، والانحراف المعياري σ

Z الإجابة

عادي | سوبر

١) عندما لا توجد عينة.
٢) أو العينة تكون واحدة فقط.

نستخدم Z عادي

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

١) عندما يوجد عينة حجمها (n) ، وتكون أكبر من واحد.

نستخدم Z سوبر

$$Z = \frac{x - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ثم نوجد المساحة بنفس الطريقة

مثال رقم (١ – ١١):

إذا كانت أوزان طلاب الجامعة تتبع توزيع طبيعي لمتوسط قدره 50 كجم ، وانحراف معياري قدره 10 كجم ، أخذت عينة من 25 طالب ، فاحسب احتمال :

١) أن يزيد متوسط الوزن في العينة عن 48 كجم ؟
٢) أن يتراوح بين متوسط متوسط الأوزان ما بين 48 إلى 55 كجم ؟

حل مثال رقم (١ – ١١):

المتوسط μ = 50 الانحراف المعياري σ = 10

$$Z = \frac{X - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{X - 50}{\frac{10}{\sqrt{25}}} = \frac{X - 50}{2}$$

١) احتمال أن يزيد متوسط الوزن عن 48: x = 48

$$Z = \frac{X - 50}{2} = \frac{48 - 50}{2} = -1$$

- يسار ، يزيد يمين ، = اختلاف +

0.5 + 0.3413 = 0.8413

٢) احتمال أن يتراوح مابين 48 إلى 55 : x2 = 55 ، x1 = 48

$$Z_1 = \frac{X - 50}{2} = \frac{48 - 50}{2} = -1$$

$$Z_2 = \frac{X - 50}{2} = \frac{55 - 50}{2} = +2.5$$

مساحة الرقم الصغير + مساحة الرقم الكبير

1   2.5

0.8351 = 0.3413 + 0. 4938

مثال رقم (٢ – ١١):

إذا كانت أطوال الطلاب تتبع توزيع طبيعي، بمتوسط قدره 168 سم، وانحراف معياري قدرة 6 سم:

أولاً : اختير طالب عشوائي ، فاحسب احتمال :

١) أن يزيد طوله عن 168 سم ؟

٢) أن يتراوح ما بين 105 إلى 171 سم ؟

ثانياً : أخذت عينة من 36 طالب ، فاحسب احتمال :

١) أن يقل متوسط الطول عن 170 سم ؟

حل مثال رقم (٢ – ١١):

المتوسط μ = 168   الانحراف المعياري σ = 6

$$Z = \frac{X - \mu}{6} = \frac{X - 168}{6}$$

أولاً:

١) احتمال أن يزيد الطول عن 168 سم: x = 168

$$Z = \frac{X - 168}{6} = \frac{168 - 168}{6} = 0$$

فقط 0.5 =

٢) احتمال أن يتراوح مابين 165 إلى 171 : x2 = 171 ، x1 = 165

$$Z_1 = \frac{X - 168}{6} = \frac{165 - 168}{6} = -0.5$$

$$Z = \frac{X - 168}{6} = \frac{171 - 168}{6} = +0.5$$

مساحة الرقم الصغير + مساحة الرقم الكبير

0.5   0.5

0.3830 = 0.1915 + 0. 1915

ثانياً :

١) أخذت عينة من 36 :

n = 36

$$Z = \frac{X - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{X - 168}{\frac{6}{\sqrt{36}}} = \frac{X - 168}{1}$$

أن يقل متوسط الطول عن 170 :

x = 170

$$Z = \frac{X - 800}{1} = \frac{170 - 168}{1} = -2$$

+ يمين ، أقل يسار ، = اختلاف +

0.5 + 0.4772 = 0.9772

التوزيع الاحتمالي للنسبة في العينة:

نظرية (٢):

ما هو احتمال في وجود نسبة وعدد

الإجابة ذات الحدين

عادي

١- عندما يكون العدد أقل من 30.

نستخدم ذات الحدين عادي

نسبة مطلوبة p — نسبة غير مطلوبة q

n

x = 0 , 1 , …….. n

$p(x) = {}^{n}C_{x} \, . \, P^{x} . \, q^{n-x}$

متوسط التوزيع:

$\mu = n \, . \, p$

التباين:

$\sigma^2 = n \, . \, p \, . \, q$

الانحراف:

$\sigma = \sqrt{n.p.q}$

سوبر

١- عندما يكون العدد 30 أو أكثر.

نحولها من ذات الحدين إلى طبيعي

$\mu = n \, . \, p$

$\sigma = \sqrt{n.p.q}$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

مثال رقم (٣ – ١١):
إذا كانت نسبة الإطارات التالفة 20 % ، أخذت عينة من 400 إطار، فاحسب احتمال وجود 70 إطار على الأكثر تالف :

ملحوظة: على الأكثر	=	اقل من أو يساوي	يسار
على الأقل	=	أكبر من أو يساوي	يمين

حل مثال رقم (٣ – ١١):

تالف = 20 % = 0.2 P ، سليم = 80 % = 0.8 q

$\mu = n . p = 400 \times 0.2 = 80$

$$\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{400 \times 0.2 \times 0.8} = 8$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 80}{8}$$

70 إطار على الأكثر (أقل أو يساوي) : x = 70

$$Z = \frac{X - 80}{8} = \frac{70 - 80}{8} = -1$$

- يسار ، أقل يسار ، = اتحاد –

0.5 - 0.3413 = 0.1587

مثال رقم (٤ – ١١):
إذا كانت نسبة الصناديق المعيبة 0.01 % ، في أحد إنتاج المصانع ، أخذت عينة من 1000 صندوق ، فاحسب احتمال وجود 15 صندوق على الأقل معيب :

حل مثال رقم (٤ – ١١):

معيب = 0.01 p ، سليم = 0.99 q

$\mu = n . p = 1000 \times 0.01 = 10$

$$\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{1000 \times 0.01 \times 0.99} = 3.15$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 10}{3.15}$$

15 صندوق على الأقل (أكثر أو يساوي) : x = 15

$$Z = \frac{X - 10}{3.15} = \frac{15 - 10}{3.15} = -1$$

+ يمين ، أكبر يمين ، = اتحاد –

0.5 - 0.4441 = 0.0559

المحاضرة الثالثة عشر

تقدير معالم المجتمع بفترات الثقة (العينات الكبيرة)

مقدمة:

الهدف من دراسة أي مجتمع هو إيجاد أو تقدير بعض معالمه أو خصائصه مثل متوسط المجتمع M وانحرافه المعياري σ ، ونسبة صفة معينة في المجتمع P . وهذه المعالم غالباً ما تكون مجهولة ونريد معرفة قيمتها.

التقدير واختبار الفروض للنسبة

أعمل تقدير ثقة قدر النسبة في المجتمع P بدرجة ثقة

إما 95 % = قيمة جدولية 1.96

أو 99 % = قيمة جدولية 2.58

العينات:

المعطى في السؤال يكون العينة (n) و النسبة في العينة (r)

بإحدى الطريقتين :

١) إما نسبة جاهزة:

أخذت عينة من 50 مصباح ووجد أن نسبة المصابيح التالفة في العينة هي 10%

أي أن:

n = 50

r = 0.1

٢) أو يكون المعطى عينة و عدد الشاهدات في العينة:

$$\text{النسبة في العينة} \quad r = \frac{\text{عدد الشاهدات}}{\text{العينة}}$$

---

١) n العينة

٢) r النسبة في العينة

٣) انحراف النسبة في العينة $\sigma r = \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}$

$$\mathbf{P = r \pm} \begin{matrix} \%\,95 \\ 1.96 \\ \text{أو} \\ 2.58 \\ \%\,99 \end{matrix} \times \boldsymbol{\sigma\, r}$$

مثال رقم (١ – ١٢):

إذا علمت أن P = 0.3 و n = 25 و r = 0.15

- فأوجد Z المحسوبة في اختبار الفرض ، وإذا علمت أن الفئة الجدولية = 1.96

حل مثال رقم (١ – ١٢):

$$Z = \frac{r - p}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} = \frac{0.15 - 0.3}{\sqrt{\frac{0.3(1-0.3)}{25}}} = \frac{-0.15}{0.09} = -1.67$$

بما أن Z المحسوبة، أقل من Z الجدولية.
إذاً القرار قبول، نقبل H0 فرض العدم، ونرفض H1 فرض البديل.

ملاحظة:

عندما يكون المعطى في السؤال : النسبة في العينة P والعدد n والنسبة في العينة r

اختير الفرض فإن النسبة P = نسبة محددة
أو هل النسبة = فيـــه محددة على مستوى معنوية 5% أو 1%
1.96 2.58

١)
صياغة الفرض النسبة = P = H0 فرض العدم

صياغة الفرض النسبة ≠ P = H1 فرض البديل

٢)
إجراء الإحصاء Z المحسوبة Z المستخدمة في اختبار الفرض

$$\boxed{Z = \frac{r - p}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}}$$

٣) اتخاذ القرار
إذا كان Z المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية القرار رفض، نرفض H0 فرض العدم، ونقبل الفرض البديل H1

إذا كان Z المحسوبة أقل من القيمة الجدولية القرار قبل، نقبل H0 فرض العدم، ونرفض H1 الفرض البديل.

مثال رقم (٢ – ١٢):

إذا علمت أن النسبة في العينة $r = 0.25$ ، $n = 100$ ، والقيمة الجدولية = 2.58

قدر بدرجة ثقة لـ P

حل مثال رقم (٢ – ١٢):

$$\sigma r = \frac{\sqrt{r(1-r)}}{n} = \frac{\sqrt{0.25(1-0.25)}}{100} = 0.04$$

$$P = r \pm 2.58 \times \sigma r$$

$$P = 0.25 \pm 2.58\,(0.04)$$

$$P = 0.25 \pm 0.11$$

$$0.14 \leq P \leq 0.35$$

مثال رقم (٣ – ١٢):

إذا علمت في عينة من 50 مصباح، وجد أن عدد المصابيح المعيبة 10 مصابيح.

فأعمل قدرة ثقة للنسبة المعيب في الإنتاج بدرجة ثقة 99%

حل مثال رقم (٣ – ١٢):

$$P = r \pm 2.58 \times \sigma r$$

$$n = 50$$

عدد العينة المعيب 10

$$r = \frac{\text{عدد الشواهد}}{\text{العينة}} = \frac{10}{50} = 0.2$$

$$\sigma r = \frac{\sqrt{r(1-r)}}{n} = \frac{\sqrt{0.2(1-0.2)}}{50} = 0.06$$

$$P = r \pm 2.58 \times \sigma r$$

$$P = 0.2 \pm 2.58\,(0.06)$$

$$P = 0.2 \pm 0.15$$

الطرح

الجمع

$$0.05 \leq P \leq 0.35$$

مثال رقم (٤ – ١٢):

في عينة من 100 بطارية وجد أن نسبة البطاريات التي بها عيوب هو 20% ، فأعمل ثقة لنسبة البطارية التي بها عيوب بدرجة ثقة 95%

حل مثال رقم (٤ – ١٢):

$$P = r \pm 1.96 \times \sigma r$$

$$n = 100$$

نسبة العينة المعيب 20 %

$$r = \frac{\text{عدد الشواهد}}{\text{العينة}} = \frac{20}{100} = 0.2$$

$$\sigma r = \frac{\sqrt{r(1-r)}}{n} = \frac{\sqrt{0.2(1-0.2)}}{100} = 0.04$$

$$P = r \pm 1.96 \times \sigma r$$

$$P = 0.2 \pm 1.96\,(0.04)$$

$$P = 0.12 \pm 0.28$$

$$0.05 \leq P \leq 0.35$$

تتراوح النسبة ما بين 0.12 إلى 0.28

المحاضرة الرابعة عشر

اختبار الفروض الإحصائية

مقدمة:

قد يدعي باحث أن متوسط دخل الأسرة الشهري في مدينة ما هو 6000 ريال.

وللتأكد من ذلك نختار عينة عشوائية من سكان هذه المدينة و نحسب الوسط الحسابي للدخل الشهري في العينة، ولنفرض أنه بلغ 6300 ريال.

فهل الفرق بين متوسط العينة (6300) ريال، وادعاء الباحث (6000) ريال يرجع إلى مجرد الصدفة أم أن متوسط الدخل في المدينة أكثر من 6000 ريال؟

للإجابة على هذا السؤال نتبع الخطوات الآتية، سواء بالنسبة لاختبار فرض معين حول متوسط المجتمع M أو اختبار فرض معين حول النسبة في المجتمع P.

أولاً : للمتوسط (μ) متوسط المجتمع العام

أولاً: التقدير:

قدر متوسط (يقصد متوسط المجتمع) بدرجة ثقة 95% 99% أي أن **μ** مجهولة

1.96 2.58

ولإيجاد المتوسط **μ** يجب الحصول على الوسط الحسابي **X** والانحراف المعياري **σ**

الوسط الحسابي : $\bar{X} = \dfrac{\Sigma x^2 f}{\Sigma f}$ للبيانات المبوبة.

الوسط الحسابي: $\bar{X} = \dfrac{\Sigma x}{n}$ للبيانات الغير مبوبة

وانحرافه المعياري : $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma x^2 f}{\Sigma f} - (\bar{X})^2}$ للبيانات المبوبة.

وانحرافه المعياري : $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma x^2}{n} - (\bar{X})^2}$ للبيانات الغير المبوبة.

حيث n تمثل مجموع التكرار $\sum f$

95%

$$\mu = X \pm 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2.58

99%

أعلى بالجمع ≤ μ ≤ أدنى بالطرح

ملاحظة:

إذا طلب منك: اختبار الفرض القائل بأن متوسط المجتمع العام يساوي قيمة محددة، يقصد بمتوسط المجتمع العام (μ)، إذاً المتوسط معلوم.

1% 5%

أو : هل تقبل الادعاء بأن متوسط المجتمع العام يساوي قيمة محددة 1.96 أو 2.58

إذاً μ معلوم: أي يجب الحصول على الوسط الحسابي والانحراف المعياري.

١)

صياغة الفرض (صادق) القيمة المعطاة = μ = H0 فرض العدم

صياغة الفرض (كاذب) القيمة المعطاة ≠ μ = H1 فرض البديل

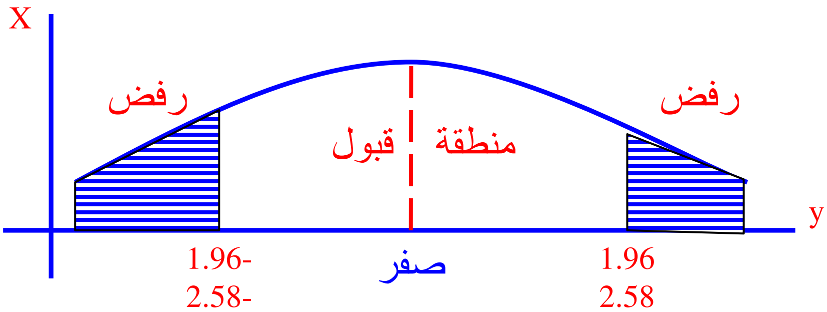
٢)

إجراء الإحصاء فإن Z السوبر $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ المحسوبة

٣) اتخاذ القرار

إذا كان Z المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية القرار رفض، نرفض H0 فرض العدم، ونقبل الفرض البديل H1

إذا كان Z المحسوبة أقل من القيمة الجدولية القرار قبل، نقبل H0 فرض العدم، ونرفض H1 الفرض البديل.



مستوى المعنوية = 0.05

مستوى المعنوية = 0.01

مثال رقم (١ – ١٣):

الجدول التالي يوضح التوزيع التكراري لعينة من أرباح الشركات بملايين الريالات:

الأرباح	3-	5-	7-	9-	11-	المجموع
عدد الشركات	10	20	40	20	10	100

وإذا علمت أن $\sum xf = 800$ و $\sum x^2 f = 6880$ و $\sum f = 100$ و $n = 100$

١) قدر متوسط الأرباح للشركات بدرجة ثقة 95%

٢) أخذ الفرض القائل بأن متوسط أرباح مجموع الشركات هو 7 ملايين ريال على مستوى معين 1%

٣) هل تؤيد الادعاء بأن متوسط أرباح الشركات هو 7 ملاين ريال على مستوى معين 1%

حل مثال رقم (١ – ١٣):

فئات الأرباح	f تكرار الشركات	X مركز الفئة	X f	X^2 f
3-	10	4	40	160
5-	20	6	120	720
7-	40	8	320	2560
9-	20	10	200	2000
11-	10	12	120	1440
----------	100	-----------	800	6880

الوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f} = \frac{800}{100} = 8$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 f}{\Sigma f} - (x)^2} = \sqrt{\frac{6880}{100} - (8)^2} = 2.19$$

١) متوسط الأرباح للشركات بدرجة ثقة 95% أي 1.96

$$\mu = \bar{X} \pm 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu = 8 \pm 1.96 \times \frac{2.19}{\sqrt{100}}$$

$8 + 0.43 = 8.43$

8 ± 0.43

$8 - 0.43 = 7.57$

$7.57 \leq \mu \leq 8.43$

الحد الأدنى   الحد الأعلى

٢) أخذ الفرض القائل بأن متوسط أرباح الشركات (7) مليون ريال عند مستوى معين 1%

١- صياغة الفرض

فرض العدم $H0 = \mu = 7$

فرض البديل $H1 = \mu \neq 7$

٢- إجراء الإحصاء

$$Z = \frac{X - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{8 - 7}{\frac{2.19}{\sqrt{100}}} = \frac{1}{0.219} = 4.56$$

٣- اتخاذ القرار (الجدولية) 1% 2.58

Z المحسوبة تساوي 4.56 أكبر من الجدولية 2.58

القرار رفض، نرفض H0 فرض العدم، ونقبل H1 فرض البديل على مستوى 1%

الاختبار الدوري الثاني

أولاً: اختر جواباً واحد فقط مما يلي باستخدام القلم الرصاص:

رقم السؤال	أ	ب	ج	د
١- إذا كان الحدثان A,B لايؤثر وقوع أحدهما على الأخر فإنهما حدثان	مؤكدان	مستقلان	متماثلان	مانعان
٢- توزيع احتمالي للاحداث النادرة	المنتظم	ذوالحدين	بواسون	الطبيعي
٣- احتمال ظهور رقم يقبل القسمة على 2 و 3 عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{6}$
٤- احتمال وقوع حادثين مانعين معا يساوي	1	0	0.5	غير ذلك
٥- التوزيع الطبيعي القياسي من التوزيعات الاحتمالية	الملتوية	المنفصلة	المتماثلة	غير ذلك
إذا كان احتمال نجاح طالب ما في أحد المواد هو 0.7 فإذا اخترنا ثلاث طلاب عشوائيا فإن:				
٦- احتمال نجاح طالب واحد	0.234	0.189	0.342	0.654
٧- احتمال رسوب جميع الطلاب	0.227	0.723	0.342	0.027
٨- احتمال نجاح طالب على الأكثر	0.216	0.234	0.189	0.027
٩- متوسط عدد الطلاب الراسبين	3.4	2.6	2.1	0.9
١٠- الانحراف المعياري لعدد الطلاب الناجحين	0.79	0.97	1.97	0.63
إذا أرادت الجامعة تكوين فريق من طالبين لتمثيلها في احدى المسابقات من بين 3 طلاب تخصصاتهم علمية و 4 طلاب تخصصاتهم أدبية فإن:				
١١- احتمال أن يكون تخصص الطالبين أدبي	$\frac{6}{42}$	$\frac{36}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$
١٢- احتمال أن يكون تخصص الأول علمي والثاني أدبي	$\frac{6}{42}$	$\frac{36}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$
١٣- احتمال أن يكون تخصص أحدهما علمي والثاني أدبي	$\frac{6}{42}$	$\frac{36}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$
١٤- احتمال أن يكون تخصص واحد منهما على الاقل أدبي	$\frac{6}{42}$	$\frac{36}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$
إذا كان الدخل اليومي للعاملين في أحد المصانع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 80 ريال وانحراف معياري 20 ريال ، فإذا اختير أحد العمال عشوائياً فإن:				
١٥- احتمال أن يزيد دخله عن 60 ريال هو	0.8413	0.1587	0.1359	0.3456
١٦- 68 % تقريبا من العاملين تتراوح أجورهم بين	130,150ريال	60,100ريال	50, 70ريال	30, 100ريال
١٧- احتمال أن يزيد دخله عن 100 ريال	0.8413	0.1587	0.1359	0.3456
١٨- إذا كان عدد العاملين في هذا المصنع هو 200 عامل فإن عدد العاملين الذين يزيد دخله عن 60 ريال	160	168	179	186

بعض القيم الجدولية من التوزيع الطبيعي القياسي	$P(0 < Z < 2) = 0.4772$ $P(0 < Z < 1) = 0.3413$	$P(0 < Z < 1.5) = 0.4332$ $P(0 < Z < 3) = 0.4987$ $P(0 < Z < 1.96) = 0.4750$

ثانياً: أختر جواباً واحداً فقط:

رقم السؤال	أ	ب	ج	د

ألقيت زهرة نرد مرة واحدة :				
١- ما هو احتمال ظهور عدد فردي	5/6	3/6	3/7	8/10
٢- ما هو احتمال ظهور عدد أكبر من 2	1/12	5/6	4/6	2/6
٣- ما هو احتمال ظهور عدد فردي أو عدد أكبر من 2	5/6	9/36	2/4	3/5
إذا كان احتمال إصابة الطائرة لأحد أهداف العدو هو $\frac{3}{4}$ ، فإذا أغارت ثلاث طائرات على أهداف العدو/ ما هو:				
٤- احتمال أن يصيب الهدف طائرة واحدة	36/64	25/64	16/64	9/64
٥- احتمال أن لا يصيب الهدف أي طائرة	1/64	25/64	15/64	10/64
٦- احتمال أن يصيب الهدف طائرة واحدة على الأكثر	10/64	40/64	30/64	20/64
٧- متوسط عدد الطائرات التي تصيب الهدف	22/4	14/4	9/4	5/4
٨- الانحراف المعياري لعدد الطائرات التي تصيب الهدف	3/4	3/7	3/8	3/10
إذا كانت أطوال مجموعة من الشباب يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 170 سم وانحراف معياري 5سم ، تم اختيار شاب عشوائياً ، أوجد :				
٩- احتمال أن يقل طوله عن 172 سم	0.6560	0.6554	0.6500	0.6540
١٠- احتمال أن يزيد طوله عن 180 سم	0.0528	0.0428	0.0228	0.0328
١١- احتمال أن ينحصر طوله بين 175سم، 185 سم	0.1574	0.1480	0.1580	0.1474

بعض القيم الجدولية من التوزيع الطبيعي القياسي	$P(0 \le Z \le 0.4) = 0.1554$ $P(0 \le Z \le 3) = 0.4987$ $P(0 \le Z \le 0.65) = 0.2422$	$P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$ $P(0 \le Z \le 0.44) = 0.1700$ $P(0 \le Z \le 2) = 0.4772$

مع تمنياتي للجميع بدوام التوفيق والنجاح ،،، H.A

القوانين المستخدمة

الباب الثالث

مقاييس النزعة المركزية

١) الوسط الحسابي:

البيانات الغير مبوبة:

$$\overline{X} = \frac{\Sigma x}{n}$$

البيانات المبوبـــــة:

$$\overline{X} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f}$$

٢) الوسيط:

البيانات الغير مبوبة:

$$\text{الوسيط } M = \frac{\text{مجموع المفردتان الوسطيان}}{2}$$

البيانات المبوبـــــة:

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - fm}{fl} \times h$$

و L هي الفئة المقابلة لأعلى تكرار.
و n مجموع التكرارات.
و f m القيمة السابقة للتكرار المتجمع الصاعد لترتيب الوسيط.
و f L تكرار فئة الوسيط.
و h طول الفئة.

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{n}{2}$$

ويمكـن إيجـاد الوسـيط بالقانون التالي:

$$M = L + \frac{C_1 - C_2}{C_3} \times h$$

L : الحد الأدنى لفئة الوسيط.
C_1 : ترتيب الوسيط.
C_2 : (ت.م.ص) التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط.
C_3 : التكرار الأصلي لفئة الوسيط.
h : طول الفئة.

٣) المنوال:

البيانات المبوبـــــة :

$$D = L + \frac{d1}{d1 + d2} \times h$$

و L هي الفئة المنوالية المقابلة لأعلى تكرار.
و d_1 الفرق ، حاصل طرح أعلى تكرار ــ التكرار السابق له.
و d_2 الفرق ، حاصل طرح أعلى تكرار ــ التكرار اللاحق له.
و h طول الفئة أي مقدار الزيادة من فئة إلى أخرى.

القوانين المستخدمة

الباب الرابع
مقاييس التشتت

١) الانحراف المعياري

البيانات الغير مبوبة:

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

البيانات المبوبـــــة:

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 f}{\Sigma f} - (\bar{X})^2}$$

٢) معامل الاختلاف:

مقياس التشتت النسب

$$C.V = \frac{S}{\bar{X}} \times 100\%$$

٣) معامل الالتواء:

معامل الالتواء الأول :

$$SK_1 = \frac{\bar{X} - D}{S}$$

معامل الالتواء الثاني :

$$SK_2 = \frac{3(\bar{X} - M)}{S}$$

القوانين المستخدمة

الباب الخامس
الارتباط والانحدار

١) معامل ارتباط بيرسون (الخطي)
البيانات الغير مبوبة
و البيانات المبوبة

$$r = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{Sx.Sy}$$

٢) معادلة خط الانحدار

$$Y = b_0 + b_1 X$$

ويمكننا حساب b_1 و b_0 بالمعادلتين التاليتين:

معامل الانحدار ، الميــل :

$$b_1 = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{S^2 X}$$

ثابــت الانحدار ، المقطع :

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X}$$

٣) معامل ارتباط سبيرمان (الرتب):

$$r = 1 - \frac{6 \times \Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$$

القوانين المستخدمة

الباب السابع
الأرقام القياسية

١) الرقم القياسي البسيط للأسعار:

$$I_s = \frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_2} \times 100$$

٢) الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات الأساس (لاسبير):

$$I_L = \frac{\Sigma P_1 . Q_0}{\Sigma P_1 . Q_0} \times 100$$

٣) الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات المقارنة (باتـش):

$$I_P = \frac{\Sigma P_1 . Q_1}{\Sigma P_0 . Q_1} \times 100$$

٤) الرقم القياسي الأمثل للأسعار (فيشر):

$$I_F = \sqrt{I_L + I_P}$$

فيشر = √(لاسبير × باتش)

القوانين المستخدمة

الاحتمالات

١) توزيع ذات الحدين:

$$P(X) = {}^{n}C_{x}\ .P^{x}\ .q^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\ldots,n$$

خصائص توزيع ذات الحدين:

١) متوسط التوزيع = القيمة المتوقعة = الوسط الحسابي

$$\mu = n \times p$$

٢) التباين

$$\sigma^{2} = n\ .p\ .q$$

٣) الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{n\ .p\ .q}$$

٢) توزيع بواسون:

$$P(x) = \frac{\lambda^{2}.e^{-\lambda}}{X\ !}$$

حيث $x = 0,1,2,\ \ldots\ \infty$

X هي العدد الاحتمالي المطلوب

! مضروب العدد

خصائص توزيع بوسون

١) متوسط التوزيع = القيمة المتوقعة = الوسط الحسابي

$$\sigma = \lambda$$

٢) التباين

$$\sigma = \lambda^{2}$$

٣) الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

٣) التوزيع الطبيعي:

١)عندما لا توجد عينة.

٢) أو العينة تكون واحدة فقط.

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

نظرية (١):

في وجود متوسط التوزيع μ ، والانحراف المعياري σ

الإجابة **Z**

عادي	سوبر
عندما لا توجد عينة. أو العينة تكون واحدة فقط.	عندما يوجد عينة حجمها (n)، وتكون أكبر من واحد.
نستخدم Z عادي	نستخدم Z سوبر
$Z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$	$Z = \dfrac{x - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

نظرية (٢):

ما هو احتمال في وجود نسبة وعدد

الإجابة **ذات الحدين**

عادي

عندما يكون العدد أقل من 30.

نستخدم ذات الحدين عادي

نسبة مطلوبة p ، نسبة غير مطلوبة q

n

$x = 0 , 1 , \ldots\ldots.. n$

$p(x) = {}^{n}C_{x} \, . \, P^{x} . \; q^{n-x}$

متوسط التوزيع:

$\mu = n \, . \, p$

التباين:

$\sigma^2 = n \, . \, p \, . \, q$

الانحراف:

$\sigma = \sqrt{n.p.q}$

سوبر

عندما يكون العدد 30 أو أكثر.

نحولها من ذات الحدين إلى طبيعي

$\mu = n \, . \, p$

$\sigma = \sqrt{n.p.q}$

$Z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$

القوانين المستخدمة

مبادئ الاحتمالات

١) قاعدة أو ٢) قاعدة و

١) قاعدة (أو) ← **اتحاد U**

(قاعدة الجمع للحالات المانعة و الغير مانعة)

زيد **أو** عبيد

A U B

مانع / غير مانع

عندما لا يوجد تكرار (تقاطع) بين الحادثتين A و B	عندما يوجد تكرار بين الحادثتين A و B
أو	تقاطع أو
$P(A \cup B) = P(A) + p(B)$	$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - P(A \cap B)$

٢) قاعدة (و) ← **تقاطع ∩**

قاعدة الضرب للاحتمالات المستقلة والغير مستقلة

تتميز باللفظ (و) (∩) و**القاعدة الضرب**

مستقلة / غير مستقلة

أولاً : قاعدة الضرب للاحداث المستقلة:

يقال أن الحدثان A و B حدثان مستقلان إذا كان وقوع الحدث الأول لا يؤثر على وقوع الحدث الثاني.

$P(A \cap B) = P(A) . P(B)$

ثانياً : قاعدة الضرب للاحتمالات الغير مستقلة:

يقال أن الحدثان A و B حدثان غير مستقلان ، إذا كان وقوع الحدث الأول يؤثر في وقوع الحدث الثاني.

مؤثر

و

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A)$$

احتمال شرط

يعني وقوع B بشرط وقوع A أولاً

القوانين المستخدمة

العيـنـــات

العينات، التقدير واختبار الفروض:

لمتوسط المجتمع العام: (μ)

95%

$$\mu = x \pm 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2.58

99%

أعلى بالجمع ≥ μ ≥ أدنى بالطرح

اختبار الفروض الإحصائية:

$$Z = \frac{r - p}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}$$

انحراف النسبة في العينة

$$\sigma r = \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}$$

% 95

1.96

$$P = r \pm \quad \times \sigma r$$

أو

2.58

% 99

مراجع المذكرة

- د. جلال الصياد وآخرون، الإحصاء لطلاب الدراسات الاقتصادية والإدارية، دار حافظ للنشر، ٢٠٠٧م.
- أعضاء هيئة التدريس بقسم الإحصاء بجامعة الملك عبدالعزيز، مبادئ الإحصاء للتخصصات النظرية، خوارزم، ١٤٢٩هـ.
- أعضاء هيئة التدريس بقسم كلية الاقتصاد والإدارة بجامعة الملك عبدالعزيز، التطبيقات الاقتصادية والإدارية لمادة مبادئ التحليل الإحصائي، ١٤٢٩هـ.
- د. محمد نوري، الإحصاء والقياس، ٢٠٠٧م.
- محاضرات لأساتذة في قسم الإحصاء.
- د. بكري عساس، محاضرات مسجلة في مادة مبادئ الإحصاء، جامعة الملك عبدالعزيز.