المحاضره التاسعه / المتغيرات العشوائيه المتصله

المتغيرات العشوائيه المتصله : هي عباره عن متغيرات عشوائيه تأخذ قيم غير معدوده تكون على شكل فترات.

مثل قياس الاطول الاعمار ودرجات الحراره ....$[a,b]$

تعريف: تسمى الداله دالة كثافه احتماليه اذا حققت الشرطان التاليان

$$1) f(x) \geq 0 \quad 2) \int_a^b f(x)dx = 1$$

(a,b) معرف على الفتره

قوانين التكاملات: هو متغير فإن X اذا كان $n\epsilon N$, $a,b\epsilon R$

1) $\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$
2) $\int_a^b cx^n dx = c\int_a^b x^n dx$
3) $\int_a^b cx^0 dx = cx \Big|_a^b = cb - ca$
4) $\int_a^b x^n dx = 0$
5) $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)dx$

توقع المتغير العشوائي المتصل هو

$$E(x) = \int_a^b xf(x)dx$$

التباين : $\sigma^2(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

$$E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx$$

مثال :~ اذا كان f(x) معرف بالشكل التالي

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{12}, 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \ , o.w \end{cases}$$

1)هل الداله تمثل دالة كثافه احتماليه

$F(0) = \frac{1}{12} \geq 0 \qquad f(3) = \frac{7}{12} > 0$

$\Longrightarrow f(x) \geq 0$

1) $\int_a^b f(x)dx = 1$

$$\int_0^3 \frac{2x+1}{12} dx \Longrightarrow \frac{1}{12}\int_0^3 2x+1\, dx$$

$$= \frac{1}{12}[2\frac{x^2}{2} + x]_0^3 = \frac{1}{12}[(9+3) - (0+0)]$$

$$= \frac{1}{12}[12] = 1$$

∴الداله داله كثافه احتماليه

2) اوجد التوقع الرياضي

$$E(x) = \int_a^b x\, f(x)dx$$
$$= \int_0^3 x(\frac{2x+1}{12})\, dx$$
$$= \frac{1}{12}\int_0^3 2x + x\, dx$$
$$= \frac{1}{12}[\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}]_0^3$$
$$= \frac{1}{12}\left[\left(2\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{2\times 0^3}{3} + \frac{0^2}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{12}\left[18 + \frac{9}{2} - 0\right]$$
$$= \frac{1}{12}\left[\frac{36+9}{2}\right] = \frac{1}{12}\left(\frac{45}{2}\right) = \frac{15}{8}$$

3)اوجد التباين

$$\sigma^2(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$
$$E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx$$
$$= \int_0^3 x^2(\frac{2x+1}{12})dx$$
$$= \frac{1}{12}\int_0^3 2x^3 + x^2 dx$$
$$= \frac{1}{12}[\frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3}]_0^3$$
$$= \frac{1}{12}\left[\left(\frac{3^4}{2} + \frac{3^3}{3}\right) - \left(\frac{0^4}{2} + \frac{0^3}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{12}\left(\frac{81}{2} + 9\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{99}{2}\right) = \frac{33}{8}$$
$$\sigma^2(x) = \frac{33}{8} - (\frac{15}{8})^2 = \frac{39}{64}$$

4) اوجد احتمال

$$p(1 \le x \le 2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{2x+1}{12}dx$$
$$= \frac{1}{12}[\frac{2x^2}{2} + x]_1^2 = \frac{1}{12}[(4+2) - (1+1)]$$

$$= \frac{1}{12}[6-2] = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

مثال: اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, 0 \le x \le 1 \\ 0, 0.w \end{cases}$$

1) بين هل الداله داله كثافه احتماليه ام لا ؟

1. $f(0) = 0 \ge 0 \qquad f(1) = 3 \ge 0$

$$\Rightarrow f(x) \ge 0$$

2. $\int_0^1 3x^2 dx = 3\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 1^3 - 0^3 = 1$

الداله تمثل داله كثافه احتماليه ∴

2)اوجد

$$p\left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right) \qquad p\left(\frac{1}{2} \le x \le 1\right) = \frac{7}{8}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 3x^2 dx = 3\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2})^3 - (0)^3 = \frac{1}{8}$$

3)اوجد

$$p(x = 1) = 0$$

4)اوجد االتوقع الرياضي

$$E(X) = \int_a^b xf(x)dx = \int_0^1 x(3x^2)dx = 3\int_0^1 x^3 dx$$

$$= 3\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$$

5)اوجد التباين

$$\sigma^2(x) = \frac{3}{5} - (\frac{3}{4})^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80}$$

6) الانحراف المعياري

$$\sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)} = \sqrt{\frac{3}{80}}$$

7)اوجد

$$p\left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right) = 1 - \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} 3x^2 dx = \left[3\frac{x^3}{3}\right] = 1^3 - (\frac{1}{2})^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

#بعد المذاكرة:

اللهم إني أستودعك ما قرأت و ما حفظت و ما تعلمت،

فرده عند حاجتي إليه، إنك على كل شيء قدير، حسبنا الله و نعم الوكيل..

تلخيص / *Mu