بسم الله الرحمن الرحيم

ملخص

مبادئ رياضيات (١)

للدكتور :- نبيل منصور

من إعداد

صدى الأمل - Shosh

المحاضره الأولى
المجموعات Sets

تعريف المجموعة :-

المجموعة هي **تجمّع من الأشياء أو العناصرالمحددة تماما وقد تكون هذه الأشياء أعدادا أوأشخاصا أوأحداثا أوأي شيء آخر**

نرمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل: ... ,A, B, C

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر ونرمز للعناصر بواسطة حروف صغيرة مثل: ... ,a, b, c

1) أرقام العدد 2634 تعبير يدل على **مجموعة لأنه محدد و عنصره هي {2, 6, 3, 4}.**

2) شهور السنة الميلادية تعبير يدل **على مجموعة لأنه محدد تبدأ من يناير إلى ديسمبر.**

3) الفاكهة اللذيذة تعبير لا يدل على **مجموعة لأنه غير محدد حيث أن الفاكهة اللذيذة بالنسبة للشخص قد تكون غير لذيذة بالنسبة للشخص آخر.**

4) **الأعداد الطبيعية الأقل من 6. {1, 2, 3, 4, 5}**

يستخدم الرمز ϵ "ينتمي إلى" **ليبين عناصر المجموعة** فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول **أن a ينتمي إلى المجموعة A و يكتب بالصورة a ϵ A**

أما إذا كان a ليس عنصراً من عناصر المجموعة A فإننا نقول **أن العنصر a "لا ينتمي إلى" المجموعة A ويكتب على الصورة**

$a \notin A$

طريقة كتابة المجموعات :

طريقة العد (سرد العناصر):-

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة " ، " :-

مثال :-

A = { 1, 5, 10, 15 }

B= { a, b, c, d }

C= { 1, 2, 3, …}

(وهي مجموعة منتظمة تسير بنفس الشكل 1 2 3 4 وهكذا)

A = { 1, 2, 3,…,100}

(وهي مجموعة مغلقة ولكن المساحة لا تكفي لكتابة من 1 إلى 100 و سوف نستخدم النقاط للتعبير عن بعض العناصر).

طريقة القاعدة (الصفة المميزة) :-

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها ، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة، فمثلاً :

A = { x : عدد فردي x }

B = { x : كلية بجامعة الملك فيصل x }

C = { x : طالب بنظام التعليم عن بعد x }

D = { x : -3 ≤ x ≤ 1 عدد صحيح x }

X = { x : 0 ≤ x ≤ 12 عدد صحيح x}

أنواع المجموعات :-

هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ (فاي) أو { } .

أمثلة :-

A = { x : x عدد زوجي وفردي }

B = { x : x دولة عربية تقع في أوروبا }

المجموعة المنتهية (finite set):-

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة.

مثال :

المجموعات التالية هي مجموعات منتهية.

$$A = \{ 2 , 4 , 6 , 8 \}$$

$$B = \{ 1 , 2 , 3 , \ldots\ldots , 100 \}$$

$$C = \{ x , y , s , t , u \}$$

المجموعة غير المنتهية (Infinite set):-

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة (وهي المجموعة التي لا يمكن تحديد عناصرها بشكل دقيق)

مثال :

المجموعات التالية هي مجموعات غير منتهية.

A = { x : عدد طبيعي فردي }

$$B = \{ 10, 20 , 30 , \ldots\ldots\ldots \}$$

المجموعة الكلية (Universal set):-

وهي مجموعة كل العناصر قيد الدراسة ويرمز لها بالرمز U وتعطى ضمن السؤال أو الدراسة.

مثال:

U = { x : x أستاذ أو طالب بجامعة الملك فيصل }

المجموعة الجزئية (Subset):-

تكون A مجموعة جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B وتكتب على الصورة : $A \subset B$ و تقرأ A جزء من B.

مثال:

1- إذا كانت المجموعة $A = \{ 2 , 4 , 6 \}$ و $B = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$ فإن $A \subset B$.

2- المجموعة المكونة من جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة.

تساوي المجموعات :-

تكون المجموعتان A و B متساويتان إذا كانت :-

$A = B$ ≫≫≫≫ $A \subseteq B$, $B \subseteq A$

أما **المجموعتان المتكافئتان** فهما المجموعتان اللتان **تتساويان في عدد عناصرها** وتكتب على الصورة $A \equiv B$

مثال :-

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- A = {1, 5, 7 , 9 } , B = {9 , 7 ,5 ,1 }

2- A = {2 , 5 , 9 } , B = { a , s , d }

الحل :-

1 – A = B

2 – $A \equiv B$

الاتحاد :-

اتحاد المجموعتين A و B (A U B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما .

مثال :- إذا كان {1 , 2 , 3 , 7} = A و {2 , 4 , 6 , 8} = B أوجد (AUB) ؟

الحل :-

(AUB) = {1 ,2 , 3, 4, 5, 6, 7, 8}

التقاطع :-

تقاطع المجموعتين A و B (A∩B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A و في B معاً أي العناصر المشتركة بين A و B .

مثال :-

إذا كان {-1 , 0 , 1 , 2 , 3} = A و B = {0,2,4,6,} أوجد A ∩ B

الحل :-

(A ∩ B) = {0 , 2 }

المكملة أو المتممة :-

يقال أن $\bar{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على **جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A.**

مثال :-

إذا كان U = { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} و A = {2,4,6,8,10} أوجد $\bar{A}$.

الحل :- **$\bar{A}$ = {1,3,5,7,9}**

الفرق :-

إذ كانت مجموعتان A و B فإن A-B يسمى بالفرق **وهو مجموعة كل العناصر الموجودة في A وليست في B.**

مثال :-

إذا كانت A = {1,2,3,x,y} و B = {3,4,5,x,w} أوجد A-B

الحل :- **A-B = { 1 , 2 , y }**

مثال :-
إذا كانت
$A=\{1,2,3,x,y\}$ و
$B=\{3,4,5,x,w\}$
و المجموعة الكلية
$U = \{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$
فأوجد :-

1- $A \cup B$
2- $A \cap B$
3- $B - A$
4- $\overline{A}$
5- $\overline{B}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B}$
8- $\overline{A} \cup A$
9- $\overline{A} \cap A$

1- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, w\}$
2- $A \cap B = \{3, X\}$
3- $B - A = \{4, 5, w\}$
4- $\overline{A} = \{4, 5, w, z\}$
5- $\overline{B} = \{1, 2, y, z\}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, y, w, z\}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B} = \{z\}$
8- $\overline{A} \cup A = U$
9- $\overline{A} \cap A = \{\ \}$

مجموعات الاعداد :-

أ - مجموعة الأعداد الطبيعية (Natural numbers) :

وهي أصغر مجموعات الأعداد وتسمى أيضا مجموعة العد وتحتوى على الأعداد الصحيحة الموجبة.

$N=\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

ب - مجموعة الأعداد الصحيحة (Integer numbers) :

هي مجموعة الأعداد الموجبة والسالبة بالإضافة إلى الصفر.

$I=\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

ج - مجموعة الأعداد النسبية (Rational numbers) :

العدد النسبي هو العدد الذي يكتب على الصورة $\frac{a}{b}$ بحيث $a,b \in I$ ، $b \neq 0$ وتحوى على الأعداد الصحيحة بالإضافة إلى الكسور مثل $\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{8}{10}, \frac{9}{1}, \frac{14}{1}, \dots\dots\dots$

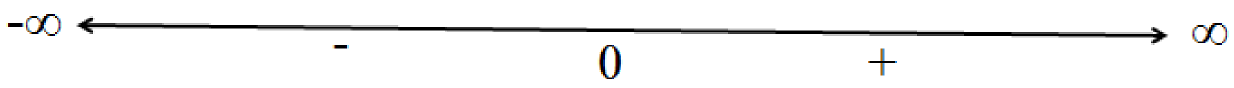
ويرمز لها بالرمز Q .

د - مجموعة الأعداد غير النسبية (Irrational numbers) :

العدد الغير النسبي هو العدد الذي لا يمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$ بحيث $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{20}, \dots\dots$ مثل جذور الأعداد التي ليست مربع كامل

د - مجموعة الأعداد الحقيقية (Real numbers) :

وتحوي **مجموعة الأعداد النسبية و غير النسبية ويرمز لها بالرمز R.** و تمثل بخط مستقيم يسمى خط الأعداد حيث يمتد من طرفيه من ∞- إلى ∞ ومنتصفه تكون نقطة الصفر و على يسار الصفر الأعداد السالبة وعلى يمينه الأعداد الموجبة كالآتي



وأي جزء من هذا الخط يكون **مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية و يسمى فترة (Interval).**

الفترة :-

تعرف الفترة كما ذكرنا سابقا بأنها **مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية** **وهي الأعداد التي تمتد من النقطة a إلى النقطة b و تكتب حسب نوعها** كالآتي:

$$(a , b) = \{ x \in R : a < x < b \}$$

$$[a , b) = \{ x \in R : a \leq x < b \}$$

$$[a , b] = \{ x \in R : a \leq x \leq b \}$$

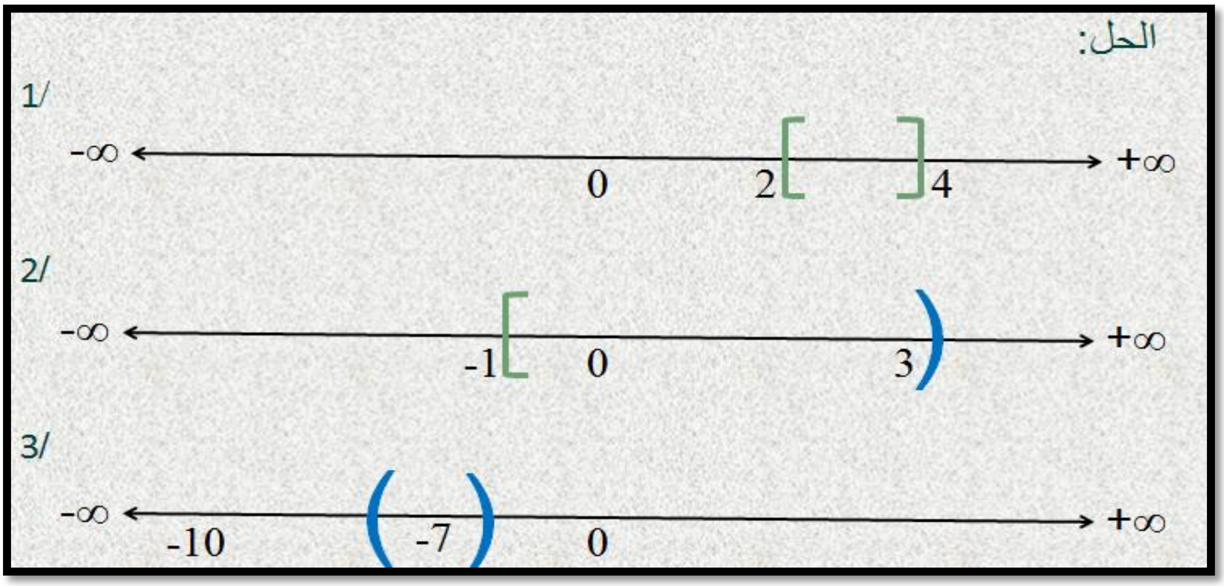
مثال : -

مثل الفترات التالية على خط الأعداد:

1- [2 , 4]

2- [-1 , 3)

3- (-10 , -7)



مثال :-

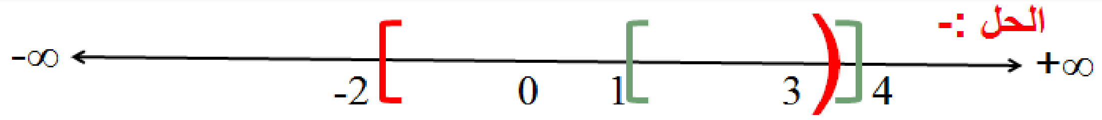
إذا كانت الفترات B = [1 , 4] و A = [-2 , 3) فأحسب ما يلي:

$1\text{-}\ A \cap B$

$2\text{-}\ A \cup B$

$3\text{-}\ A - B$

$4\text{-}\ B - A$



1- $A \cap B = [1, 3)$

2- $A \cup B = [-2, 4]$

3- $A - B = [-2, 1)$

4- $B - A = [3, 4]$

مجموعة المجموعات :-

مجموعة المجموعات لأية مجموعة S هى المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية Ø و المجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز P(S) .

مثال :-

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة S = {a , b , c}

الحل :-

$$P(s) = \{ \{a\} , \{b\} , \{c\} ,\{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} ,\{a,b,c\} ,\emptyset \}$$

ملاحظة : إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر ، فان عدد عناصر P(S) يساوي 2^n .

مثال :-

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة S = { a, b , c }

الحل :-

$$P(S) = \{ \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{a,c\} ,\{b,c\} ,\{a,b,c\} , \emptyset \}$$

$$2^3 = 8$$

تمارين :

1/ وضح أي من هذه المجموعات هي مجموعة خالية أو مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية :-

(a) A ={x: x عدد سالب و موجب }

(b) B = {3 ,6 ,9 ,12 }

(c) C = {x: x دولة أوربية تقع في شبة الجزيرة العربية }

(d) D = { 2 , 4 , 6 , ...,100}

(e) E = { 100 , 200 , 300 ,.......}

(f) F = { w , e , r , t }

2- إذا كانت $A = \{3 , 5 , 7\}$ و $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ فهل يمكن القول أن $A \subset B$ ؟

3- أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- $A = \{5 ,10,15,20\}$, $B = \{15,10,5, 20\}$

2- $A = \{20,50,70\}$, $B = \{k , d , u\}$

4- إذا كانت $A=\{8,10,12,r,m\}$ و $B=\{4,6,10,o,r\}$
أوجد المجموعة الكلية ثم أوجد :-

1- $A \cup B$
2- $A \cap B$
3- $B - A$
4- $\overline{A}$
5- $\overline{B}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B}$
8- $\overline{A} \cup A$
9- $\overline{A} \cap A$

5- أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{2 , 5 , 8\}$ ؟

6- إذا احتوت المجموعة S على 5 من العناصر، فأوجد عدد عناصر $P(S)$ ؟

لا تقل قد ذهبت أربابه كل من سار على الدرب وصل

المحاضره الثانيه
المجموعات والاقترانات

ثانياً : الاقترانات (الدوال) Functions :-

يعرف الاقتران f بأنه قاعدة (rule) تعطى قيمة وحيدة (unique value) كنتيجة لتعويض قيمة المتغير x فيه وتمثل هذه القيمة أو النتيجة قيمة y المقابلة لقيمة x المستخدمة بالتعويض. أي أن:

$f : A \to B$

$x \longmapsto f(x)$

ملاحظة: إذا كان f اقتران من A إلى B فإن A يسمى **مجال** الاقتران ويسمى B **بالمجال المقابل** كما تسمى مجموعة الصور **بالمدى**.
حتى يكون f اقتران لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال صورة وصورة واحدة فقط فى المجال المقابل.
1- إقتران كثير الحدود : ويكون على الصورة :-
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 x + a$
وتكون درجة كثير الحدود بقيمة أعلى أس لـ (x) في الاقتران .

مثال :-

ما هي درجة كل من الاقترانات كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 3$

2- $f(x) = 3x - 4$

3- $f(x) = x^2 - x + 1$

4- $f(x) = x^3 + x^7 + 5x - 7$

5- $f(x) = 2 - 3x + x^3$

1- $f(x) = 3$

الدرجة الصفرية و يسمى أيضاً اقتران ثابت.

2- $f(x) = 3x - 4$

الدرجة الأولى ويسمى اقتران خطى.

3- $f(x) = x^2 - x + 1$
الدرجة الثانية أو اقتران تربيعي.
4- $f(x) = x^3 + x^7 + 5x - 7$
الدرجة السابعة.
5- $f(x) = 2 - 3x + x^3$
الدرجة الثالثة أو اقتران تكعيبى

العمليات الحسابية على كثيرات الحدود :

- الجمع و الطرح :-

يتم جمع أو طرح كثيرات الحدود بجمع أو طرح معاملات المتغيرات المتشابهة الأسس.

مثال (1) :-

$1\text{-}(\ 3x^3 - 4x^2 + 6\ ) + (\ x^4 - 2\ x^3 - 4\ x\ + 3\ )$

الحل :-

$(\ 3x^3 - 4x^2 + 6\ ) + (\ x^4 - 2\ x^3 - 4\ x\ + 3\ ) = \ x^4 + x^3 - 4\ x^2 - 4x + 9$

مثال (2) :-

$2\text{-}\ (6x^5 + 3x^3 - 4\ x + 5\ ) - (\ 3x^5 + x^4 - 2x^2 - 4x + 7\ )$

الحل :-

$(6x^5 + 3x^3 - 4\ x + 5\ ) - (\ 3x^5 + x^4 - 2x^2 - 4x + 7\ ) = 3x^5 - x^4 + 3x^3 + 2x^2 \ -2$

2- الضرب :-

يتم ضرب كثيري حدود f(x)، h(x) بضرب كل حد من حدود f(x) بكافة حدود h(x).

مثال (1):-

اذا كان $f(x) = (3x^2 - 5x + 4)$ ، وكان $h(x) = (\ x^2 + 2x - 1\ )$ فجد $(f.h)(x)$.

الحل :-

$$(f.h)(x) = (3x^2 - 5x + 4\ )\ (x^2 + 2x - 1\ )$$
$$= 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 5x^3 - 10\ x^2 + 5\ x + 4\ x^2 + 8x - 4$$
$$= \ 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 13x - 4$$

مثال (2):-

اذا كان $f(x) = (2x^2 + 3x)$ ، وكان $h(x) = (\ x^3 + 5x - 8\ )$ فجد $(f.h)(x)$.

الحل :-

$$(f.h)(x) = (x^3 + 5x - 8\ )\ (2x^2 + 3x)$$
$$= 2x^5 + 10x^3 - 16x^2 + 3x^4 + 15\ x^2 - 24x$$
$$= 2x^5 + 3x^4 + 10x^3 - x^2 - 24x$$

3- القسمة:-

يتم قسمة كثيرى حدود باستخدام خوارزمية القسمة الطويلة

مثال (1):

اذا كان $f(x) = (x^4 - 3x^2 + 5)$ ، وكان $h(x) = (x^2 - 4)$ فجد $f(x) \div h(x)$.

الحل :-

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 1 \\
\hline
x^2 - 4 & x^4 - 3x^2 + 5 \\
 & -x^4 + 4x^2 \\
\hline
 & x^2 + 5 \\
 & -x^2 + 4 \\
\hline
 & 9
\end{array}
$$

ويكون ناتج القسمة $x^2 + 1$ وباقي القسمة 9.

3- القسمة:-

يتم قسمة كثيرى حدود باستخدام خوارزمية القسمة الطويلة.

مثال (1):

اذا كان $f(x) = (5x^5 + 10x^3)$ ، وكان $h(x) = (x^3)$ فجد $f(x) \div h(x)$.

الحل :-

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^2 + 10 \\
\hline
x^3 & 5x^5 + 10x^3 \\
 & 5x^5 \\
\hline
 & 10x^3 \\
 & 10x^3 \\
\hline
 & -
\end{array}
$$

ويكون ناتج القسمة $5x^2 + 10$ وباقي القسمة 0.

المحاضره الثالثة
تابع الاقترانات

2- الاقتران النسبي :-

الاقتران النسبى هو اقتران مكون من كثيرى حدود على شكل بسط ومقام على الصورة كثير الحدود .

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, $h(x) \neq 0$, $g(x)$, $h(x)$ كثيري حدود

مثال :-

ما هو مجال كل من الاقترانات النسبية التالية :-

1- $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

2- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

3- $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-4}$

الحل :-

1- $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

يكون الاقتران النسبى معرف على الاعداد الحقيقية عدا اصفار المقام وفى هذ الاقتران لا يوجد عدد حقيقى يجعل المقام صفر إذاً مجال الاقتران R .

2- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

نساوى المقام بالصفر فيكون $(X-1 = 0)$ إذاً $X=1$ إذا المجال $R\setminus\{1\}$

3- $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-4}$

نساوى المقام بالصفر فيكون $(X^2- 4 = 0) \leftarrow X^2= 4)$ إذاً $X= \pm 2$ إذا المجال $R\setminus\{-2 , 2\}$.

العمليات الحسابية على الاقترانات النسبية :-

1- الجمع والطرح :-

توحد المقامات كما فى الأعداد

مثال (1): اوجد ناتج ما يلي :

$$\frac{X+1}{2X-5} + \frac{3X+1}{X-2}$$

الحل :-

$$\frac{X+1}{2X-5} + \frac{3X+1}{X-2} = \frac{(X+1)(X-2)}{(2X-5)(X-2)} + \frac{(3X+1)(2X-5)}{(X-2)(2X-5)}$$

$$= \frac{(X^2-X-2)+(6X^2-13X-5)}{(X-2)(2X-5)}$$

$$= \frac{7X^2-14X-7}{2X^2-9X+10}$$

مثال (2): اوجد ناتج ما يلي :-

$$\frac{X}{3X+2}+\frac{5X^2+2}{2X-2}$$

الحل :-

$$\frac{X}{3X+2}+\frac{5X^2+2}{2X-2}=\frac{(X)(2X-2)}{(3X+2)(2X-2)}+\frac{(5X^2+2)(3X+2)}{(2X-2)(3X+2)}$$

$$=\frac{(2X^2-2X)+(15x^3+10X^2+6X+4)}{(3X+2)(2X-2)}$$

$$=\frac{15X^3+12X^2+4X+4}{6X^2-2X-4}$$

2- الضرب :-

نضرب البسط فى البسط والمقام فى المقام.

مثال (1):-

$$\frac{2X+3}{X+1}\times\frac{X-2}{3X+4}$$

الحل:-

$$\frac{2X+3}{X+1}\times\frac{X-2}{3X+4}=\frac{(2X+3)(X-2)}{(X+1)(3X+4)}=\frac{2X^3-X-6}{3X^2+7X+4}$$

مثال (2):-

$$\frac{X^2+10}{2X+5}\times\frac{3X-5}{X+2}$$

الحل:-

$$\frac{X^2+10}{2X+5}\times\frac{3X-5}{X+2}=\frac{(X^2+10)(3X-5)}{(2X+5)(X+2)}=\frac{3X^3-5X^2+30X-50}{2X^2+9X+10}$$

3- القسمة :-

نحول عملية القسمة إلى عملية ضرب بقلب الكسر الثانى.

مثال:-

$$\frac{3X+2}{X^2+1}\div\frac{X+5}{X^2}$$

الحل:-

$$\frac{3X+2}{X^2+1}\div\frac{X+5}{X^2}=\frac{3X+2}{X^2+1}\times\frac{X^2}{X+5}$$

$$=\frac{3X^3+2X^2}{X^3+5X^2+X+5}$$

3- الاقتران الأسي :-

الاقتران الأسي هو اقتران مجاله الأعداد الحقيقية ومجاله المقابل الاعداد الحقيقية الموجبة، أي أن:

$$f: R \longrightarrow R^+$$

$$x \longmapsto f(x) = a^x$$

حيث a عدد حقيقي موجب. يسمى a: الأساس، x: الاس. ومن الأمثلة على الاقترانات الاسية:

- $f(x) = 10^x$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = 2^x$

-اذا كان الاساس e فان الاقتران يسمى اقتران الاس الطبيعي.

- اذا كان الاساس يساوي 10 فان الاقتران يسمى الاس العشري

1- $a^x . a^y = a^{x+y}$

2- $\frac{ax}{ay} = a^{x-y}$

3- $(a^x)^y = a^{xy}$

4- $a^x . b^x = (ab)^x$

5- $a^0 = 1$

6- $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{ax}$

7- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

مثال (1):-

بسط المقادير التالية إلى أبسط صورة:

1) $\frac{(2^3)\sqrt[3]{4^7}}{(2^2)\sqrt[3]{4}}$

$$\frac{(2^3)\sqrt[3]{4^7}}{(2^2)\sqrt[3]{4}} = \frac{(2^3)(4^{\frac{7}{3}})}{(2^2)(4^{\frac{1}{3}})}$$
$$= 2^{3-2}.\ 4^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}}$$
$$= 2^1.\ 4^{\frac{6}{3}}$$
$$= 2\ .\ 4^2$$
$$= 2.4^2$$
$$= 2 \times 16$$
$$= 32$$

2) $\frac{2(\sqrt{3})(\sqrt{8})(3^4)}{9(\sqrt{6})((4^2)}$

$$\frac{2(\sqrt{3})(\sqrt{8})(3^4)}{9(\sqrt{6})((4^2)} = \frac{2.3^{\frac{1}{2}}.8^{\frac{1}{2}}.3^4}{9.6^{\frac{1}{2}}.4^2}$$
$$= \frac{2.3^{\frac{1}{2}}.(4.2)^{\frac{1}{2}}.3^4}{(3.3)(2.3)^{\frac{1}{2}}.4^2}$$
$$= \frac{2.3^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}}.4^{\frac{1}{2}}.3^4}{3^2.2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}}.4^2}$$
$$= \frac{2.2.3^4}{3^2.2^4} = 2^{2-4}.3^{4-2}$$
$$= 2^{-2}.3^2 = \frac{9}{4}$$

3) $\frac{(e)(\sqrt{e})(e^{2x})}{(e^{x})(e^{x})^{-3}(e)^{\frac{3}{2}}} =$

$$\frac{(e)(\sqrt{e})(e^{2x})}{(e^{x})(e^{x})^{-3}(e)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e.e^{\frac{1}{2}}.\,e^{2x}}{e^{-2x}.\,e^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{e^{\frac{3}{2}}.e^{2x}}{e^{-2x}.e^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{e^{2x}}{e^{-2x}}$$

$$= e^{2x+2x}$$

$$= e^{4x}$$

مثال (2):-

حل المعادلات الاسية التالية:

1) $3^{2x-1} = 243$

$$3^{2x-1} = 243 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^{5}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 5$$

$$\Longrightarrow 2x = 6$$

$$\Longrightarrow x = \frac{6}{2}$$

$$\Longrightarrow x = 3$$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{16}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$

.

المحاضره الرابعة

المعادلات والمتباينات

أولاً : المعادلات :-

يحتل موضوع المعادلات مكانه كبيرة في علم الرياضيات وهو من أقدم المواضيع التي طرحت للبحث، وفي هذه الوحدة سنتطرق إلى حل المعادلات الخطية والتربيعية بالإضافة إلى حل انظمة المعادلات، نظام معادلتين بمجهولين، ويقصد بحل المعادلة هي ايجاد قيمة المتغير أو المتغيرات الموجودة في المعادلة ..

أ – حل المعادلات الخطية :-

إن **المعادلة الخطية** هي **معادلة في متغير واحد ومن الدرجة الاولى أي أن أكبر أس في المعادلة هو واحد** والشكل العام للمعادلة الخطية هو :-

$ax + b = 0$

مثال :-

حل المعادلة الخطية التالية:

$2x - 3 = 0$

الحل :-

$2x - 3 = 0$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

ب – حل المعادلة التربيعية :-

المعادلة التربيعية **يكون أكبر أس فيها هو أثنين** و تأخذ الصورة :-

$ax^2 + bx + c = 0$

وهناك العديد من الطرق لحل هذه المعادلة ولكننا سوف نعتمد على القانون العام للحل، حيث أنه من أسرع هذه الطرق و أكثرها دقة و يأخذ القانون العام الشكل التالي :-

$$\boxed{x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

ويسمى المقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ و هو ما أسفل الجذر بالمميز .

وهناك ثلاث حالات للحل بهذه الطريقة و هي :

1 – الحالة الأولى: اذا كان المميز $(\Delta > 0)$ **فيوجد حلين للمعادلة.**

$$\left(x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

2 – الحالة الثانية: اذا كان المميز $(\Delta = 0)$ **فيوجد حل وحيد للمعادلة .**

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3 – الحالة الثالثة: اذا كان المميز $(\Delta < 0)$ **فلا يوجد حل حقيقي للمعادلة**

مثال :-

حل المعادلات التربيعية التالية :

1) $X^2 + 2x - 3 = 0$

$a = 1, \; b = 2, \; c = -3$

$\Delta = (2)^2 - 4 \times 1 \times -3 = 16 > 0$

∴ يوجد حلين للمعادلة هما:

■ $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3$

■ $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$

---

2) $3X^2 - 4x + 5 = 0$

$a = 3, \; b = -4, \; c = 5$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 5 = -44 < 0$

∴ لا يوجد حل حقيقى للمعادلة.

---

3) $X^2 - 2x + 1 = 0$

$a = 1, \; b = -2, \; c = 1$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$

∴ يوجد حل وحيد للمعادلة هو:

■ $\mathbf{x} = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{--2}{2 \times 1} = \dfrac{2}{2} = 1$

---

4) $X^2 - 5x + 3 = 0$

$a = 1, \; b = -5, \; c = 3$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 13 > 0$

∴ يوجد حلين للمعادلة هما:

■ $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5) - \sqrt{13}}{2 \times 1} = \dfrac{5 - \sqrt{13}}{2}$

■ $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5) + \sqrt{13}}{2 \times 1} = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{2}$

جـ - حل أنظمة المعادلات الخطية :-

يكون الشكل العام لنظام المعادلات الخطية كالآتي:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n} &= \mathbf{b_m}
\end{aligned}
$$

حيث m تمثل عدد المعدلات، n عدد المتغيرات.

ستكون دراستنا في هذه الوحدة متعلقة بحل نظام معادلتين بمجهولين وبطريقة الحذف.

يكون نظام معدلتين بمجهولين على الصورة:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

يمكن حل هذا النوع من المعادلات باستخدام **طريقة الحذف**، حيث نجعل معاملات أحد المتغيرين في المعادلتين نفس القيمة ولكن بإشارتين مختلفتين ثم نجمع المعادلتين ونجد منها قيمة المتغير الآخر ثم نعوض قيمته في أحدى المعادلتين ونجد قيمة المتغير الأول

مثال 1:-

حل النظام التالي من المعادلات:

$2x + 3y = 7 \quad (1)$

$3x + 2y = 8 \quad (2)$

الحل :-

نضرب المعادلة الأولى في (-2) والثانية في (3) لحذف المتغير y فتصبح المعادلتين:

$$\begin{aligned} -4x - 6y &= -14 \\ \underline{9x + 6y} &= \underline{24} \quad \text{نجمع} \\ 5x &= 10 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \mathbf{x = 2}$

نعوض بقيمة x في المعادلة الثانية :

$\Longrightarrow \mathbf{3\times(2) + 2y = 8 \Longrightarrow 6 + 2y = 8 \Longrightarrow 2y = 2 \Longrightarrow y = 1}$

مثال 2:-

حل النظام التالي من المعادلات:

$3x + 4y = 9 \quad (1)$

$2x + 3y = 7 \quad (2)$

الحل :-

نضرب المعادلة الأولى في (-2) والثانية في (3) لحذف المتغير x فتصبح المعادلتين:

$$\begin{aligned} -6x - 8y &= -18 \\ \underline{6x + 9y} &= \underline{21} \quad \text{نجمع} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{3} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \mathbf{y = 3}$

نعوض بقيمة y في المعادلة الأولى:

$\Longrightarrow \mathbf{3x + 4\times(3) = 9 \Longrightarrow 3x + 12 = 9 \Longrightarrow 3x = -3 \Longrightarrow x = -1}$

ثانياً : المتباينات :-

المتباينة هي أي عبارتين جبريتين يربط بينهما احدى ادوات الربط التالية (>) أقل من (<) أكبر من، ($\leq$) أكبر من أو يساوي، ($\geq$) أقل من أو يساوي ومن الأمثلة على المتباينات:

$x < 2$

$x + 1 \leq -3$

$x^2 + 2x + 5 \geq 0$

تعريف: تسمى مجموعة كل قيم (x) التي يمكن أن نعوضها في المتباينة بغض النظر عن صحتها بمجموعة التعويض، وهذه المجموعة تعطى في السؤال وتكون عادة إحدى مجموعات الاعداد وفي كل امثلتنا في هذه الوحدة ستكون مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الحقيقية **"R"**.

تعريف: تسمى مجموعة قيم x التي تجعل المتباينة صحيحة (أي التي تكون حلاً للمتباينة) **مجموعة الحل للمتباينة.**

مجموعة الحل **تكون مجموعة جزئية من مجموعة التعويض.**

مثال :-

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات التالية:

1- $3x - 2 > x + 1$

2- $x^2 - 5x \geq -6$

3- $x^3 + 3x^2 + 2x \leq 0$

4- $\frac{2x-1}{x+1} < 0 \quad , x \neq -1$

الحل :-

مجموعة الحل لأي متباينة تكون مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

1- $3x - 2 > x + 1$

$3x - x > 1 + 2$

$2x > 3$

$x > \frac{3}{2}$

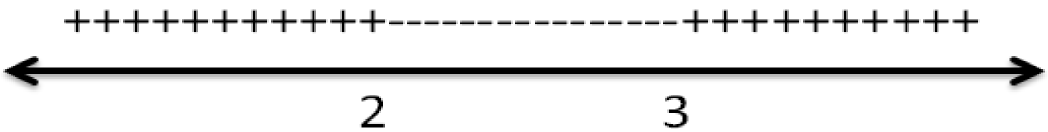
∴ تكون مجموعة الحل هي الفترة المفتوحة $(\frac{3}{2}, \infty)$.

2- $x^2 - 5x \geq -6$

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$

$(x-3)(x-2) \geq 0$

نبحث في اشارة الاقتران عن طريق خط الاعداد وتكون اشارة الاقتران التربيعي عكس اشارة x^2 ما بين الجذرين ونفس إشارة x^2 خارج الجذرين.



∴ تكون مجموعة الحل للمتباينة هي $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$.

3- $x^3 + 3x^2 + 2x \leq 0$

نأخذ x عامل مشترك

$x(x^2 + 3x + 2) \leq 0$

نحلل الدالة التربيعية داخل الاقواس

$x(x+2)(x+1) \leq 0$

فتكون جذور الاقتران هي { -2 , -1 , 0}

نحدد اشارة الاقتران على خط الاعداد

-----------++++++++------------+++++++

-2 -1 0

∴ تكون مجموعة الحل للمتباينة هي $(-\infty, -2] \cup [-1, 0]$.

4- $\frac{2x-1}{x+1} < 0 \quad , x \neq -1$

في الاقترانات النسبية نحدد اشارة البسط واشارة المقام على خط الاعداد ثم نقسم الإشارات.

$2x - 1 < 0$ البسط

$x < \frac{1}{2}$

-------------------+++++++++++++

$\frac{1}{2}$

$x + 1 < 0$

$x < -1$ المقام

-------------------+++++++++++++

-1

القسمة

+++++++++++-------------------++++++++++

-1 $\frac{1}{2}$

تكون مجموعة الحل للمتباينة هي الفترة المفتوحة $(-1, \frac{1}{2})$.

المحاضره الخامسة

المتتاليات

المتتاليات :-

هي عبارة عن اقتران معرف من مجموعة الاعداد الطبيعية **N** إلى مجموعة الاعداد الحقيقية **R** وتكتب على الصورة:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1,\ a_2,\ a_3, \dots,\ a_n \dots$$

وتسمى العناصر $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots,\ a_n$ بحدود المتتالية بينما يسمى الحد (a_n) الحد العام للمتتالية.

وتكتب المتتالية بدلالة حدها a_n.

مثال 1:-

اكتب الحدود الاربعة الأولى لكل من المتتاليات التالية:

1- $\left\{\frac{n^2}{2}\right\}$

2- $\{\ 3n - n^3\}$

3- $\{\ 2n + 4\ \}$

4- $\{2^n\}$

الحل :-

الحدود الاربعة الاولى هي a_1 , a_2 , a_3 , a_4

1- $a_1 = \frac{1}{2}\ ,\ a_2 = 2\ ,\ a_3 = \frac{9}{2}\ ,\ a_4 = 8$

2- $a_1 = 2\ ,\ a_2 = -2,\ a_3 = -18,\ a_4 = -52$

3- $a_1 = 6\ ,\ a_2 = 8,\ a_3 = 10,\ a_4 = 12$

4- $a_1 = 2\ ,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8,\ a_4 = 16$

مثال 2:-

أوجد الحد الخامس و الحد الثامن للمتتالية:

$$\left\{\frac{n^2+1}{3n-2}\right\}$$

الحل :-

الحد الخامس $\quad a_5 = \frac{5^2+1}{3.5-2} = \frac{26}{13} = 2$

الحد الثامن $\quad a_8 = \frac{8^2+1}{3.8-2} = \frac{65}{22}$

1- المتتالية الحسابية :-

المتتالية الحسابية هي المتتالية التي يكون الفرق بين أي حدين متتاليين فيها مقداراً ثابتاً يسمى أساس المتتالية ويرمز له بالرمز $\boldsymbol{d}$،

أي اذا كانت $\{a_n\} = a_1,\ a_2,\ a_3, \dots a_n$ متتالية حسابية فإن:

$$\boldsymbol{a_2 = a_1 + d \Rightarrow d = a_2 - a_1}$$
$$\boldsymbol{a_3 = a_2 + d \Rightarrow d = a_3 - a_2}$$
$$\boldsymbol{a_4 = a_3 + d \Rightarrow d = a_4 - a_3}$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + d \Rightarrow d = a_n - a_{n-1}}$$

مثال :-

أي المتتاليات التالية حسابية واذا كانت فما هو اساسها:

الحل :-

1- 2, 4, 8, 16,... (4 – 2 = 2, 8 – 4 = 4, الفرق ليس ثابت)

∴ ليست متتالية حسابية.

2- 1, 4, 7, 10,... (4 – 1 = 3, 7 – 4 = 3, الفرق ثابت)

∴ متتالية حسابية وأساسها يساوي 3.

3- 1, 4, 9, 16, 25,... (4 – 1 = 3, 9 – 4 = 5 , الفرق ليس ثابت)

∴ ليست متتالية حسابية.

$4\text{-}\ \ 5,\ 3,\ 1,\ -1,\ \dots \Longrightarrow (3-5=-2,\ 1-3=-2,$ ثابت الفرق)

∴ متتالية حسابية و أساسها يساوي -2.

$5\text{-}\ \ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6, \dots \Longrightarrow (6-6=0,\ 6-6=0,$ ثابت الفرق)

∴ متتالية حسابية و أساسها يساوي 0.

$6\text{-}\ \ 1, \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \dots \Longrightarrow (\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6},$ ثابت ليس الفرق)

∴ ليست متتالية حسابية.

$6\text{-}\ \ 1, \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \dots \Longrightarrow (\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6},$ ثابت ليس الفرق)

∴ ليست متتالية حسابية.

الحد العام للمتتالية الحسابية :-

اذا كانت (a_n) متتالية حسابية حدها الأول a_1 واساسها d فإن:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_1 + 4\,d$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$\therefore$ الحد العام للمتتالية الحسابية هو:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

تابع الحد العام للمتتالية الحسابية :-

مثال 1:-

أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول (2) وأساسها (5) ثم أوجد الحد الخامس عشر للمتتالية.

الحل :-

$$a_1 = 2$$
$$d = 5$$

$\therefore$ يكون الحد العام هو:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$$
$$= 2 + (n-1)(5)$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{a_n = 5n - 3}$$

الحد الخامس عشر:

$$\Rightarrow \boldsymbol{a_{15} = 5(15) - 3}$$
$$\boldsymbol{= 75 - 3}$$
$$\boldsymbol{= 72}$$

مثال 2:-

أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول (-5) وأساسها (3) ثم أوجد الحد العاشر للمتتالية.

الحل:-

$$a_1 = -5$$
$$d = 3$$

$\therefore$ يكون الحد العام هو:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$= -5 + (n-1)(3)$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{a_n = 3n - 8}$$

الحد العاشر:

$$\Rightarrow \boldsymbol{a_{10} = 3(10) - 8}$$
$$\boldsymbol{= 30 - 8}$$
$$\boldsymbol{= 22}$$

مثال 3:-

إذا علمت أن الحد الحادي عشر من متتالية حسابية يساوي 35 والحد الاول يساوي 5 أوجد أساس هذه المتتالية؟

الحل:-

$a_1 = 5$

$d = ?$

$a_{11} = 35$

∴ يكون الحد العام هو:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow 35 = 5 + (11-1)d}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow 30 = 10\,d}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow d = \frac{30}{10} = 3}$$

مثال 4:-

إذا علمت أن الحد السادس عشر من متتالية حسابية يساوي 85 وأساس هذه المتتالية يساوي 5 أوجد الحد الأول لهذ المتتالية ؟

الحل:-

$a_1 = ?$

$d = 5$

$a_{16} = 85$

∴ يكون الحد العام هو:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

$$\Longrightarrow 85 = a_1 + (16-1)(5)$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow 85 = 75 + a_1}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow a_1 = 85 - 75}$$

$$\boldsymbol{= 10}$$

مثال 5:-

أوجد الحد العام لكل من المتتاليات الحسابية التالية:

الحل :-

نجد في البداية الحد الأول والأساسي للمتتالية ثم نعوض في قانون الحد العام.

1- $\boldsymbol{a_1 = 3,\ d = 3}$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow a_n = a_1 + (n-1)d}$$

$$\boldsymbol{= 3 + (n-1)(3)}$$

$$\boldsymbol{= 3 + 3n - 3}$$

$$\boldsymbol{= 3n}$$

2- $\boldsymbol{a_1 = 10,\ d = -2}$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow a_n = a_1 + (n-1)d}$$

$$\boldsymbol{= 10 + (n-1)(-2)}$$

$$\boldsymbol{= 10 - 2n + 2}$$

$$\boldsymbol{= 12 - 2n}$$

3- $a_1 = 1 \ , \ d = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow a_n = a_1 + (n - 1)d$

$= 1 + (n - 1)\left(\frac{1}{2}\right)$

$= 1 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n$

$= \frac{n+1}{2}$

مجموع أول n حد من الحدود للمتتالية الحسابية :-

أول n حد من حدود هو:

$a_1 \ , \ a_2 \ , \ \dots\dots\dots , \ a_n$

و مجموعها هو:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots + a_n$

$\Longrightarrow S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots + a_n$

$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \dots\dots + (a_1 + (n-1)d)$

$= na_1 + d + 2d + 3d \dots\dots + (n-1)d$

$= na_1 + d\left(1 + 2 + 3 + \dots\dots + (n-1)\right)$

$= na_1 + d\frac{n(n-1)}{2}$

$\Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$\Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d)$

$\Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

مثال 1:-

متتالية حسابية حدها الأول يساوي (3-) ، واساسها (4) أوجد مجموع أول (20) حد منها.

الحل:-

$a_1 = -3 \ , \ d = 4$

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$\Longrightarrow S_{20} = \frac{20}{2}(2(-3) + (19)(4))$

= 10 (-6 + 76)

= (10)(70)

= 700

مثال 2:-

متتالية حسابية عدد حدودها (16) حدها الأول (3) وحدها الأخير (39) احسب مجموعها.

الحل:-

$a_1 = 3 \ , \ a_{16} = 39 \ , \ n = 16$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$\Longrightarrow S_{16} = \frac{16}{2}(3 + 39)$

= (8)(42)

$\Longrightarrow S_{16} = 336$

مثال 3:-

أوجد المجموع التالي:

$$\sum_{n=1}^{12}(5n-1)$$

الحل:-

هذا المجموع يمثل مجموع متتالية حسابية عدد حدودها (12) حدها الأول (4) واساسها (5).

$$\Rightarrow S_{12}=\frac{12}{2}\big(2(4)+11(5)\big)=378$$

مثال 4:-

متتالية حسابية حدها الأول (6) وحدها الأخير (66) ومجموع حدودها 252 أوجد عدد حدودها.

الحل:-

نطبق القانون

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(6+66)=252$$

$$\frac{n}{2}(72)=252$$

$$n(36)=252$$

$$\Rightarrow n=7$$

سر النجاح باختصار لا ترتبك

المحاضره السادسة

تابع المتتاليات

2- المتتالية الهندسية :-

المتتالية الهندسية المتتالية التي تكون فيها النسبة بين أي حدين متتالين ثابتة تسمى اساس المتتالية ويرمز لها بالرمز r .

أي : اذا كانت $\{a_n\} = a_1 ,\ a_2,\ a_3 ,\ \dots\dots\dots,\ a_n$

متتالية هندسية فإن :-

$$a_2 = a_1\, r \quad \ggg \quad r = \frac{a_2}{a_1}$$

$$a_3 = a_2\, r \quad \ggg \quad r = \frac{a_3}{a_2}$$

$$a_4 = a_3\, r \quad \ggg \quad r = \frac{a_4}{a_3}$$

$$a_n = a_{n-1}\, r \quad \ggg \quad r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

مثال :

أي من المتتاليات التالية هندسية واذا كانت ما هو أساسها .

1 - 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , ...

2 - 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ...

3 - 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ...

4 - $1 , \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{8}, \dots\dots$

5 - 1 , -1 , 1 , -1 , 1 , -1 , ...

الحل :-

1 - 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , ...

$\frac{4}{1} = 4 \quad , \quad \frac{9}{4} = 2.25$

∴ ليست هندسية .

2 - 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ...

$\frac{4}{2} = 2 \quad , \quad \frac{8}{4} = 2 \quad , \quad \frac{16}{8} = 2$

∴ متتالية هندسية و اساسها 2 .

3 - 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ...

$\frac{4}{2} = 2 \quad , \quad \frac{6}{4} = 1.5$

∴ ليست هندسية .

4 - $1 , \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{8}, \dots\dots$

$$\frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} \quad , \quad \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad , \quad \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

∴ متتالية هندسية و اساسها $\frac{1}{3}$.

5 - 1 , -1 , 1 , -1 , 1 , -1 , ...

$$-\frac{1}{1} = -1 \quad , \quad \frac{1}{-1} = -1 \quad , \quad -\frac{1}{1} = -1$$

∴ متتالية هندسية و اساسها -1 .

الحد العام للمتتالية الهندسية :-

اذا كانت $\{a_n\} = a_1 , a_2 , \dots\dots\dots , a_3$

متتالية هندسية حدها الأول (a_1) واساسها r فإن :-

$a_2 = a_1\, r$

$a_3 = a_2\, r = a_1\, r^2$

$a_4 = a_3\, r = a_1\, r^3$

$a_5 = a_1\, r^4$

الحد العام للمتتالية :- $\boxed{a_n = a_1\, r^{n-1}}$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (1) و اساسها (2) أوجد حدها العام .

الحل :-

$a_n = 1 \;, \quad r = 2$

$a_n = a_1\, r^{n-1}$

$= (1)\,(2)^{n-1}$

$\boxed{\therefore \quad a_n = 2^{n-1}}$

مثال :-

أوجد الحد العام لكل من المتتاليات الهندسية التالية :-

1- 4 , 16 , 64 , 256 , ...

الحل :-

$a_1 = 4 \;, r = 4$

$\ggg\; a_n = a_1\, r^{n-1}$

$= (4)(4)^{n-1}$

$\boxed{\therefore\; a_n = 4^n}$

2- $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \dots\dots\dots$

$a_1 = 1 \;, \quad r = \frac{1}{2} \;\ggg\; a_n = a_1 r^{n-1} = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\boxed{\therefore a_n = \frac{1}{2^{n-1}}}$

3- -1 , 1 , -1 , 1 , -1 ,..........

$a_1 = -1 \;, \; r = -1 \ggg a_n = a_1 r^{n-1} = (-1)(-1)^{n-1}$

$\boxed{\therefore \quad a_n = (-1)^n}$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الرابع (5) ، وحدها السابع $\left(\frac{1}{25}\right)$أوجد حدها الأول والاساس .

الحل :-

الحد العام للمتتالية الهندسية هو :

$$a_7 = a_1 r^6 = \frac{1}{25} \quad , \quad a_4 = a_1\, r^3 = 5 \quad , \quad a_n = a_1\, r^{n-1}$$

بالقسمة $\frac{a_7}{a_4}$ $\lll$ $\frac{a_1 r^6}{a_1 r^3} = \frac{\left(\frac{1}{25}\right)}{5}$

$$\therefore r = \frac{1}{5} \ggg \quad r^3 = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} \ggg$$

نعوض في معادلة a_4 لإيجاد a_1

$$a_1\, r^3 = 5 \ggg a_1 \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 5 \ggg a_1 \frac{1}{125} = 5 \ggg a_1 = 625$$

مثال :-

متتالية هندسية حدها السادس (1215) ، وحدها العاشر 98415 أوجد حدها الأول والاساس .

الحل :-

الحد العام للمتتالية الهندسية هو :

$$a_{10} = a_1 r^9 = 98415 \quad , \quad a_6 = a_1\, r^5 = 1215 \quad , \quad a_n = a_1\, r^{n-1}$$

بالقسمة $\frac{a_{10}}{a_6}$ $\lll$ $\frac{a_1 r^9}{a_1 r^5} = \frac{98415}{1215}$

$$\therefore r = 3 \qquad \therefore r = \sqrt[4]{81} \ggg r^4 = 81 \ggg$$

نعوض في معادلة a_6 لإيجاد a_1

$$a_1\, r^5 = 1215 \ggg a_1 (3)^5 = 1215 \ggg a_1\, 27 = 1215$$

$$\ggg a_1 = \frac{1215}{27} = 5$$

مثال :-

إذا علمت أن $a_1 = 2 \,,\, a_5 = 1250$ادخل ثلاثة أوساط هندسية بين العددين 2 ، 1250

الحل :

$$a_1 = 2 \,,\, a_5 = 250$$

والمطلوب ايجاد $a_2, a_3 \,,\, a_4$

$$a_5 = a_1 r^4 \ggg 1250 = (2) r^4 \ggg r^4 = \frac{1250}{2} = 625 \gg r^4 = 5^4$$

$$\therefore r = 5$$

$$\therefore a_2 = a_1 r = (2)(5) = 10$$

$$a_3 = a_2 r = (10)(5) = 50$$

$$a_4 = a_3 r = (50)(5) = 250$$

مثال :-

إذا علمت أن $a_1 = 5$, $a_{10} = 2560$ ادخل ثلاثة أوساط هندسية بين العددين 5 ، 2560

الحل :

$a_1 = 5$, $a_{10} = 2560$

والمطلوب ايجاد a_2, a_3 , a_4

$$a_{10} = a_1 r^9 \ggg 2560 = (5)r^9 \ggg r^9 = \frac{2560}{5} = 512 \gg r^9 = 2^9$$

$$\therefore r = 2$$

$$\therefore a_2 = a_1 r = (5)(2) = 10$$

$$a_3 = a_2 r = (10)(2) = 20$$

$$a_4 = a_3 r = (20)(2) = 40$$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (2) وحدها الأخير (486) واساسها (3) أوجد عدد حدودها .

الحل :-

$$a_n = a_1 r^{n-1} \gg 486 = (2)(3)^{n-1}$$

$$(3)^{n-1} = \frac{486}{2} = 243 \gg (3)^{n-1} = (3)^5$$

$$n - 1 = 5 \gg \therefore n = 6$$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (4) وحدها الأخير (2048) واساسها (2) أوجد عدد حدودها .

الحل :-

$$a_n = a_1 r^{n-1} \gg 2048 = (4)(2)^{n-1}$$

$$(2)^{n-1} = \frac{2048}{4} = 512 \gg (2)^{n-1} = (2)^9$$

$$n - 1 = 9 \gg \therefore n = 10$$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (3) وحدها الأخير (3000) واساسها (10) أوجد عدد حدودها .

الحل :-

$$a_n = a_1 r^{n-1} \gg 3000 = (3)(10)^{n-1}$$

$$(10)^{n-1} = \frac{3000}{3} = 1000 \gg (10)^{n-1} = (10)^3$$

$$n - 1 = 3 \gg \therefore n = 4$$

مجموع أول (n) حد من حدود المتتالية الهندسية :-

مجموع أول n حد من **المتتالية الهندسية التى حدها الأول a_1 واساسها r** هو :-

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_n$$

$$\gg \quad S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots\ldots + a_1 r^{n-1} \ldots (1)$$

بالضرب في r تصبح

$$r\,S_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots \ldots\ldots + a_1 r^n \ldots\ldots\ldots (2)$$

بالطرح (1) من (2) تصبح :-

$$r\,S_n - S_n = (a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots \ldots\ldots + a_1 r^n) - (a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots\ldots + a_1 r^{n-1})$$

نختصر الحدود المتشابهة تصبح

$$r\,S_n - S_n = a_1 r^n \;\; a_1 \qquad \gg \qquad S_n (r-1) = a_1 (r^n - 1)$$

∴ مجموع أول n حد هو : $\boxed{S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}}$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (8) واساسها (2) احسب مجموع أول خمسة حدود منها .

الحل :

$$a_1 = 8 \;,\quad r = 2$$

$$S_5 = \frac{a_1(r^5 - 1)}{r - 1} = \frac{(8)(2^5 - 1)}{r - 1} = 8(32 - 1) = 248$$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (10) واساسها (5) احسب مجموع أول ثمانية حدود منها .

الحل :

$$a_1 = 10 \;,\quad r = 5$$

$$S_8 = \frac{a_1(r^8 - 1)}{r - 1} = \frac{(10)(5^8 - 1)}{5 - 1} =$$

$$= 976560$$

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

الحل :-

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (1) واساسها ($\frac{1}{4}$) والمطلوب ايجاد مجموع أول سبعة حدود .

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

$$S_7 = \frac{1\left(\left(\frac{1}{4}\right)^7 - 1\right)}{\frac{1}{4}-1} = \left(\frac{1}{4^7} - 7\right)\left(\frac{4}{-3}\right) = \left(\frac{1}{16384} - 1\right)\left(\frac{4}{-3}\right) = -\frac{16383}{16384} \times \frac{4}{-3}$$

$$S_7 = \frac{10922}{8192}$$

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{10}(5)^{n-1}$$

الحل :-

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (1) واساسها 5 والمطلوب ايجاد مجموع أول عشر حدود .

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

$$S_{10} = \frac{1((5)^{10} - 1)}{5-1} = 2441406$$

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{5}(2.(3)^{n-1})$$

الحل :-

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (2) واساسها 3والمطلوب ايجاد مجموع أول خمس حدود .

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

$$S_5 = \frac{2((3)^5 - 1)}{3-1} = 242$$

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{8}(10.(5)^{n-1})$$

الحل :-

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (10) واساسها 5والمطلوب ايجاد مجموع أول أربع حدود .

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

$$S_8 = \frac{10((5)^8 - 1)}{5-1} = 976560$$

تطبيقات المتتالية في حساب الفائدة البسيطة والفائدة المركبة :-

يكون جملة المبلغ على حساب الفائدة البسيطة في نهاية المدة على شكل متتالية حسابية و تحسب بالقانون .

$$a_n = a_1 + (n)d$$

حيث أن :-

المبلغ في بداية المدة = a_1

عدد السنوات = n

الفائدة السنوية على المبلغ = d

نسبة الفائدة × a_1 = d

مثال :-

أودع شخص مبلغ (10000) ريال لمدة (8) سنوات بفائدة بسيطة 7.5% سنوياً ، أحسب جملة المبلغ في نهاية المدة .

الحل :-

a_1 = 10000

n = 8

$$d = \frac{7.5}{100} \times 10000 = 750$$

المبلغ في نهاية السنة الثانية = a_8

$$a_8 = 10000 + (8)(750)$$

= 10000 + 6000 = 16000 SAR

مثال :-

أودع شخص مبلغ ما لمدة (4.75) سنة بفائدة بسيطة 2% ربع سنوي ،فوجد أن جملة ما له في نهاية المدة قد بلغ 5520 ريال أحسب أصل المبلغ .

الحل :-

a_1 = ?

n = 4.5

$$d = \frac{8}{100} \times a_1 = 0.08\, a_1$$

المبلغ في نهاية المدة = $a_{4.75}$

$$a_{4.75} = a_1 + (4.75)(0.08\, a_1) = 5520$$

a_1(1+4.75× 0.08) = 5520

a_1(1.38) = 5520

$$a_1 = \frac{5520}{1.38} = 4000 \text{ SAR}$$

مثال :-

أودع شخص مبلغ 1000 ريال لمدة ما بفائدة بسيطة 10% سنوياً ،فوجد أن جملة ما له في نهاية المدة قد بلغ 1250 ريال أحسب مدة الاستثمار .

الحل :-

$a_1 = 1000$

n = ?

$d = \frac{10}{100} \times 1000 = 100$

المبلغ في نهاية المدة = $a_?$

$a_? = 1000 + (n)(100) = 1250$

$1250 - 1000 = n.100$

250 = n.100

$n = \frac{250}{100} = 2.5$ سنة

أما الفائدة المركبة فتحسب على أساس المتتالية الهندسية حيث تحسب بالقانون :-

$a_n = a_1 r^n$

حيث جملة المبلغ في نهاية المدة = a_n

المبلغ في بداية المدة = a_1

نسبة الفائدة +1 = r

مثال :-

ادخر شخص مبلغ 8000 ريال بفائدة مركبة 9% لمدة خمس سنوات ، فما هي جملة المبلغ في نهاية المدة .

الحل :-

$a_1 = 8000$

r = 1+ 0.09 = 1.09

n = 5

$a_5 = 8000\,(1.09)^5 = 12308.9$ SAR

مثال :-

ادخر شخص مبلغ 10000 ريال بفائدة مركبة 5% نصف سنوي لمدة 3.5 سنة ، فما هي جملة المبلغ في نهاية المدة .

الحل :-

$a_1 = 10000$

r = 1+ 0.10 = 1.10

n = 3.5

$a_{3.5} = 10000\,(1.10)^{3.5} = 13959.65$ SAR

مثال :-

ادخر شخص مبلغ ما بفائدة مركبة 4% نصف سنوي لمدة 6 سنوات ، فوجد أن جملة المبلغ في نهاية المدة 15868.74322 ريال أوجد أصل المبلغ .

الحل :-

$a_1 = ?$

$r = 1 + 0.08 = 1.08$

$n = 6$

$a_{3.5} = a_1 \, (1.08)^6$

$15868.74322 = a_1 \, (1.08)^6$

$$a_1 = \frac{15868.74322}{1.08^6} = 10000 \text{ SAR}$$

الرغبة هي سر النجاح في الحياة المهنية لكل إنسان

المحاضره السابعة

المصفوفات (Matrices)

1 – المصفوفات :-

المصفوفة: **هي عدد من العناصر موضوعة على شكل صفوف وأعمدة ويرمز لها بأحد الحروف الهجائية الكبيرة** ,...,A,B,C ومن الأمثلة على المصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 12 & 3 \\ -5 & 5 & -6 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 2 \\ 0 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

رتبة المصفوفة:-

رتبة المصفوفة **تساوي عدد الصفوف×عدد الاعمدة**.

مثال:

رتبة المصفوفة A هي 3×4 وتكتب على الصورة $A_{3\times4}$.

رتبة المصفوفة B هي 4×2 وتكتب على الصورة $B_{4\times2}$.

رتبة العنصر:-

رتبة العنصر a هي **موقعه في الصف والعمود** أي العنصر في الصف i والعمود j = a_{ij}

مثال:-

في المصفوفة A السابقة أوجد العناصر a_{21} , a_{32} , a_{24}.

الحل:-

العنصر a_{21} : العنصر في الصف الثاني العمود الأول **$a_{21} = -5$**

العنصر a_{32} : العنصر في الصف الثالث العمود الثاني **$a_{32} = -6$**

العنصر a_{24} : العنصر في الصف الثاني العمود الرابع **$a_{24} = 7$**

أنواع المصفوفات :-

1- المصفوفة الصفرية:

المصفوفة **التي يكون جميع عناصرها أصفار**.

مثال:-

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

← **مصفوفة صفرية رتبتها 2×3**

2- المصفوفة المربعة:

المصفوفة المربعة هي **المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف = عدد الاعمدة**.

مثال:-

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{2\times2} \qquad , \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & -2 & -8 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

المصفوفة A **مصفوفة مربعة من الرتبة 2×2** (أي من الرتبة الثانية).

المصفوفة B **مصفوفة مربعة من الرتبة 3×3** (أي من الرتبة الثالثة).

3- المصفوفة القطرية:

هي مصفوفة المربعة **التي يكون جميع العناصر فيها غير القطر الرئيسي أصفار**.

مثال:-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4- المصفوفة المحايدة:

المصفوفة القطرية التي يكون عناصر القطر الرئيسي تساوي واحد ويرمز لها بالرمز I_n حيث n تمثل عدد صفوف المصفوفة (رتبتها).

مثال:-

$$I3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad , \quad I4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5- المصفوفة المثلثية:

وتنقسم إلى قسمين :

أ – المصفوفة المثلثية العليا:

المصفوفة التي يكون فيها جميع العناصر تحت القطر الرئيسي أصفار .

مثال:-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

ب – المصفوفة المثلثية السفلى:

المصفوفة التي يكون فيها جميع العناصر فوق القطر الرئيسي أصفار .

مثال:-

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

6- المصفوفة المبدلة (Transpose of matrix):
منقول المصفوفة أو مبدل المصفوفة **هي تبديل الصفوف بالأعمدة والاعمدة بالصفوف ويرمز لها بالرمز A^T.**

مثال:-

أوجد منقول كل من المصفوفات التالية :

$$1/\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3} \qquad 2/\ B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

الحل:-

$$1/\ A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times2} \qquad 2/\ B^T = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

7- المصفوفة المتماثلة (Symatric matrix):
تكون المصفوفة متماثلة اذا كانت $A = A^T$.

مثال:-

اي من المصفوفات التالية متماثلة:

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad 2)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

الحل:-

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \ ,\ A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \ ,\ A \neq A^T$$
∴ **A ليست متماثلة**

$$2)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} ,\ B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} ,\ B = B^T$$
∴ **B متماثلة**

العمليات على المصفوفات :-

1- الجمع والطرح:
عند جمع أو طرح مصفوفتين يجب أن تكونا من نفس الرتبة ونجمع أو نطرح العناصر المتناظرة.

مثال:-

أوجد ناتج ما يلي:

$$1/\ A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$2/\ A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3} - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

الحل :

$$1\text{-}\ A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 11 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$2\text{-}\ A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3} - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

2- الضرب بعدد ثابت:

عند ضرب مصفوفة بعدد ثابت فإننا نضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بالعدد.

مثال:-

اذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

أوجد ما يلي:

$3A$ (1

$2B$ (2

$3A - 2B$ (3

الحل:-

$$\textbf{1)}\quad 3A = 3 \times \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 4 & 3\times 9 \\ 3\times 6 & 3\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 \\ 18 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{2)}\quad 2B = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 1 & 2\times 1 \\ 2\times 2 & 2\times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{3)}\quad 3A - 2B = \begin{bmatrix} 12 & 27 \\ 18 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 14 & -1 \end{bmatrix}$$

3- ضرب المصفوفات:

عند **ضرب مصفوفتين** يجب أن تكون **عدد أعمدة الاولى يساوي عدد صفوف الثانية** وعند **الضرب نضرب الصف i في المصفوفة الاولى بالعمود j في المصفوفة الثانية لينتج العنصر a_{ij} في المصفوفة الناتجة.**

ويتم الضرب: **صف (صف من المصفوفة الأولى) في عمود (عمود من المصفوفة الثانية).**

مثال :-

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4\times 3}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

احسب:

1) AB

2) BA

الحل :

$$\textbf{1)}\quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\times 2 + 4\times 3 \pm 1\times -1) & (1\times 0 + 4\times 1 \pm 1\times 4) \\ (5\times 2 + 6\times 3 + 2\times -1) & (5\times 0 + 6\times 1 + 2\times 4) \\ (2\times 2 + 1\times 3 + 7\times -1) & (2\times 0 + 1\times 1 + 7\times 4) \\ (3\times 2 + 0\times 3 + 4\times -1) & (3\times 0 + 0\times 1 + 4\times 4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+12+1 & 0+4-4 \\ 10+18-2 & 0+6+8 \\ 4+3-7 & 0+1+28 \\ 6+0-4 & 0+0+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 26 & 14 \\ 0 & 29 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

2) BA

لا تجوز عملية الضرب لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى لا تساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية.

ملاحظة:

1- اذا كانت $A_{m\times n}$ وكانت $B_{n\times k}$ فإن $(AB)_{m\times k}$.

مثال 1:-

اذا كانت $B_{5\times 6}$ ، $A_{3\times 5}$ فأوجد رتبة AB.

الحل:-

$$A_{m\times n} \times B_{n\times k} = AB_{m\times k}$$
$$A_{3\times 5} \times B_{5\times 6} = AB_{3\times 6}$$

و نستنتج من هذا المثال أن:

$$AB \neq BA$$

مثال 2:-

اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ فأوجد A^2

الحل:-

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (2\times 2 + 4\times 6) & (2\times 4 + 4\times 5) \\ (6\times 2 + 5\times 6) & (6\times 4 + 5\times 5) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 28 & 28 \\ 42 & 49 \end{bmatrix}$$

مثال 3:-

اذا كانت

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

وكانت $C = AB, D = BA$

فأوجد ما يلي:

$$c_{12} \ , \ c_{33} \ , \ d_{21} \ , \ d_{13}$$

الحل:-

1) حاصل ضرب الصف الأول من المصفوفة A بالعمود الثاني من المصفوفة $\mathbf{B} = c_{12}$.

$$\Rightarrow c_{12} = 3\times 1 + 4\times 2 + 5\times 5 = 3 + 8 + 25 = 36$$

2) $c_{33} = 6\times -1 + 4\times 6 + 7\times 0 = -6 + 24 + 0 = 18$

3) $d_{21} = 4\times 3 + 2\times 2 + 6\times 6 = 12 + 4 + 36 = 52$

4) $d_{13} = 1\times 5 + 1\times 0 + -1\times 7 = \ = 5 + 0 - 7 = -2$