بسم الله الرحمن الرحيم

ملخص

مبادئ رياضيات (١)

للدكتور :- نبيل منصور

من إعداد

صدى الأمل - Shosh

المحاضره الأولى
المجموعات Sets

تعريف المجموعة :-

المجموعة هي **تجمّع من الأشياء أو العناصرالمحددة تماما وقد تكون هذه الأشياء أعدادا أوأشخاصا أوأحداثا أوأي شيء آخر**

نرمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل: ... ,A, B, C

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر ونرمز للعناصر بواسطة حروف صغيرة مثل: ... ,a, b, c

١) أرقام العدد ٢٦٣٤ تعبير يدل على **مجموعة لأنه محدد و عنصره هي {٤, ٣, ٦, ٢}.**

٢) شهور السنة الميلادية تعبير يدل **على مجموعة لأنه محدد تبدأ من يناير إلى ديسمبر.**

٣) الفاكهة اللذيذة تعبير لا يدل على **مجموعة لأنه غير محدد حيث أن الفاكهة اللذيذة بالنسبة للشخص قد تكون غير لذيذة بالنسبة للشخص آخر.**

٤) الأعداد الطبيعية الأقل من ٦. {٥, ٤, ٣, ٢, ١}

يستخدم الرمز ϵ "ينتمي إلى" **ليبين عناصر المجموعة** فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول **أن a ينتمي إلى المجموعة A و يكتب بالصورة a ϵ A**

أما إذا كان a ليس عنصراً من عناصر المجموعة A فإننا نقول **أن العنصر a "لا ينتمي إلى" المجموعة A ويكتب على الصورة**

$a \notin A$

طريقة كتابة المجموعات :

طريقة العد (سرد العناصر):-

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة " , " :-

مثال :-

A = { ١, ٥, ١٠, ١٥ }

B= { a, b, c, d }

C= { ١, ٢, ٣, ...}

(وهي مجموعة منتظمة تسير بنفس الشكل ١ ٢ ٣ ٤ وهكذا)

A = { ١, ٢, ٣,...,١٠٠}

(وهي مجموعة مغلقة ولكن المساحة لا تكفي لكتابة من ١ إلى ١٠٠ و سوف نستخدم النقاط للتعبيرعن بعض العناصر).

طريقة القاعدة (الصفة المميزة) :-

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها ، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ،فمثلاً :

A = { x : عدد فردي x }

B = { x : كلية بجامعة الملك فيصل x }

C = { x : طالب بنظام التعليم عن بعد x }

D = { x : -3 ≤ x ≤ 1 عدد صحيح x }

X = { x : 0 ≤ x ≤ 12 عدد صحيح x}

أنواع المجموعات :-

هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز ɸ (فاي) أو { } .

أمثلة :-

$A = \{ x :$ عدد زوجي وفردي $x \}$

$B = \{ x :$ دولة عربية تقع في أوروبا $x \}$

المجموعة المنتهية (finite set):-

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة.

مثال :

المجموعات التالية هي مجموعات منتهية.

$$A = \{ 2 , 4 , 6 , 8 \}$$

$$B = \{ 1 , 2 , 3 , \ldots\ldots , 100 \}$$

$$C = \{ x , y , s , t , u \}$$

المجموعة غير المنتهية (Infinite set):-

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة (وهي المجموعة التي لا يمكن تحديد عناصرها بشكل دقيق)

مثال :

المجموعات التالية هي مجموعات غير منتهية.

$A = \{ x :$ عدد طبيعي فردي $\}$

$$B = \{ 10, 20 , 30 , \ldots\ldots\ldots \}$$

المجموعة الكلية (Universal set):-

وهي مجموعة كل العناصر قيد الدراسة ويرمز لها بالرمز U وتعطى ضمن السؤال أو الدراسة.

مثال:

$U = \{ x :$ أستاذ أو طالب بجامعة الملك فيصل $x \}$

المجموعة الجزئية (Subset):-

تكون A مجموعة جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B وتكتب على الصورة : $A \subset B$ و تقرأ A جزء من B.

مثال:

١- إذا كانت المجموعة { ٢ , ٤ , ٦ } = A و { ١ , ٢ , ٣ , ٤ , ٥ , ٦ } = B فإن $A \subset B$.

٢- المجموعة المكونة من جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة **جزئية** من مجموعة طلاب هذه الجامعة.

تساوي المجموعات :-

تكون المجموعتان A و B متساويتان إذا كانت :-

$$A = B \quad \ggg\ggg \quad A \subseteq B \ , \ B \subseteq A$$

أما <u>المجموعتان المتكافئتان</u> فهما المجموعتان اللتان **<u>تتساويان في عدد عناصرها</u>** وتكتب على الصورة $A \equiv B$

مثال :-

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

١- A = {١, ٥, ٧ , ٩ } , B = {٩ , ٧ ,٥ ,١ }
٢- A = {٢ , ٥ , ٩ } , B = { a , s , d }
الحل :-

١ – A = B
٢ – A ≡ B

<u>الاتحاد :-</u>

اتحاد المجموعتين A و B (A U B) <u>هو مجموعة كل العناصر الموجودة فى A أو فى B أو في كليهما</u> .
مثال :- إذا كان {٧ , ٣ , ٢ , ١ } = A و { ٨ , ٦ , ٤ , ٢ } = B أوجد (AUB) ؟
الحل :-
(AUB) = {١ ,٢ , ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨}

<u>التقاطع :-</u>

تقاطع المجموعتين A و B (A∩B) <u>هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A و فى B معاً أي العناصر المشتركة بين A و B</u> .
مثال :-
إذا كان {٣ , ٢ , ١ , ٠ , ١- } = A و {٠,٢,٤,٦,} = B أوجد A ∩ B
الحل :-
(A ∩ B) = {٠ , ٢ }

<u>المكملة أو المتممة :-</u>
يقال أن $\bar{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على **<u>جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A</u>.**
مثال :-
إذا كان {١,٢,٣,٤,٥,٦,٧,٨,٩,١٠ } = U و {٢,٤,٦,٨,١٠} = A أوجد $\bar{A}$.
الحل :- $\bar{A}$ **= {١,٣,٥,٧,٩}**

<u>الفرق :-</u>
إذ كانت مجموعتان A و B فإن A-B يسمى بالفرق **<u>وهو مجموعة كل العناصر الموجودة فى A وليست فى B</u>.**
مثال :-
إذا كانت {١,٢,٣,x,y} = A و {٣,٤,٥,x,w} = B أوجد A-B
الحل :- A-B = { ١ , ٢ , y }

مثال :-
إذا كانت
$A=\{1,2,3,x,y\}$ و
$B=\{3,4,5,x,w\}$
و المجموعة الكلية
$U = \{ 1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$
فأوجد :-

1- $A \cup B$
2- $A \cap B$
3- $B - A$
4- $\overline{A}$
5- $\overline{B}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B}$
8- $\overline{A} \cup A$
9- $\overline{A} \cap A$

1- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, w\}$
2- $A \cap B = \{3, X\}$
3- $B - A = \{4, 5, w\}$
4- $\overline{A} = \{4, 5, w, z\}$
5- $\overline{B} = \{1, 2, y, z\}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, y, w, z\}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B} = \{z\}$
8- $\overline{A} \cup A = U$
9- $\overline{A} \cap A = \{ \}$

مجموعات الاعداد :-

أ - مجموعة الأعداد الطبيعية (Natural numbers) :
وهي أصغر مجموعات الأعداد وتسمى أيضا مجموعة العد وتحتوى على الأعداد الصحيحة الموجبة.
N={ ١ , ٢ , ٣ , ٤ , ... }

ب - مجموعة الأعداد الصحيحة (Integer numbers) :
هي مجموعة الأعداد الموجبة والسالبة بالإضافة إلى الصفر.
I={ ... , -٣ , - ٢ , -١ , ٠ , ١ , ٢ , ٣ , ... }

ج - مجموعة الأعداد النسبية (Rational numbers) :
العدد النسبي هو العدد الذي يكتب على الصورة $\frac{a}{b}$ بحيث $a,b\in I$ ، $b\neq 0$ وتحوى على الأعداد الصحيحة بالإضافة إلى الكسور مثل $\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{7}{6},\frac{8}{10},\frac{9}{1},\frac{14}{1},.........$

ويرمز لها **بالرمز Q .**

د - مجموعة الأعداد غير النسبية (Irrational numbers) :
العدد الغير النسبي **هو العدد الذي لا يمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$ بحيث** $\sqrt{2},\sqrt{6},\sqrt{10},\sqrt{20},......$
مثل جذور الأعداد التي ليست مربع كامل

د - مجموعة الأعداد الحقيقية (Real numbers) :

وتحوي **مجموعة الأعداد النسبية و غير النسبية ويرمز لها بالرمز R.** و تمثل بخط مستقيم يسمى خط الأعداد حيث يمتد من طرفيه من ∞- إلى ∞ ومنتصفه تكون نقطة الصفر و على يسار الصفر الأعداد السالبة وعلى يمينه الأعداد الموجبة كالأتي

وأي جزء من هذا الخط يكون **مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية و يسمى فترة (Interval).**

الفترة :-

تعرف الفترة كما ذكرنا سابقا بأنها **مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية وهي الأعداد التي تمتد من النقطة a إلى النقطة b و تكتب حسب نوعها** كالآتي:

$$(a , b) = \{x \in R : a < x < b\}$$
$$[a , b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$$
$$[a , b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$$

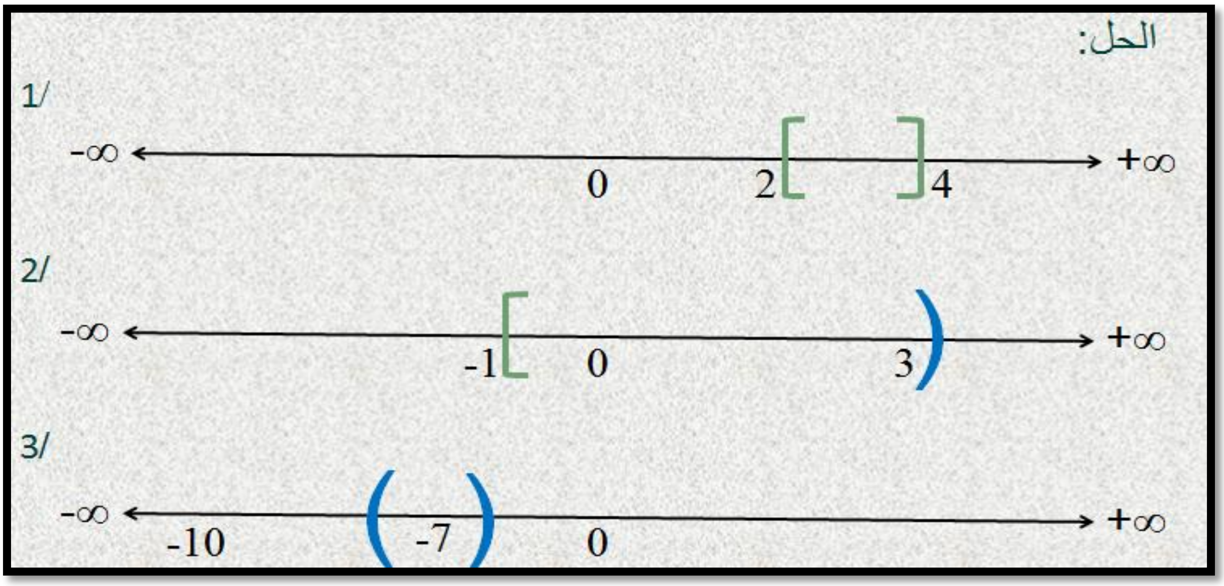
مثال : -

مثل الفترات التالية على خط الأعداد:

١- [٢ , ٤]

٢- [-١ , ٣)

٣- (-١٠ , -٧)



مثال :-

إذا كانت الفترات [١ , ٤] = B و (٣ , ٢-] = A فأحسب ما يلي:

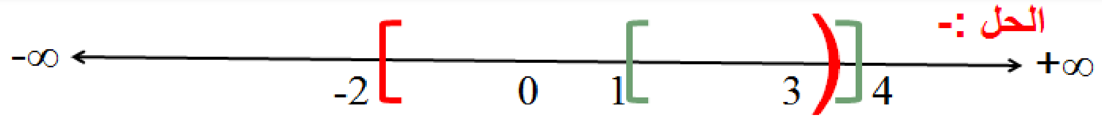
1- $A \cap B$

2- $A \cup B$

3- $A - B$

4- $B - A$

الحل :-



1- $A \cap B = [1, 3)$

2- $A \cup B = [-2, 4]$

3- $A - B = [-2, 1)$

4- $B - A = [3, 4]$

مجموعة المجموعات :-

مجموعة المجموعات لأية مجموعة S هى المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية Ø و المجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز P(S) .

مثال :-

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة S = {a , b , c}

الحل :-

$$P(s) = \{ \{a\} , \{b\} , \{c\} ,\{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} ,\{a,b,c\} ,\emptyset \}$$

ملاحظة : إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر ، فان عدد عناصر P(S) يساوي 2^n .

مثال :-

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة S = { a, b , c }

الحل :-

$$P(S) = \{ \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{a,c\} ,\{b,c\} ,\{a,b,c\} , \emptyset \}$$

$$2^3 = 8$$

تمارين :

١/ وضح أي من هذه المجموعات هي مجموعة خالية أو مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية :-

(a) A ={x: x عدد سالب و موجب }

(b) B = {3 ,6 ,9 ,12 }

(c) C = {x: x دولة أوربية تقع في شبة الجزيرة العربية }

(d) D = { 2 , 4 , 6 , ...,100}

(e) E = { 100 , 200 , 300 ,.......}

(f) F = { w , e , r , t }

٢- إذا كانت A = {٣ , ٥ , ٧ } و B = { ١,٢,٣,٤,٥,٦,٧,٨} فهل يمكن القول أن $A \subset B$ ؟

٣- أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

١- A = {٥ ,١٠,١٥,٢٠} , B = {١٥,١٠,٥, ٢٠}

٢- A = { ٢٠,٥٠,٧٠} , B = { k , d , u }

4- إذا كانت A={8,10,12,r,m} و B={4,6,10,o,r}

أوجد المجموعة الكلية ثم أوجد :-

1- $A \cup B$

2- $A \cap B$

3- $B - A$

4- $\overline{A}$

5- $\overline{B}$

6- $\overline{A} \cup \overline{B}$

7- $\overline{A} \cap \overline{B}$

8- $\overline{A} \cup A$

9- $\overline{A} \cap A$

٥- أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة S = {٢ , ٥ , ٨} ؟

٦- إذا احتوت المجموعة S على ٥ من العناصر، فأوجد عدد عناصر P(S) ؟

لا تقل قد ذهبت أربابه كل من سار على الدرب وصل

المحاضره الثانيه

المجموعات والاقترانات

تابع المجموعات: مجموعة المجموعات:-

مجموعة المجموعات لأية مجموعة منتهية S هى المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية Ø و المجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز P(S).

مثال :-

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة S = {a , b , c}

الحل :-

$$P(s) = \{ \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} , \{a,b,c\} , Ø \}$$

ملاحظة : إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر ، فان عدد عناصر P(S) يساوى ٢^n .

مثال :-

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة S = { x , w , z }

الحل :-

عدد عناصر P(S) يساوي $2^3 = 8$

$$P(S) = \{ \{x\} , \{w\} , \{z\} , \{x,w\} , \{x,z\} ,\{w,z\} , \{x,w,z\} , Ø \}$$

تمارين :

١/ وضح أي من هذه المجموعات هي مجموعة خالية أو مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية :-

(a) A ={x: عدد سالب وموجب x}

(b) B = {3 ,6 ,9 ,12 }

(c) C = {x: دولة أوربية تقع في شبة الجزيرة العربية x }

(d) D = { 2 , 4 , 6 , …….,100}

(e) E = { 100 , 200 , 300 ,…….}

(f) F = { w , e , r , t }

٢- إذا كانت A = {٣ , ٥ , ٧ } و B = { ١,٢,٣,٤,٥,٦,٧,٨} فهل يمكن القول أن A ⊂ B ؟

٣- أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

١- A = {٥ ,١٠,١٥,٢٠} , B = {١٥,١٠,٥, ٢٠}

٢- A= { ٢٠,٥٠,٧٠} , B = { k , d , u }

4- إذا كانت A={8,10,12,r,m} و B={4,6,10,o,r}
أوجد المجموعة الكلية ثم أوجد :-

1- A∪B
2- A ∩ B
3- B – A
4- $\overline{A}$
5- $\overline{B}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B}$
8- $\overline{A} \cup A$
9- $\overline{A} \cap A$

٥- أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة {٨ , ٥ , ٢} = S ؟
٦- إذا احتوت المجموعة S على ٥ من العناصر، فأوجد عدد عناصر P(S) ؟

ثانياً : الاقترانات (الدوال) Functions :-

يعرف الاقتران *f* بأنه قاعدة (rule) تعطى قيمة وحيدة (unique value) كنتيجة لتعويض قيمة المتغير *x* فيه وتمثل هذه القيمة أو النتيجة قيمة *y* المقابلة لقيمة *x* المستخدمة بالتعويض. أي أن:

$f : A \rightarrow B$

$x \longmapsto f(x)$

ملاحظة: إذا كان *f* اقتران من *A* إلى *B* فإن *A* يسمى **مجال** الاقتران ويسمى *B* **بالمجال المقابل** كما تسمى مجموعة الصور **بالمدى**.
حتى يكون *f* اقتران لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال صورة وصورة واحدة فقط فى المجال المقابل.
١- إقتران كثير الحدود : ويكون على الصورة :-
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 x + a$
وتكون درجة كثير الحدود بقيمة أعلى أس لـ (x) في الاقتران .

مثال :-

ما هي درجة كل من الاقترانات كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 3$
2- $f(x) = 3x - 4$
3- $f(x) = x^2 - x + 1$
4- $f(x) = x^3 + x^7 + 5x - 7$
5- $f(x) = 2 - 3x + x^3$

١- f(x) = ٣

الدرجة الصفرية و يسمى أيضاً اقتران ثابت.

٢- f(x) = ٣x – ٤

الدرجة الأولى ويسمى اقتران خطى.

٣- $f(x) = x^{٢} - x + ١$

الدرجة الثانية أو اقتران تربيعى.

٤- $f(x) = x^{٣} + x^{٧} + ٥x – ٧$

الدرجة السابعة.

٥- $f(x) = ٢ – ٣x + x^{٣}$

الدرجة الثالثة أو اقتران تكعيبى

العمليات الحسابية على كثيرات الحدود :

- الجمع و الطرح :-

يتم جمع أو طرح كثيرات الحدود بجمع أو طرح معاملات المتغيرات المتشابهة الأسس.

مثال (1) :-

1- $(3x^3 – 4x^2 + 6) + (x^4 – 2x^3 – 4x + 3)$

الحل :-

$$(3x^3 – 4x^2 + 6) + (x^4 – 2x^3 – 4x + 3) = x^4 + x^3 – 4x^2 – 4x + 9$$

مثال (2) :-

2- $(6x^5 + 3x^3 – 4x + 5) – (3x^5 + x^4 – 2x^2 – 4x + 7)$

الحل :-

$$(6x^5 + 3x^3 – 4x + 5) – (3x^5 + x^4 – 2x^2 – 4x + 7) = 3x^5 – x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 2$$

٢- الضرب :-

يتم ضرب كثيرى حدود $f(x)$، $h(x)$ بضرب كل حد من حدود $f(x)$ بكافة حدود $h(x)$.

مثال (1):

اذا كان $f(x) = (3x^2 – 5x + 4)$ ، وكان $h(x) = (x^2 + 2x - 1)$ فجد $(f.h)(x)$.

الحل :-

$$(f.h)(x) = (3x^2 – 5x + 4)(x^2 + 2x - 1)$$
$$= 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 5x^3 - 10x^2 + 5x + 4x^2 + 8x - 4$$
$$= 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 13x - 4$$

مثال (2):

اذا كان $f(x) = (2x^2 + 3x)$ ، وكان $h(x) = (x^3 + 5x - 8)$ فجد $(f.h)(x)$.

الحل :-

$$(f.h)(x) = (x^3 + 5x - 8)(2x^2 + 3x)$$
$$= 2x^5 + 10x^3 - 16x^2 + 3x^4 + 15x^2 - 24x$$
$$= 2x^5 + 3x^4 + 10x^3 - x^2 - 24x$$

٣- القسمة:-

يتم قسمة كثيرى حدود باستخدام خوارزمية القسمة الطويلة

مثال (1):

اذا كان $f(x) = (x^4 - 3x^2 + 5)$ ، وكان $h(x) = (x^2 - 4)$ فجد $f(x) \div h(x)$.

الحل :-

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 1 \\
\hline
x^2 - 4 & x^4 - 3x^2 + 5 \\
 & -x^4 + 4x^2 \\
\hline
 & \quad x^2 + 5 \\
 & \quad -x^2 + 4 \\
\hline
 & \qquad 9
\end{array}
$$

ويكون ناتج القسمة $x^2 + 1$ وباقي القسمة 9.

٣- القسمة:-

يتم قسمة كثيرى حدود باستخدام خوارزمية القسمة الطويلة.

مثال (1):

اذا كان $f(x) = (5x^5 + 10x^3)$ ، وكان $h(x) = (x^3)$ فجد $f(x) \div h(x)$.

الحل :-

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^2 + 10 \\
\hline
x^3 & 5x^5 + 10x^3 \\
 & 5x^5 \\
\hline
 & \quad 10x^3 \\
 & \quad 10x^3 \\
\hline
 & \quad -
\end{array}
$$

ويكون ناتج القسمة $5x^2 + 10$ وباقي القسمة 0.

أطلب العلم ولا تكسل فما أبعد الخير عن أهل الكسل

المحاضره الثالثة
تابع الاقترانات

٢- الاقتران النسبي :-

الاقتران النسبي هو اقتران مكون من كثيرى حدود على شكل بسط ومقام على الصورة كثير الحدود .

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \quad h(x) \neq 0 \quad , g(x) \quad , \quad h(x)$$ كثيري حدود

مثال :-

ما هو مجال كل من الاقترانات النسبية التالية :-

$$1\text{- } f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$2\text{- } f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$3\text{- } f(x) = \frac{2x-3}{x^2-4}$$

الحل :-

١- $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

يكون الاقتران النسبى معرف على الاعداد الحقيقية عدا اصفار المقام وفى هذ الاقتران لا يوجد عدد حقيقى يجعل المقام صفر إذاً مجال الاقتران R .

٢- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

نساوى المقام بالصفر فيكون (X-١ = ٠) إذاً X=١ إذا المجال $R \backslash \{1\}$

٣- $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-4}$

نساوى المقام بالصفر فيكون (X٢- ٤ = ٠ ← X٢= ٤) إذاً X= ± 2 إذا المجال $R \backslash \{-2, 2\}$.

العمليات الحسابية على الاقترانات النسبية :-

١- الجمع والطرح :-

توحد المقامات كما فى الأعداد

مثال (1): اوجد ناتج ما يلي :

$$\frac{X+1}{2X-5} + \frac{3X+1}{X-2}$$

الحل :-

$$\frac{X+1}{2X-5} + \frac{3X+1}{X-2} = \frac{(X+1)(X-2)}{(2X-5)(X-2)} + \frac{(3X+1)(2X-5)}{(X-2)(2X-5)}$$

$$= \frac{(X^2-X-2)+(6X^2-13X-5)}{(X-2)(2X-5)}$$

$$= \frac{7X^2-14X-7}{2X^2-9X+10}$$

مثال (2): اوجد ناتج ما يلي :-

$$\frac{X}{3X+2}+\frac{5X^2+2}{2X-2}$$

الحل :-

$$\frac{X}{3X+2}+\frac{5X^2+2}{2X-2}=\frac{(X)(2X-2)}{(3X+2)(2X-2)}+\frac{(5X^2+2)(3X+2)}{(2X-2)(3X+2)}$$

$$=\frac{(2X^2-2X)+(15x^3+10X^2+6X+4)}{(3X+2)(2X-2)}$$

$$=\frac{15X^3+12X^2+4X+4}{6X^2-2X-4}$$

٢- الضرب :-

نضرب البسط فى البسط والمقام فى المقام.

مثال (1):-

$$\frac{2X+3}{X+1}\times\frac{X-2}{3X+4}$$

الحل:-

$$\frac{2X+3}{X+1}\times\frac{X-2}{3X+4}=\frac{(2X+3)(X-2)}{(X+1)(3X+4)}=\frac{2X^3-X-6}{3X^2+7X+4}$$

مثال (2):-

$$\frac{X^2+10}{2X+5}\times\frac{3X-5}{X+2}$$

الحل:-

$$\frac{X^2+10}{2X+5}\times\frac{3X-5}{X+2}=\frac{(X^2+10)(3X-5)}{(2X+5)(X+2)}=\frac{3X^3-5X^2+30X-50}{2X^2+9X+10}$$

٣- القسمة :-

نحول عملية القسمة إلى عملية ضرب بقلب الكسر الثانى.

مثال:-

$$\frac{3X+2}{X^2+1}\div\frac{X+5}{X^2}$$

الحل:-

$$\frac{3X+2}{X^2+1}\div\frac{X+5}{X^2}=\frac{3X+2}{X^2+1}\times\frac{X^2}{X+5}$$

$$=\frac{3X^3+2X^2}{X^3+5X^2+X+5}$$

٣- الاقتران الأسي :-

الاقتران الأسي **هو اقتران مجاله الأعداد الحقيقية ومجاله المقابل الاعداد الحقيقية الموجبة**، أي أن:

$$f : R \longrightarrow R^{+}$$

$$x \longmapsto f(x) = a^{x}$$

حيث a عدد حقيقي موجب. يسمى a: الأساس، x: الاس. ومن الأمثلة على الاقترانات الاسية:

- $f(x) = 10^{x}$
- $f(x) = e^{x}$
- $f(x) = 2^{x}$

-اذا كان الاساس e فان الاقتران يسمى **اقتران الاس الطبيعي.**

- اذا كان الاساس يساوي ١٠ فان **الاقتران يسمى الاس العشري**

١- $a^{x} . a^{y} = a^{x+y}$

٢- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

٣- $(a^{x})^{y} = a^{xy}$

٤- $a^{x} . b^{x} = (ab)^{x}$

٥- $a^{0} = ١$

٦- $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

٧- $a^{-x} = \frac{1}{a^{x}}$

مثال (١):-

بسط المقادير التالية إلى أبسط صورة:

١) $\frac{(2^3)\sqrt[3]{4^7}}{(2^2)\sqrt[3]{4}}$

$$\frac{(2^3)\sqrt[3]{4^7}}{(2^2)\sqrt[3]{4}} = \frac{(2^3)(4^{\frac{7}{3}})}{(2^2)(4^{\frac{1}{3}})}$$

$$= 2^{3-2} . 4^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{1} . 4^{\frac{6}{3}}$$

$$= 2 \,.\, 4^{2}$$

$$= 2 . 4^{2}$$

$$= 2 \times 16$$

$$= ٣٢$$

٢) $\frac{2(\sqrt{3})(\sqrt{8})(3^4)}{9(\sqrt{6})((4^2)}$

$$\frac{2(\sqrt{3})(\sqrt{8})(3^4)}{9(\sqrt{6})((4^2)} = \frac{2.3^{\frac{1}{2}}.8^{\frac{1}{2}}.3^{4}}{9.6^{\frac{1}{2}}.4^{2}}$$

$$= \frac{2.3^{\frac{1}{2}}.(4.2)^{\frac{1}{2}}.3^{4}}{(3.3)(2.3)^{\frac{1}{2}}.4^{2}}$$

$$= \frac{2.3^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}}.4^{\frac{1}{2}}.3^{4}}{3^{2}.2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}}.4^{2}}$$

$$= \frac{2.2.3^{4}}{3^{2}.2^{4}} = 2^{2-4} . 3^{4-2}$$

$$= 2^{-2}.3^{2} = \frac{9}{4}$$

٣) $\frac{(e)(\sqrt{e})(e^{2x})}{(e^{x})(e^{x})^{-3}(e)^{\frac{3}{2}}} =$

$$\frac{(e)(\sqrt{e})(e^{2x})}{(e^{x})(e^{x})^{-3}(e)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e.e^{\frac{1}{2}}.e^{2x}}{e^{-2x}.e^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{e^{\frac{3}{2}}.e^{2x}}{e^{-2x}.e^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{e^{2x}}{e^{-2x}}$$

$$= e^{2x+2x}$$

$$= e^{4x}$$

<u>مثال (٢):</u>-

حل المعادلات الاسية التالية:

١) $3^{2x-1} = 243$

$$3^{2x-1} = 243 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^{5}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 5$$

$$\Longrightarrow 2x = 6$$

$$\Longrightarrow x = \frac{6}{2}$$

$$\Longrightarrow x = 3$$

٢) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{16}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$

نجاحك وسعادتك تكمن فيك

المحاضره الرابعة

المعادلات والمتباينات

أولاً : المعادلات :-

يحتل موضوع المعادلات مكانه كبيرة في علم الرياضيات وهو من أقدم المواضيع التي طرحت للبحث، وفي هذه الوحدة سنتطرق إلى حل المعادلات الخطية والتربيعية بالإضافة إلى حل انظمة المعادلات، نظام معادلتين بمجهولين، ويقصد بحل المعادلة هي ايجاد قيمة المتغير أو المتغيرات الموجودة في المعادلة ..

أ – حل المعادلات الخطية :-

إن **المعادلة الخطية** هي **معادلة في متغير واحد ومن الدرجة الاولى أي أن أكبر أس في المعادلة هو واحد** والشكل العام للمعادلة الخطية هو :-

ax + b = ٠

مثال :-

حل المعادلة الخطية التالية:

٢x – ٣ = ٠

الحل :-

٢x – ٣ = ٠

٢x = ٣

$$x = \frac{3}{2}$$

ب – حل المعادلة التربيعية :-

المعادلة التربيعية **يكون أكبر أس فيها هو أثنين** و تأخذ الصورة :-

ax٢ + bx + c = ٠

وهناك العديد من الطرق لحل هذه المعادلة ولكننا سوف نعتمد على القانون العام للحل، حيث أنه من أسرع هذه الطرق و أكثرها دقة و يأخذ القانون العام الشكل التالي :-

$$\boxed{x = \frac{-b \mp \sqrt{b^{٢} - ٤ac}}{٢a}}$$

ويسمى المقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ و هو ما أسفل الجذر بالمميز .

وهناك ثلاث حالات للحل بهذه الطريقة و هي :

١ – الحالة الأولى: اذا كان المميز (٠ <Δ) **فيوجد حلين للمعادلة.**

$$\left(x_{١} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{٢a} \quad , \quad x_{٢} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{٢a} \right)$$

٢ – الحالة الثانية: اذا كان المميز (٠ =Δ) **فيوجد حل وحيد للمعادلة .**

$$x = \frac{-b}{٢a}$$

٣ – الحالة الثالثة: اذا كان المميز (٠ >Δ) **فلا يوجد حل حقيقي للمعادلة**

مثال :-

حل المعادلات التربيعية التالية :

١) $X^2 + 2x - 3 = 0$

$a = 1, \; b = 2, \; c = -3$

$\Delta = (2)^2 - 4 \times 1 \times -3 = ١٦ > ٠$

∴ **يوجد حلين للمعادلة هما:**

■ $x_١ = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3$

■ $x_٢ = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$

---

٢) $3X^2 - 4x + 5 = 0$

$a = 3, \; b = -4, \; c = 5$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 5 = -44 < 0$

∴ **لا يوجد حل حقيقي للمعادلة.**

---

٣) $X^2 - 2x + 1 = 0$

$a = 1, \; b = -2, \; c = 1$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$

∴ **يوجد حل وحيد للمعادلة هو:**

■ $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{--2}{2 \times 1} = \dfrac{2}{2} = 1$

---

٤) $X^2 - 5x + 3 = 0$

$a = 1, \; b = -5, \; c = 3$

$\Delta = (-5)^٢ - 4 \times 1 \times 3 = 13 > ٠$

∴ **يوجد حلين للمعادلة هما:**

■ $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5) - \sqrt{13}}{2 \times 1} = \dfrac{5 - \sqrt{13}}{2}$

■ $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5) + \sqrt{13}}{2 \times 1} = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{2}$

جـ - حل أنظمة المعادلات الخطية :-

يكون الشكل العام لنظام المعادلات الخطية كالآتي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

حيث m تمثل عدد المعدلات، n عدد المتغيرات.

ستكون دراستنا في هذه الوحدة متعلقة بحل نظام معادلتين بمجهولين وبطريقة الحذف.

يكون نظام معدلتين بمجهولين على الصورة:

$$a_١x + b_١y = c_١$$
$$a_٢x + b_٢y = c_٢$$

يمكن حل هذا النوع من المعادلات باستخدام **طريقة الحذف**، حيث نجعل معاملات أحد المتغيرين في المعادلتين نفس القيمة ولكن بإشارتين مختلفتين ثم نجمع المعادلتين ونجد منها قيمة المتغير الآخر ثم نعوض قيمته في أحدى المعادلتين ونجد قيمة المتغير الأول

مثال ١ :-

حل النظام التالي من المعادلات:

$٢x + ٣y = ٧ \quad (١)$
$٣x + ٢y = ٨ \quad (٢)$

الحل :-

نضرب المعادلة الأولى في (٢-) والثانية في (٣) لحذف المتغير y فتصبح المعادلتين:

$-٤x - ٦y = -١٤$
$\underline{٩x + ٦y = ٢٤}$ نجمع
$٥x \quad = ١٠$

$\Longrightarrow \mathbf{x = 2}$

نعوض بقيمة x في المعادلة الثانية :

$\Longrightarrow \mathbf{٣\times(٢) + ٢y = ٨ \Longrightarrow ٦ + ٢y = ٨ \Longrightarrow ٢y = ٢ \Longrightarrow y = 1}$

مثال ٢ :-

حل النظام التالي من المعادلات:

$٣x + ٤y = ٩ \quad (١)$
$٢x + ٣y = ٧ \quad (٢)$

الحل :-

نضرب المعادلة الأولى في (٢-) والثانية في (٣) لحذف المتغير x فتصبح المعادلتين:

$-٦x - ٨y = -١٨$
$\underline{٦x + ٩y = ٢١}$ نجمع

$\mathbf{y = ٣}$

$\Longrightarrow \mathbf{y = 3}$

نعوض بقيمة y في المعادلة الأولى:

$\Longrightarrow \mathbf{٣x + ٤\times(٣) = ٩ \Longrightarrow ٣x + ١٢ = ٩ \Longrightarrow 3x = -3 \Longrightarrow x = -1}$

ثانياً : المتباينات :-

المتباينة هي **أي عبارتين جبريتين يربط بينهما احدى ادوات الربط** التالية (<) أقل من (>) أكبر من، (≤) أكبر من أو يساوي، (≥) أقل من أو يساوي ومن الأمثلة على المتباينات:

$x < ٢$
$x + ١ \leq -٣$
$x^٢ + ٢x + ٥ \geq ٠$

تعريف: تسمى مجموعة كل قيم (x) التي يمكن أن نعوضها في المتباينة بغض النظر عن صحتها بمجموعة التعويض، وهذه المجموعة تعطى في السؤال وتكون عادة إحدى مجموعات الاعداد وفي كل امثلتنا في هذه الوحدة ستكون مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الحقيقية **"R"**.

تعريف: تسمى مجموعة قيم x التي تجعل المتباينة صحيحة (أي التي تكون حلاً للمتباينة) **مجموعة الحل للمتباينة.**

مجموعة الحل **تكون مجموعة جزئية من مجموعة التعويض.**

مثال :-

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات التالية:

١- $٣x - ٢ > x + ١$

٢- $x^{٢} - ٥x \geq -٦$

٣- $x^{٣} + ٣x^{٢} + ٢x \leq ٠$

٤- $\frac{٢x - ١}{x + ١} < ٠ \quad , x \neq -١$

الحل :-

مجموعة الحل لأي متباينة تكون مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

١- $٣x - ٢ > x + ١$

$٣x - x > ١ + ٢$

$٢x > ٣$

$x > \frac{٣}{٢}$

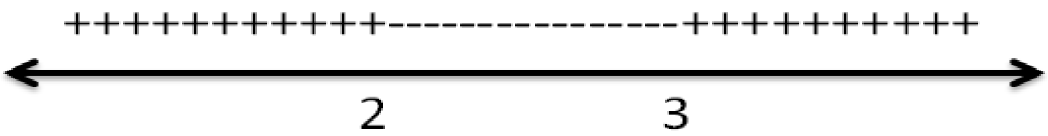
∴ تكون مجموعة الحل هي الفترة المفتوحة $(\frac{3}{2} , \infty)$.

٢- $x^{٢} - ٥x \geq -٦$

$x^{٢} - ٥x + ٦ \geq ٠$

$(x-٣)(x-٢) \geq ٠$

نبحث في اشارة الاقتران عن طريق خط الاعداد وتكون اشارة الاقتران التربيعي عكس اشارة $x^{٢}$ ما بين الجذرين ونفس إشارة $x^{٢}$ خارج الجذرين.



∴ تكون مجموعة الحل للمتباينة هي $(-\infty, 2] \cup [3 , \infty)$.

٣- $x^{٣} + ٣x^{٢} + ٢x \leq ٠$

نأخذ x عامل مشترك

$x(x^{٢} + ٣x + ٢) \leq ٠$

نحلل الدالة التربيعية داخل الاقواس

$x(x+٢)(x+١) \leq ٠$

فتكون جذور الاقتران هي { ٢- , ١- , ٠}

نحدد اشارة الاقتران على خط الاعداد

------------++++++++------------+++++++

-2 -1 0

∴ تكون مجموعة الحل للمتباينة هي $(-\infty, -2] \cup [-1 , 0]$.

4- $\frac{2x-1}{x+1} < 0 \quad , x \neq -1$

في الاقترانات النسبية نحدد اشارة البسط واشارة المقام على خط الاعداد ثم نقسم الإشارات.

$2x - 1 < 0$

$x < \frac{1}{2}$

البسط

-------------------+++++++++++++

$\frac{1}{2}$

$x + 1 < 0$

$x < -1$

المقام

-------------------+++++++++++++

-1

القسمة

+++++++++++-------------------++++++++++

-1 $\frac{1}{2}$

تكون مجموعة الحل للمتباينة هي الفترة المفتوحة $(-1 , \frac{1}{2})$.

نجاحك وسعادتك تكمن فيك.