

المحاضرة الاولى

مفاهيم اساسية

عناصر المحاضرة

- ١- المقدمة
- ٢- مفهوم علم الاحصاء
- ٣- المجتمع والعينة
- ٤- البيانات
- ٥- خطوات العملية الاحصائية
- ٦- تمرينات محلولة
- ٧- تدريبات للطلاب (متروك للطلاب ومعطى له اجابات نهائية)

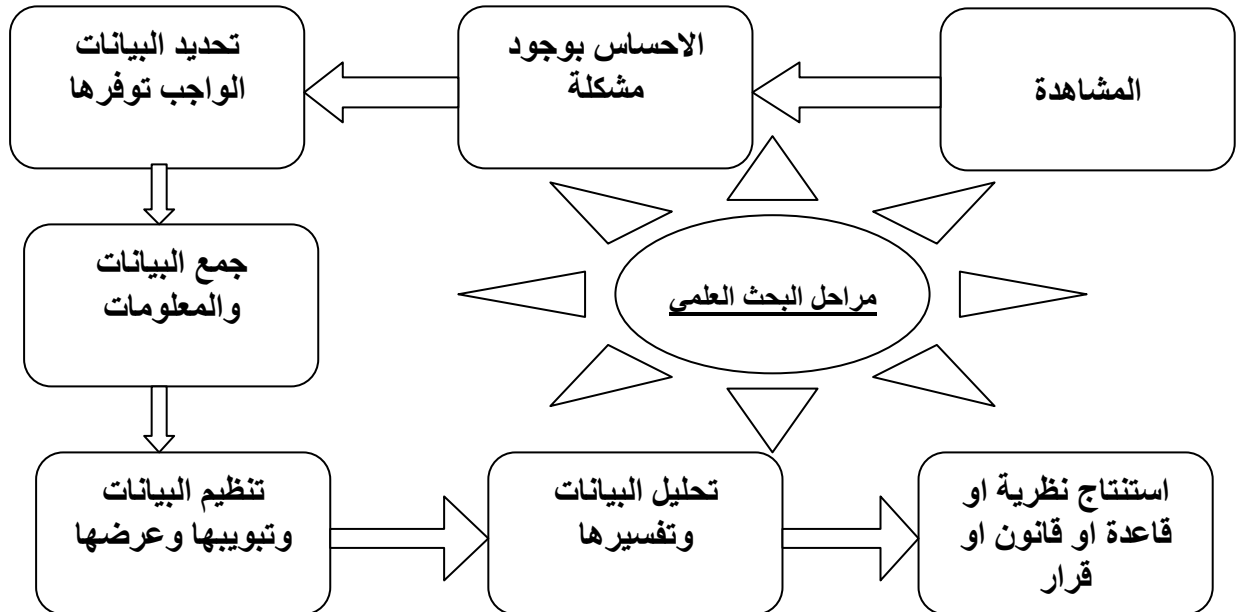
المقدمة :-

الغرض من العلم (بوجه عام) هو البحث عن الحقيقة ، والبحث العلمي هو الوسيلة للوصول الى حقائق الاشياء والظواهر ومعرفة كل العلاقات التي تربط بينها وبعضها البعض ، سواء كانت هذه الظواهر اجتماعية او اقتصادية او طبيعية او غير ذلك ، لذا يستخدم البحث العلمي العلم بقصد دراسة ظاهرة معينة لاكتشاف حقائقها ومعرفة القواعد العامة التي تحكمها.

والاحساس بوجود مشكلة (او ظاهرة) ما يمثل شرطاً اساسياً للقيام ببحث علمي ، وهذا الاحساس لا يأتي الا من خلال المشاهدة للظواهر المختلفة . وهذا يتطلب تحديد البيانات الواجب توفرها حتى يمكن اجراء البحث والوصول الى نتائج مقبولة يمكن الاعتماد عليها في تفسير تلك الظواهر المختلفة التي قد تثير الاهتمام .

يأتي بعد ذلك جمع لتلك البيانات من مصادرها المختلفة وتنظيماتها وتبويبها وعرضها في صور جدولية او بيانية ، ثم يتم استخدامها في حساب بعض المقاييس الخاصة بهذه الظواهر واجزاء تحليل لتلك البيانات بما يساعد في تفسير النتائج المختلفة للبيانات واستخدامها في استنتاج نظرية او قاعدة او قانون او المساعدة في اتخاذ القرارات او التنبؤ بنتائج مستقبلية .

الشكل التالي يمكن ان يوضح الاطار العام لاي بحث علمي :-

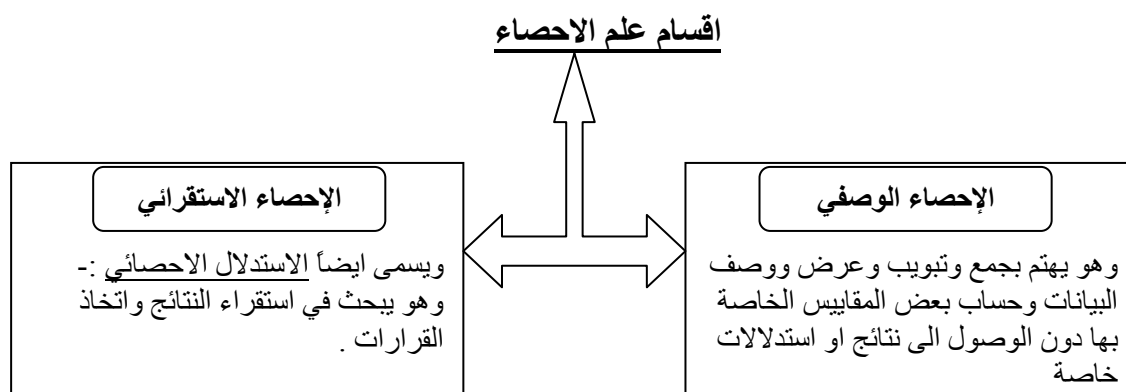


(٢) مفهوم علم الاحصاء :-

يختص علم الاحصاء بالطرق العلمية لجمع وعرض وتحليل البيانات وكذلك الوصول الى نتائج مقبولة وقرارات سليمة على ضوء هذا التحليل .

وقديماً عرف علم الاحصاء على انه جمع البيانات عن ظاهرة معينة وترتيبها في جدول او عرضها في صور رسومات واشكال بيانية بسيطة . ومن ثم استخدم اطلاق علم الاحصاء لتعبير عن البيانات والمقاييس المستخرجة من تلك البيانات (مثل المتوسطات) ، وعلى هذا الاساس نتحدث عن احصاءات البطالة والحوادث والمواليد والوفيات الخ .

لكن في حقيقة الامر هذا ذي معنى ضيق لاصطلاح ((علم الاحصاء)) لكن مع تقدم العلوم بدا علم الاحصاء يلعب دوراً متزايداً في حياتنا اليومية بحيث اصبح يشغل حيزاً كبيراً بين بقية العلوم الاخرى . فأصبح يبحث في جميع البيانات وتنظيمها وعرضها وتحليلها واستنتاج وتوقع نتائج واتخاذ قرارات .



(٣) المجتمع والعينة :-

مثلاً لتحليل نتائج طلاب المملكة في مقرر الانجليزية لطلاب وطالبات الثانوية العامة ، فمن المستحيل او غير العلمي ان نقوم بجمع درجات جميع الطلاب في هذا المقرر على مستوى المملكة وتنظيمها وتحليلها ثم نستنتج بعض النتائج من هذا التحليل ، هنا يكون المجتمع هو جميع طلاب المملكة .
اذا المجتمع هو :- المجموعة الكلية لمفردات الدراسة سواء كانت أفراد او اشياء .

فبدلاً من ذلك نقوم باختيار عينة من هؤلاء الطلاب (تحت شروط معينة حتى تكون ممثلة للمجتمع) ونقوم بتحليل بيانات هذه العينة ونخرج من هذا التحليل باستدلالات تخص المجتمع ككل .
اذا العينة هي :- مجموعة جزئية من مفردات المجتمع محل الدراسة يتم اختيارها بحيث تكون ممثلة للمجتمع تمثيل صحيح .

(٤) البيانات :-

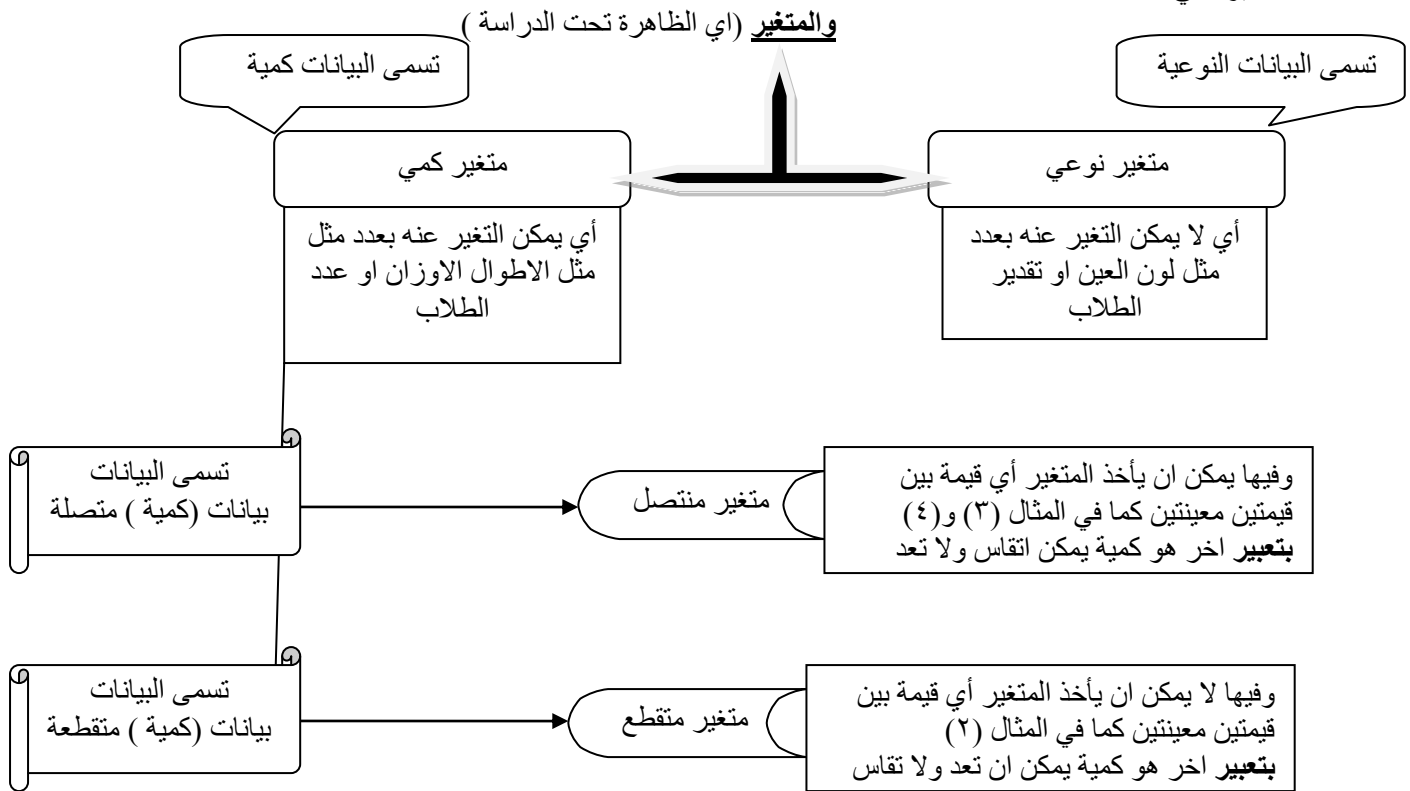
يمكن ببساطة تعريف البيانات على انها مجموعة من ((المشاهدات او القياسات)) التي تخص الظاهرة تحت الدراسة ، والكمية التي نقوم بمشاهدتها او قياسها تسمى ((المتغير)) وعادة نرسم للمتغير برمز X ، Y ، A ، B

امثلة لتوضيح

العملية الاحصائية (الدراسة)	البيانات (القياسات او المشاهدات)	المتغير (X)	مثال
لون عين بعض الاطفال حديثي الولادة	اخضر - ازرق - بني -	لون العين	(١)
عدد الطلاب في فصول المدرسة	١٥ - ١٨ - ٢٠ - ٢٥ - ١٧	عدد الطلاب	(٢)
اطوال مجموعة من الطلاب في فصل ما (بالمتر)	١,٥٢ - ١,٧١ - ١,٨٣	طول الطالب	(٣)
اوزان بعض العلامات بمصنع معين (بالكيلو جرام)	٥٥,٢ - ٦٠,١ - ٦٣,٣٥ - ٧٠,٥٢	وزن العاملة	(٤)
تقديرات عدد من الطلاب في مقرر الاحصاء	A - B - C - F - A - C - B	تقدير الطالب	(٥)

اقسام المتغير

- ١- متغير نوعي
- ٢- متغير كمي



اقسام المتغير

- ١- متغير نوعي :- أي لا يمكن التغير عنه بعدد مثل لون العين أو تقدير الطلاب (تسمى البيانات النوعية)
 - ٢- متغير كمي :- أي يمكن التغير عنه بعدد مثل الأطوال الأوزان أو عدد الطلاب (تسمى البيانات الكمية)
- وينقسم المتغير الكمي الى :-
- متغير متصل :- وفيها يمكن ان يأخذ المتغير أي قيمة بين قيمتين معينتين كما في المثال (٣) و (٤) . بتعبير آخر هو كمية يمكن ان تقاس ولا تعد وتسمى البيانات عندئذ بيانات (كمية) متصلة.
 - متغير متقطع :- وفيها لا يمكن ان يأخذ المتغير أي قيمة بين قيمتين معينتين كما في المثال (٢) . بتعبير آخر هو كمية يمكن ان تعد ولا تقاس وتسمى البيانات عندئذ بيانات (كمية) متقطعة.

(٥) خطوات العملية الإحصائية

يمكن تلخيص خطوات أي عملية إحصائية في الآتي:-

- (١) جمع البيانات :- هي خطة الحصول على القياسات الخاصة بظاهرة معينة وعادةً ما نسمي البيانات المجمعة "بيانات الخام".
- (٢) تنظيم وعرض البيانات :- هي عملية وضع البيانات السابقة في جداول خاصة وعرضها بطريقة مناسبة.
- (٣) تحليل البيانات :- هي عملية إيجاد مقاييس تتحدد قيمها من البيانات السابقة وتعطي بعض الدلالات عن الظاهرة تحت الدراسة.
- (٤) استقراء النتائج واتخاذ القرارات :- هي الاستنتاجات التي يتوصل إليها الباحث من خلال تحليله للبيانات السابقة وعادةً ما تكون على شكل تقديرات أو تنبؤات أو تعميمات أو قرارات بالرفض أو القبول.

المحاضرة الثانية

التوزيعات التكرارية

عناصر المحاضرة

١- مقدمة ((البيانات النوعية – الكمية – المنفصلة))

٢- عرض البيانات المنفصلة

❖ تحديد المدى

❖ تفرغ البيانات

❖ عرض البيانات عن طرق الجداول

❖ العرض البياني للبيانات

الاعدة البسيطة – القضبان البسيطة – المضلع التكراري – المنحنى التكراري – طريقة الدائرة

(١) المقدمة

ذكرنا في الباب السابق (الباب الاول) ماهي:-

- البيانات ((هي مجموعة المشاهدات او القياسات التي تخص ظاهرة معينة تحت الدراسة))
- المتغير على انه تلك الكمية التي تقوم بمشاهدتها او قياسها ، كما ذكرنا ان البيانات إما ان تكون نوعية او كمية ، حيث :
- (أ) البيانات النوعية :- هي تلك البيانات التي لا يمكن التعبير عن متغيرها بعدد (أي بيانات غير رقمية)
أمثلة على ذلك :-
- لو (او نوع السيارات الموجودة في موقف ما (احمر – ابيض – اسود -)
- الحالة الاجتماعية للسيدات في محافظة معينة (متزوجة – عزباء – مطلقة – ارملة – منفصلة)
- رايك في قرار خاص بالمؤسسة التي تعمل بها (أوافق بشدة – أوافق – اعترض – اتحفظ -)
- وغيره من مثل هذه الأمثلة .

(ب) البيانات الكمية :- ((هي تلك البيانات التي تعبر فيها عن المتغير بعدد (أي بيانات رقمية) ، وهذه البيانات بدورها تنقسم الى :-

(ب-١) بيانات كمية متصلة : وفيها يمكن أن يأخذ المتغير أي قيمة بين قيمتين (أي بيانات يمكن أن تقاس ولا تعد أمثلة على ذلك :-

- أطوال الطلاب في إحدى المدارس .
- أوزان العاملات بإحدى المصانع .
- الدخل السنوي لمنسوبي مؤسسة معينة .

(ب-٢) كمية متقطعة : وفيها يمكن أن يأخذ المتغير قيمة على (إماأو..... وليس أي قيمة بينهما) ، وبعبارة أخرى هي بيانات يمكن أن تقاس ولا تعد مثل عدد طلاب الفصول المختلفة في مدرسة ما (قد يكون ٢٥ او ٢٦ ولا يمكن ان يكون ٢٥,٥)
والبيانات المنفصلة إما ان تكون بيانات نوعية أو كمية متقطعة

والان سوف نستعرض في البند التالي (بإذن الله) كيفية عرض البيانات المنفصلة

(٢) عرض البيانات المنفصلة :-

كما ذكرنا في البند السابق أن البيانات المنفصلة إما أن تكون بيانات نوعية او بيانات كمية متقطعة يأخذ فيها المتغير (الخاصة تحت الدراسة) قيمة محددة ولا يأخذ قيمة موزعة على فترة ، وهذه البيانات يمكن عرضها بطرق مختلفة منها :

- الجداول

- ومنها الأشكال البيانية .

ولتوضيح ذلك دعنا نتعامل مع المثال التوضيحي التالي :-

مع تحيات اخوكم المعتقل

مثال توضيحي (١-٢) :-
قام احد الباحثين بجمع البيانات التالية عن درجة الطلاب في مادة اللغة الإنجليزية بالثانوية العامة بأخذ الفصول المتميزة بإحدى مدارس المنطقة الشرقية وكانت الدرجات كالتالي (العظمى ١٠٠)

مثال توضيحي (١-٢) : قام أحد الباحثين بجمع البيانات التالية عن درجة الطلاب في مادة اللغة الإنجليزية بالثانوية العامة بأحد الفصول المتميزة بإحدى مدارس المنطقة الشرقية وكانت الدرجات كالتالي (الدرجة العظمى 100) :

92 98 99 94 93 95 99 99 95 100
94 95 92 95 96 93 95 94 95 97

و المطلوب تنظيم وعرض النتائج السابقة بطريق عرض مختلفة .

البيانات المعطاة في المثال تمثل الخطوة الأولى في أي عملية إحصائية وهي عملية "جمع البيانات" ، والبيانات هنا معطاة على صورة "بيانات خام" أي بيانات كاملة لكن في صورة غير منظمة ، ولتنظيم هذه البيانات نحاول تكوين ما يُسمى بالتوزيع التكراري لهذه البيانات ،

ويتم ذلك كالآتي

١- تحديد المدى

٢- تفريغ البيانات في الجدول

الحاضرة الثانية

مبادئ الإحصاء

• تفريغ البيانات

92 98 99 94 93 95 99 99 95 100
94 95 92 95 96 93 95 94 95 97

جدول (١-٢) تفريغ البيانات	
المتغير (الدرجة) x	تفريغ البيانات (العلامات)
92	
93	
94	
95	I
96	I
97	I
98	I
99	
100	I

• تحديد المدى [وسنرمز له بالرمز R]

وهو "الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة" في البيانات المعروضة

92 98 99 94 93 95 99 99 95 100
94 95 92 95 96 93 95 94 95 97

ويمكن بسهولة ملاحظة أن أكبر قيمة = 100

وأن أقل قيمة = 92

وبالتالي يكون المدى مساوياً لـ :

$$R = 100 - 92 = 8$$

٣- عرض البيانات عن طريق الجدول ويسمى (الجدول أو التوزيع) التكراري النسبي

مبادئ الإحصاء

الخاصة الثانية

• عرض البيانات عن طريق الجداول

التوزيع (الجدول) التكراري النسبي			
الدرجة x	التكرار f	التكرار النسبي $\bar{f} = (f / \sum f =)$	
92	2	$2/20 = 0.1$ or $0.1 \times 100 = 10\%$	
93	2	$2/20 = 0.1$ or $0.1 \times 100 = 10\%$	
94	3	$3/20 = 0.15$ or $0.15 \times 100 = 15\%$	
95	6	$6/20 = 0.3$ or $0.3 \times 100 = 30\%$	
96	1	$1/20 = 0.05$ or $0.05 \times 100 = 5\%$	
97	1	$1/20 = 0.05$ or $0.05 \times 100 = 5\%$	
98	1	$1/20 = 0.05$ or $0.05 \times 100 = 5\%$	
99	3	$3/20 = 0.15$ or $0.15 \times 100 = 15\%$	
100	1	$1/20 = 0.05$ or $0.05 \times 100 = 5\%$	
$\sum f = 20$		$\sum \bar{f} = 1$ or $\sum \bar{f} = 100\%$	

التوزيع (الجدول) التكراري		
الدرجة x	العلامات	التكرار f
92		2
93		2
94		3
95		6
96		1
97		1
98		1
99		3
100		1
		$\sum f = 20$

مجموع التكرارات (الطلاب) $\sum f = 20$ وتقرأ سيجما f

King Faisal University [٨]

د. سعيد سيف الدين



هناك طرق أخرى لعرض البيانات المنفصلة

٥- الدوائر

٤- المنحنى التكراري

٣- المضلع التكراري

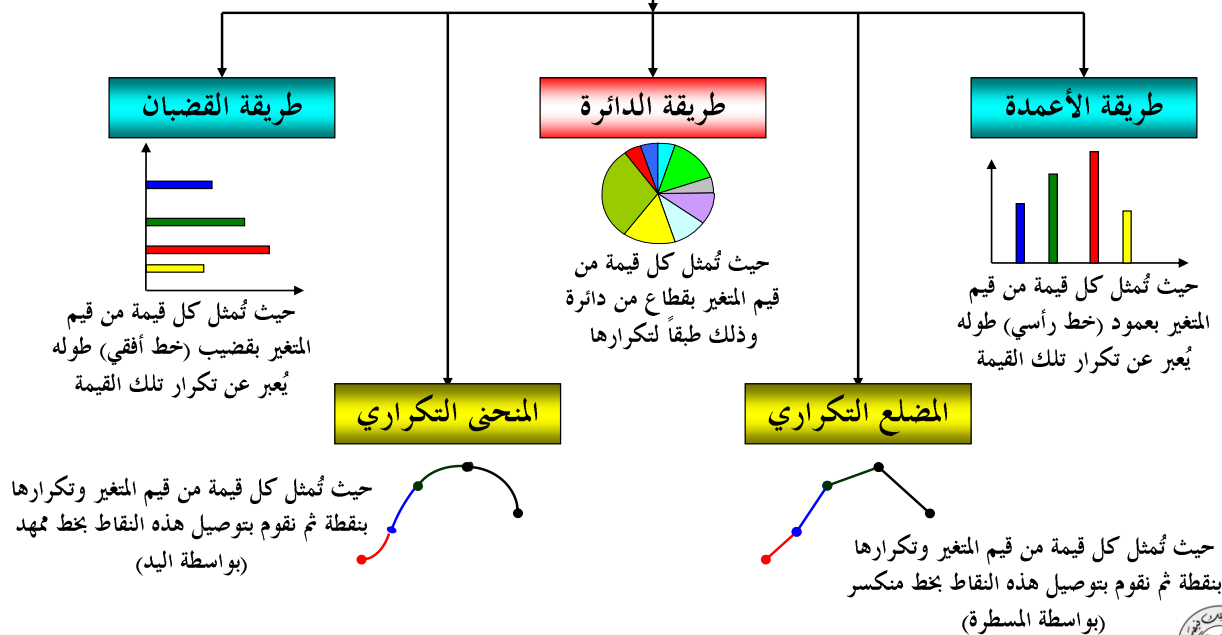
٢- القضبان

١- الأعمدة

مبادئ الإحصاء

الخاصة الثانية

• العرض البياني للبيانات المنفصلة : طرق شتى منها



King Faisal University [٩]

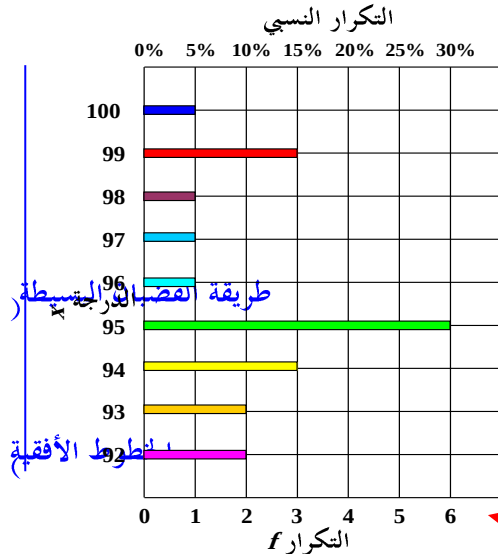
د. سعيد سيف الدين



الطريقة الثانية (القضبان)) كما هو مبين في الشكل

اشارة الثانية

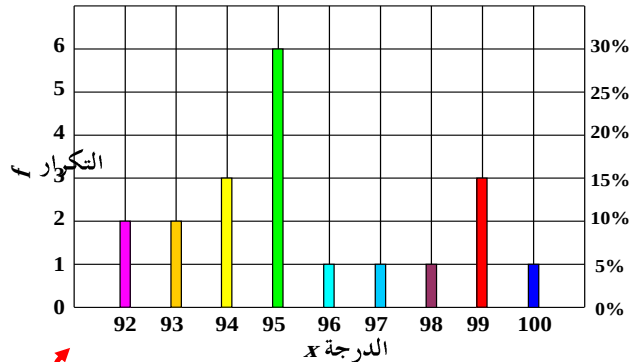
الدرجة x	92	93	94	95	96	97	98	99	100
التكرار f	2	2	3	6	1	1	1	3	1
التكرار النسبي $\bar{f}$	0.1	0.1	0.15	0.3	0.05	0.05	0.05	0.15	0.05
(نسبة مئوية)	10%	10%	15%	30%	5%	5%	5%	15%	5%



الطريقة الاولى (الاعمدة) كما هو مبين في الشكل

مبادئ الإحصاء

طريقة الأعمدة البسيطة (الخطوط الرأسية)



وفي الطريقتين لا يهم عرض المستطيلات لكن من المهم جداً أن تكون الأعمدة أو القضبان منفصلة عن بعضها

King Faisal University [١٠]

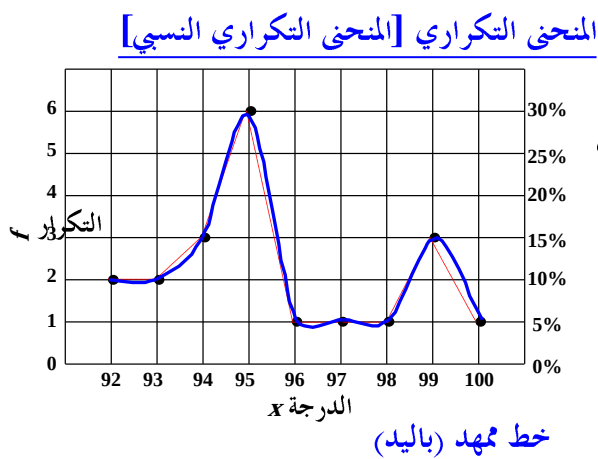
د. سعيد سيف الدين



الطريقة الرابعة (المنحنى)) كما هو مبين في الشكل

اشارة الثانية

الدرجة x	92	93	94	95	96	97	98	99	100
التكرار f	2	2	3	6	1	1	1	3	1
التكرار النسبي $\bar{f}$	0.1	0.1	0.15	0.3	0.05	0.05	0.05	0.15	0.05
(نسبة مئوية)	10%	10%	15%	30%	5%	5%	5%	15%	5%



المنحنى التكراري [المضلع التكراري النسبي]



في الأسلوبين تمثل كل قيمة من قيم المتغير (الدرجة) x بنقطة إحداثياتها الأفقي هو قيمة المتغير وإحداثياتها الرأسية هي قيمة التكرار (أو التكرار النسبي) المناظر لتلك القيمة

King Faisal University [١١]

د. سعيد سيف الدين



وهنا يبين لنا انه يمكن جمع الطريقتين في شكل بياني واحد { الطريقة الثالثة (المضلع) و الطريقة الرابعة (المنحنى) } كما هو مبين في الشكل {

مبادئ الإحصاء

الخاصة الثانية

لاحظ أنه يمكن الجمع بين أكثر من طريقة لعرض البيانات

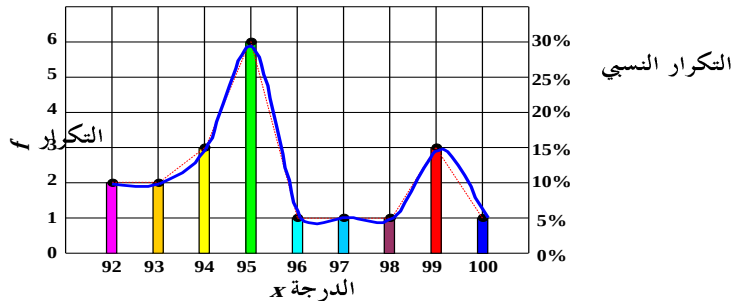
الدرجة x	92	93	94	95	96	97	98	99	100
التكرار f	2	2	3	6	1	1	1	3	1
التكرار النسبي f (كنسبة مئوية)	0.1	0.1	0.15	0.3	0.05	0.05	0.05	0.15	0.05
	10%	10%	15%	30%	5%	5%	5%	15%	5%

طرق مختلفة للعرض

طريقة الأعمدة البسيطة

المضلع التكراري (أو التكراري النسبي)

المنحنى التكراري (أو التكراري النسبي)



King Faisal University [١٢]

د. سعيد سيف الدين

الطريقة الخامسة (الدائرة) كما هو مبين في الشكل

مبادئ الإحصاء

الخاصة الثانية

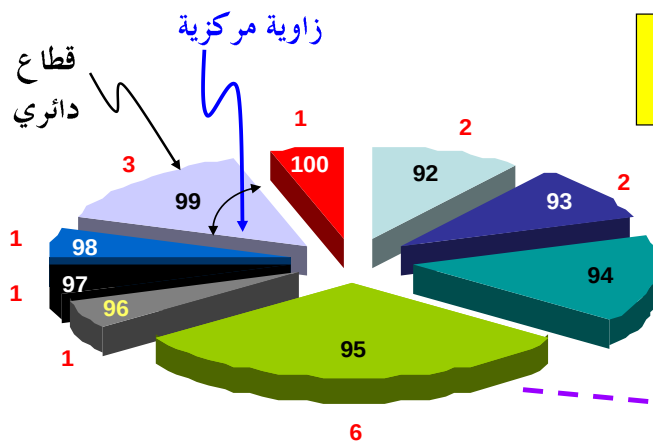
الدرجة x	92	93	94	95	96	97	98	99	100
التكرار f	2	2	3	6	1	1	1	3	1

والآن نتناول طريقة أخرى لتمثيل البيانات بيانياً وهي طريقة **الدائرة** حيث تمثل كل قيمة من قيم المتغير بقطاع من دائرة بقطاع من دائرة تحدد زاويته المركزية بالعلاقة :

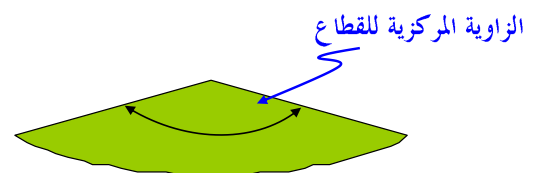
$$\text{الزاوية المركزية لقيمة ما} = \frac{\text{تكرار القيمة}}{\text{مجموع التكرارات}} \times 360^\circ$$

أو

$$\text{الزاوية المركزية لقيمة ما} = \text{التكرار النسبي للقيمة} \times 360^\circ$$



القيم داخل القطاعات تمثل الدرجة (المتغير) x والقيم المكتوبة خارج القطاعات باللون الأحمر تمثل التكرار f



القطاع الخاص بالدرجة "95" ذات التكرار 6 قياس زاويته المركزية تساوي :

$$\frac{6}{20} \times 360 = 108^\circ$$



King Faisal University [١٣]

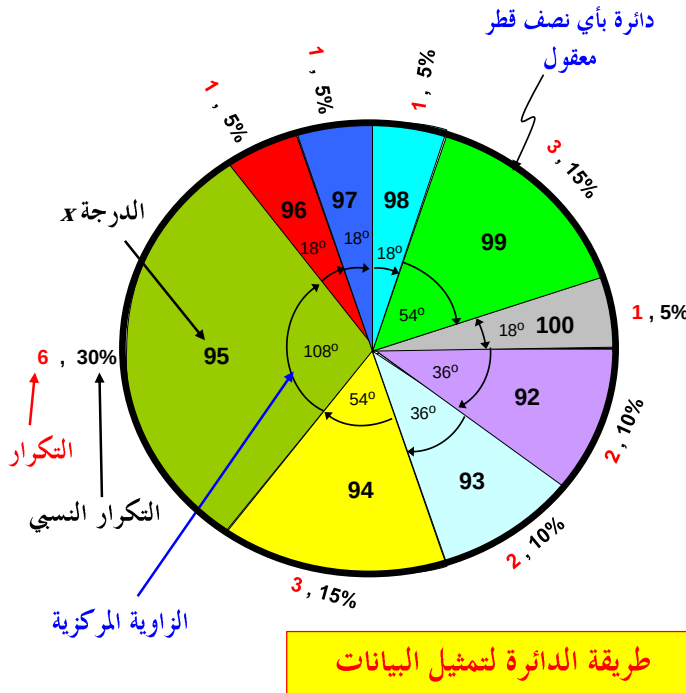
د. سعيد سيف الدين

وهنا نوضح كيف استطعنا تمثيل البيانات على الدائرة (علماً بأن درجة الدائرة ٣٦٠ درجة)

مبادئ الإحصاء

الخاصة الثانية

إذن لابد من حساب الزاوية المركزية المناظرة لكل قيمة من قيم المتغير x (الدرجة) ، وهذه القيم مبينة بالجدول التالي :



الدرجة x	التكرار f	الزاوية المركزية
92	2	$(2/20) \times 360 = 36^\circ$
93	2	$(2/20) \times 360 = 36^\circ$
94	3	$(3/20) \times 360 = 54^\circ$
95	6	$(6/20) \times 360 = 108^\circ$
96	1	$(1/20) \times 360 = 18^\circ$
97	1	$(1/20) \times 360 = 18^\circ$
98	1	$(1/20) \times 360 = 18^\circ$
99	3	$(3/20) \times 360 = 54^\circ$
100	1	$(1/20) \times 360 = 18^\circ$
$\sum f = 20$		مجموع الزوايا = 360°



King Faisal University [١٤]

د. سعيد سيف الدين

مثال توضيحي على ما سبق

مبادئ الإحصاء

الخاصة الثانية

مثال (٢-٢) : في دراسة قام بإجرائها أحد الأطباء لطفل معرض لأحد الأمراض النفسية ، تم سؤاله عن لون مجموعة من الأشياء فكانت إجابته كما يلي :

أحمر أزرق بنفسجي أحمر أخضر
أبيض أبيض أحمر أخضر أبيض
أزرق أحمر أخضر بنفسجي
أخضر أزرق أبيض بنفسجي أحمر

المطلوب : عرض البيانات السابقة بطرق مختلفة

ملحوظة : إذا لم يُذكر أمام المثال أنه **مثال توضيحي** ننصح القارئ بأن يقوم بحله بمفرده ويقارن حله بالحل التفصيلي المعطي

بداية الحل : نقوم أولاً بتفريغ البيانات [تحويلها من صورها الخام إلى صورة منظمة] وتكوين الجدول (التوزيع التكراري) (والتكراري النسبي)



King Faisal University [١٥]

د. سعيد سيف الدين

حل المثال التوضيحي :

مبادئ الإحصاء

الخاصة الثانية



نحتاجه فقط عند تمثيل البيانات
بطريقة الدائرة

عمود (٦)	عمود (٥)	عمود (٤)	عمود (٣)	عمود (٢)	عمود (١)
الزاوية المركزية	التكرار النسبي $\bar{f}$ (كنسبة مئوية)	التكرار النسبي $\bar{f}$	التكرار f	العلامات	المتغير (اللون) x
$0.3 \times 360 = 108^\circ$	$(6/20) \times 100 = 30\%$	$6/20 = 0.30$	6		أحمر
$0.2 \times 360 = 72^\circ$	$(4/20) \times 100 = 20\%$	$4/20 = 0.20$	4		أزرق
$0.15 \times 360 = 54^\circ$	$(3/20) \times 100 = 15\%$	$3/20 = 0.15$	3		بنفسجي
$0.2 \times 360 = 72^\circ$	$(4/20) \times 100 = 20\%$	$4/20 = 0.20$	4		أبيض
$0.15 \times 360 = 54^\circ$	$(3/20) \times 100 = 15\%$	$3/20 = 0.15$	3		أخضر
المجموع = 360°	$\sum \bar{f} = 100\%$	$\sum \bar{f} = 1$	$\sum f = 20$		

الجدول (التوزيع) التكراري

الجدول (التوزيع) التكراري النسبي

نستبدل العمود (٤) بالعمود (٥) إذا
كان التكرار النسبي مطلوب كنسبة مئوية

King Faisal University [١٦]

د. سعيد سيف الدين

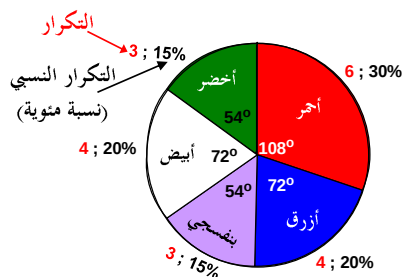


مبادئ الإحصاء

الخاصة الثانية

للاسترشاد به فقط

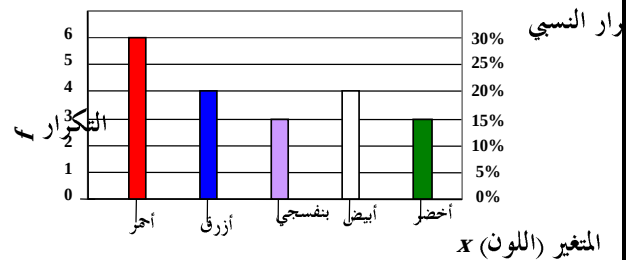
تمثيل البيانات بطريقة الدائرة



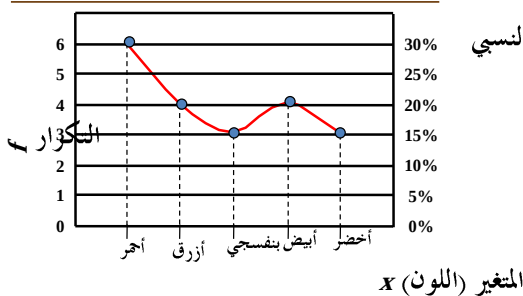
[التفاصيل في الصفحة السابقة]

x	f	الزاوية
أحمر	6	108
أزرق	4	72
بنفسجي	3	54
أبيض	4	72
أخضر	3	54

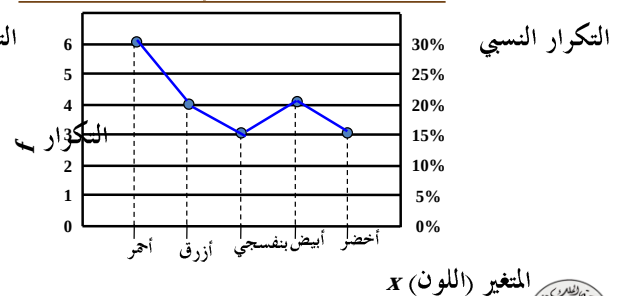
تمثيل البيانات بطريقة الأعمدة البسيطة



تمثيل البيانات بطريقة المنحنى التكراري (النسبي)



تمثيل البيانات بطريقة المضلع التكراري (النسبي)



King Faisal University [١٧]

د. سعيد سيف الدين



المحاضرة الثالثة

تابع التوزيعات التكرارية

عناصر المحاضرة

- ١- تمارين محلولة على ما سبق
- ٢- عرض البيانات المنفصلة لأكثر من ظاهر
 - ❖ طريقة الاعمدة المزدوجة
 - ❖ طريقة الاعمدة المجزئة
 - ❖ طرق اخرى

المحاضرة الثالثة

تمارين محلولة (١-٢)

مبادئ الإحصاء

س ١: الجدول التالي يبين عدد السيارات الموجودة في أحد المواقف طبقاً لنوع السيارة، المطلوب عرض هذه البيانات بطرق بيانية مختلفة

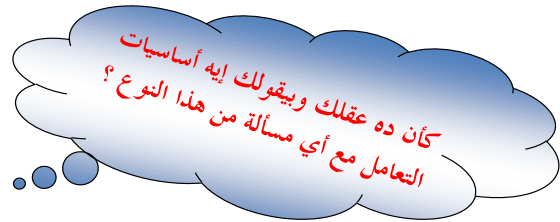
نوع السيارة	شيفروليه C	نيسان N	تويوتا T	لانسر L	هيونداي H	مرسيدس M
عدد السيارات	20	30	50	30	60	10

الحل:

نوع السيارة	عدد السيارات	$f / \sum f$	الزاوية المركزية
المتغير X	التكرار f	التكرار النسبي $\bar{f}$	
C	20	0.10 or 10%	36°
N	30	0.15 or 15%	54°
T	50	0.25 or 25%	90°
L	30	0.15 or 15%	54°
H	60	0.30 or 30%	108°
M	10	0.05 or 5%	18°
$\sum f$	200	1 or 100%	360°

$$\frac{f}{\sum f} \times 360 \text{ or } \bar{f} \times 360$$

تماماً مثل آخر مثال في المحاضرة السابقة



King Faisal University [٤]

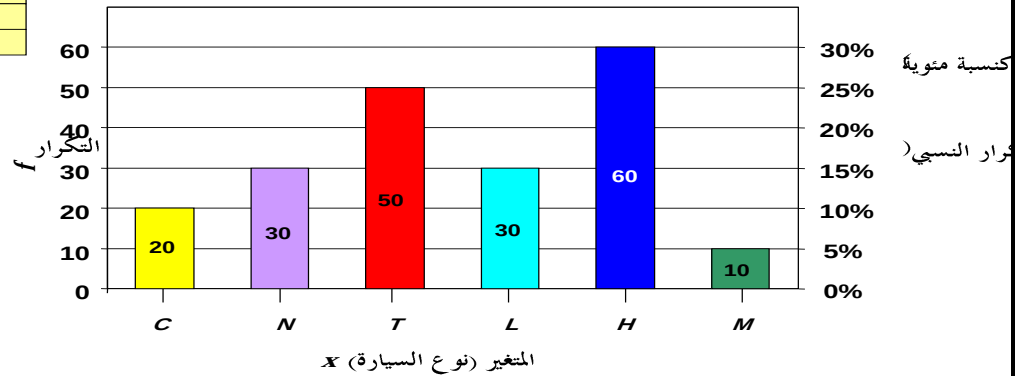
د. سعيد سيف الدين

المحاضرة الثالثة

مبادئ الإحصاء

طريقة الأعمدة البسيطة

X	التكرار	التكرار النسبي
C	20	10%
N	30	15%
T	50	25%
L	30	15%
H	60	30%
M	10	5%



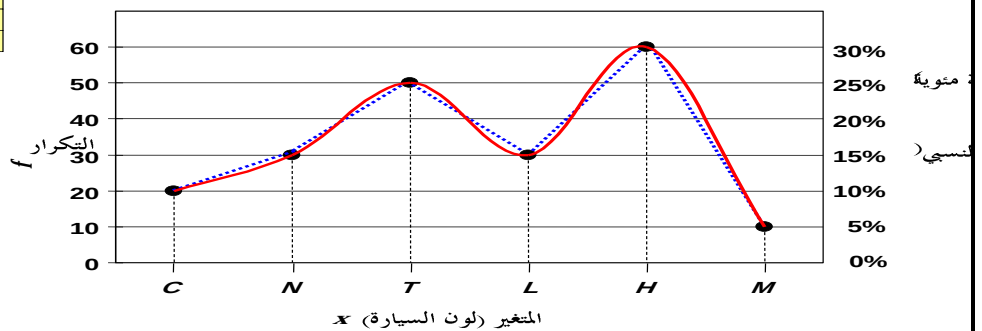
King Faisal University [٥]

د. سعيد سيف الدين

طريقة المصّلع أو المنحنى التكراري (التكراري النسبي)

x	التكرار	النسبة
C	20	10%
N	30	15%
T	50	25%
L	30	15%
H	60	30%
M	10	5%

..... المصّلع
..... المنحنى

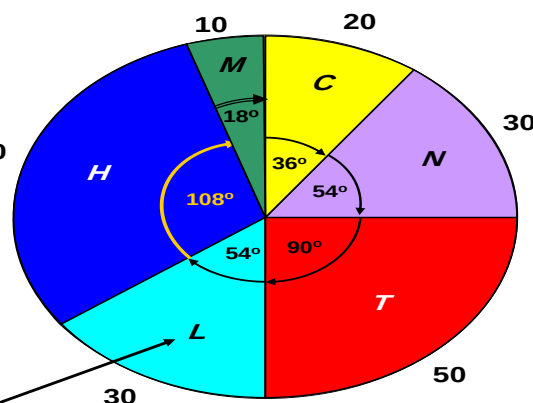


طريقة الدائرة

x	التكرار	الزاوية المركزية
C	20	36°
N	30	54°
T	50	90°
L	30	54°
H	60	108°
M	10	18°

التكرار

المتغير (اللون)



س ٢ : المدى لمجموعة من البيانات المنفصلة هو :

- ☐ أكبر قيمة في البيانات
☐ أكثر القيم تكراراً في البيانات
☐ أصغر قيمة في البيانات
☒ الفرق بين أكبر وأصغر قيمتين في البيانات

س ٣ : الجدول المرافق يبين درجات ٢٠ طالباً في أحد المقررات الدراسية :

الدرجة	100	99	98	97	96	95	94	93	92
التكرار	1	3	1	1	1	6	3	2	2

(أ) عدد الطلاب الحاصلين على 94 فأقل هو :

- ☒ 7
☐ 4
☐ 0.15
☐ 3

(ب) عدد الطلاب الحاصلين على درجة أقل من 94 هو :

- ☐ 7
☒ 4
☐ 0.15
☐ 3

(ج) نسبة الطلاب الحاصلين على 94 فأقل هي :

- ☐ 7
☐ 4
☐ 35%
☒ 0.35

(د) النسبة المئوية للطلاب الحاصلين على 94 فأقل هي :

- ☐ 7
☐ 4
☒ 35%
☐ 0.35

هامش للإجابة

$$7 = 3 + 2 + 2 \quad (\text{أ-٣})$$

$$4 = 2 + 2 \quad (\text{ب-٣})$$

$$\frac{7}{20} = 0.35 \quad (\text{ج-٣})$$

$$0.35 \times 100 = 35\% \quad (\text{د-٣})$$

نسبة

نسبة مئوية



الزاوية المركزية	التكرار (العدد) f	المتغير (العمر) x
72°	20	20
36°	?	25
?	30	30
?	?	35
	$\sum f$	

س ٤ : الجدول المقابل يبين الجدول التكراري لأعمار عدد من الممرضات (لأقرب سنة) اللاتي تعملن في أحد أقسام إحدى المستشفيات ، من هذا الجدول أجب على الأسئلة التالية :

(أ) عدد الممرضات ذات العمر 25 سنة هو :

40 ☐ 30 ☐ 20 ☐ 10 ☒

(ب) الزاوية المركزية المناظرة للعمر 30 سنة هي :

144° ☐ 108° ☒ 72° ☐ 36° ☐

(ج) الزاوية المركزية المناظرة للعمر 35 سنة هي :

144° ☒ 108° ☐ 72° ☐ 36° ☐

(د) عدد الممرضات الكلي [أي مجموع التكرارات $\sum f$] هو :

110 ☐ 105 ☐ 100 ☒ 95 ☐

هامش للإجابة

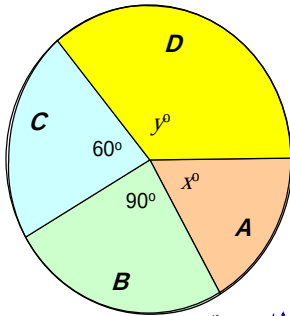
(أ-٤) هناك تناسب بين التكرار والزاوية المركزية ، إذن : $72 \times ? = 36 \times 20$ ، $\therefore ? = 10$

(ب-٤) بنفس الأسلوب السابق $72 \times 30 = ? \times 20$ ، $\therefore ? = 108^\circ$

(ج-٤) مجموع الزوايا المركزية يجب أن يكون 360° $\therefore 72 + 36 + 108 + ? = 360$ ، $\therefore ? = 144^\circ$

(د-٤) هناك أكثر من طريقة أميزها الأسلوب المتبع في الجزئين (أ) ، (ب) :

$360 \times 20 = 72 \times \sum f$ ، $\therefore \sum f = 100$



س ٥ : الشكل المقابل يبين مبيعات أربع شركات A, B, C, D (لبيع لعب الأطفال) وذلك خلال عيد الفطر المبارك ، فإذا كان عدد اللعب الكلي التي تم بيعها بواسطة هذه الشركات هو 5400 لعبة ، أجب على الأسئلة التالية :

(أ) النسبة المئوية لمبيعات الشركة B هي :

60% ☐ 40% ☐ 30% ☐ 25% ☒

(ب) عدد اللعب التي باعتها الشركة B هو :

1350 ☒ 900 ☐ 2250 ☐ 2700 ☐

(ج) عدد اللعب التي باعتها الشركتان A, D معاً هو :

1350 ☐ 3150 ☒ 2250 ☐ 900 ☐

(د) وإذا كانت النسبة بين مبيعات الشركتين A, D هي 8 : 13 ، فإن قيمة x تكون :

60° ☐ 90° ☐ 80° ☐ 150° ☐

إيه رأيك نخلي الجزء (د) واجب ، والحل هو

هامش للإجابة

(أ-٥)

$$360 \times ? = 90 \times 100$$

$$? = 25\%$$

100%	360°
?	90°

(ب-٥)

$$\frac{25}{100} \times 5400 = 1350 \rightarrow \sum f$$

(ج-٥)

الزاوية المركزية المناظرة لمبيعات الشركتين معاً تساوي

$$360 - (90 + 60) = 210^\circ$$

5400	360°
?	210°

$$360 \times ? = 210 \times 5400$$

$$? = 3150$$



عرض البيانات المنفصلة لأكثر من ظاهرة

المحاضرة الثالثة

في بعض الأحيان نحتاج لدراسة **ظاهرتين** أو أكثر ، في هذه الحالة يمكن عرض البيانات بالطرق السابقة وطرق أخرى كما يتضح من المثال التالي :

مثال توضيحي (٢-٣) : في دراسة قامت بها عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بُعد بجامعة الملك فيصل عن أعداد الطلاب والطالبات الذين تقدموا لاختبارات نهاية الفصل الدراسي الثاني للعام الجامعي 1431/1430 في تخصصات إدارة الأعمال والآداب والتربية الخاصة كانت البيانات كالتالي :

تخصص إدارة أعمال : 480 (طالبة) ، 1480 (طالب)

تخصص آداب : 2000 (طالبة) ، 3000 (طالب)

تخصص تربية خاصة : 2560 (طالبة) ، 2000 (طالب)

المطلوب عرض هذه البيانات بيانياً .

قبل أن نبدأ بعرض البيانات ، من المناسب أن نضع البيانات المرصودة في صورة جدول مناسب يسمح لنا بعرض هذه البيانات وأيضاً يسمح لنا بالمقارنات المختلفة. فإذا رمزنا للطالبات بالرمز **F** (Female) وللطلبة بالرمز **M** (Male) يمكننا تكوين الجدول التالي :



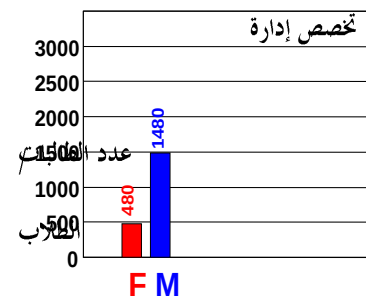
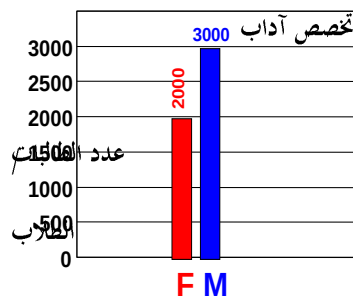
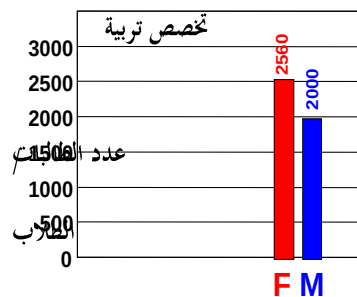
King Faisal University [١١]

د. سعيد سيف الدين

المحاضرة الثالثة

وبعد ذلك يمكن أن نقوم بعرض هذه البيانات بيانياً بطرق مختلفة منها أن نقوم بعرض أعداد الطالبات والطلاب لكل تخصص من التخصصات على حدى في ثلاثة رسومات منفصلة باستخدام طريقة الأعمدة البسيطة (مثلاً) كما هو مبين :

طلاب M	طالبات F	
1480	480	إدارة أعمال
3000	2000	آداب
2000	2560	تربية خاصة

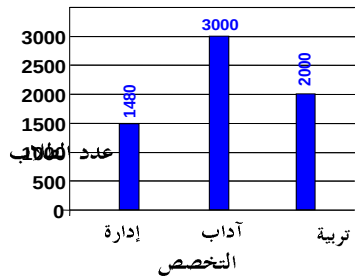


كما يمكننا أيضاً عرض بيانات الطالبات في كل التخصصات على رسمة ، وبيانات الطلاب على رسمة أخرى كما هو مبين بالشكل التالي :

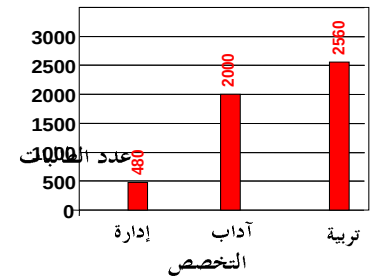


King Faisal University [١٢]

د. سعيد سيف الدين



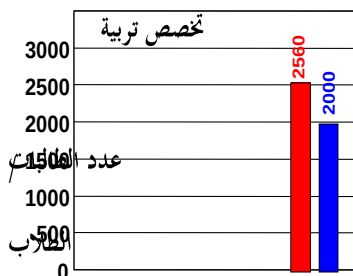
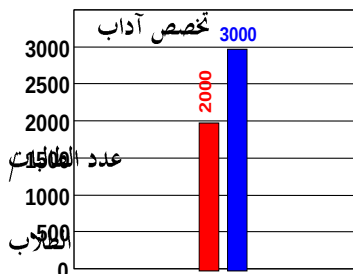
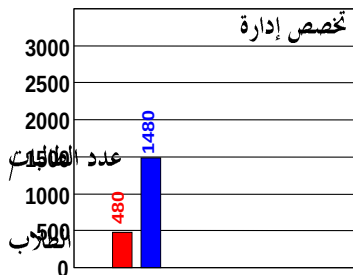
طلاب M	طالبات F	
1480	480	إدارة أعمال
3000	2000	آداب
2000	2560	تربية خاصة



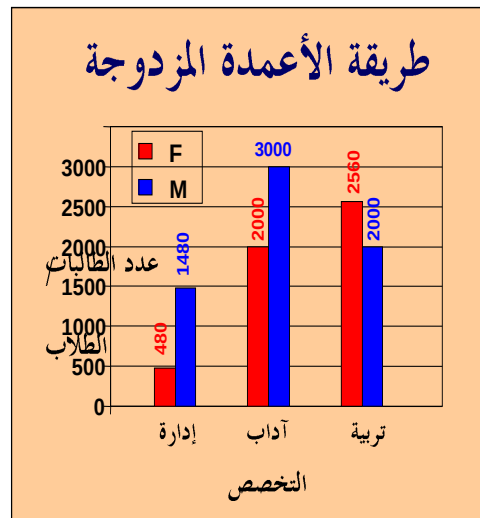
وهنا يتبادر إلى الذهن السؤال التالي

أليس من الممكن تجميع الرسومات السابقة في رسمة واحدة ؟

الإجابة : نعم ، وذلك عن طريق الأعمدة المزدوجة أو الأعمدة الجزئية كما هو مبين

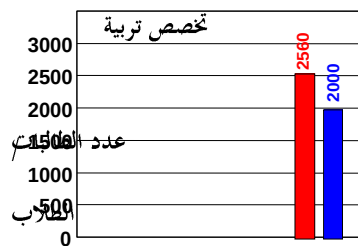
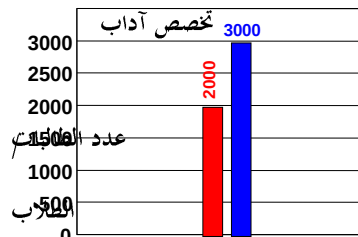
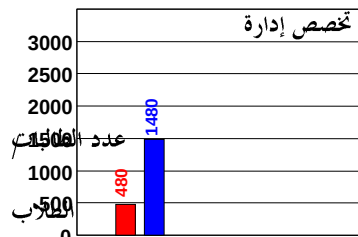


M	F	
1480	480	إدارة أعمال
3000	2000	آداب
2000	2560	تربية خاصة

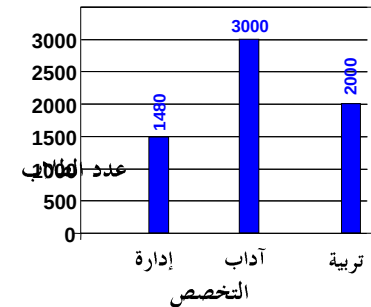
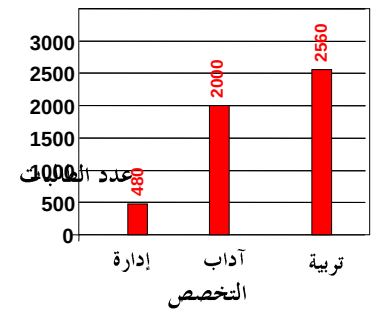
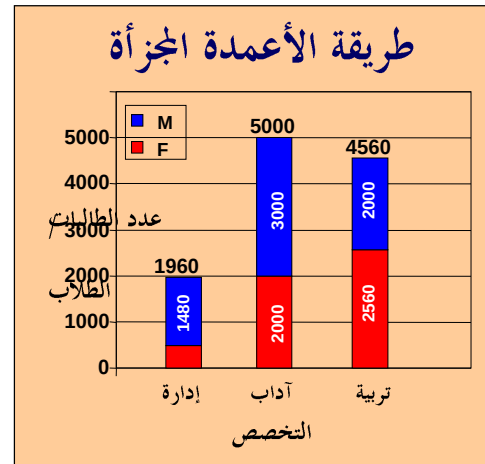


أي أن كل تخصص يُمثل بعمود مزدوج
مكون من عمودين بسيطين متلاصقين





الاجموع	M	F	
1960	1480	480	إدارة أعمال
5000	3000	2000	آداب
4560	2000	2560	تربية خاصة

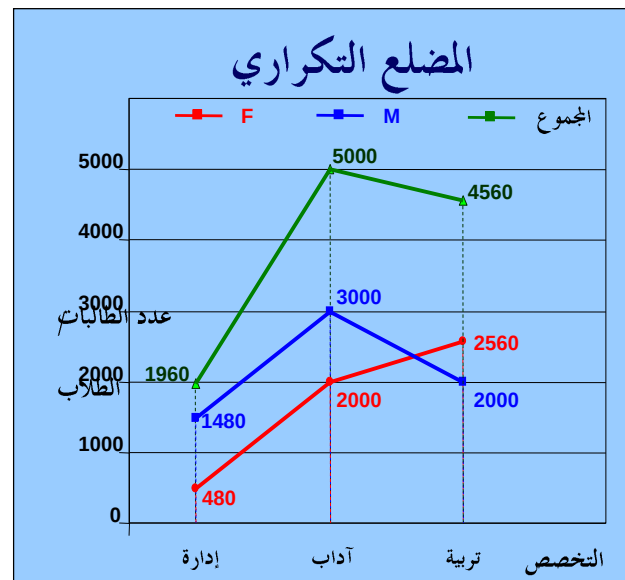
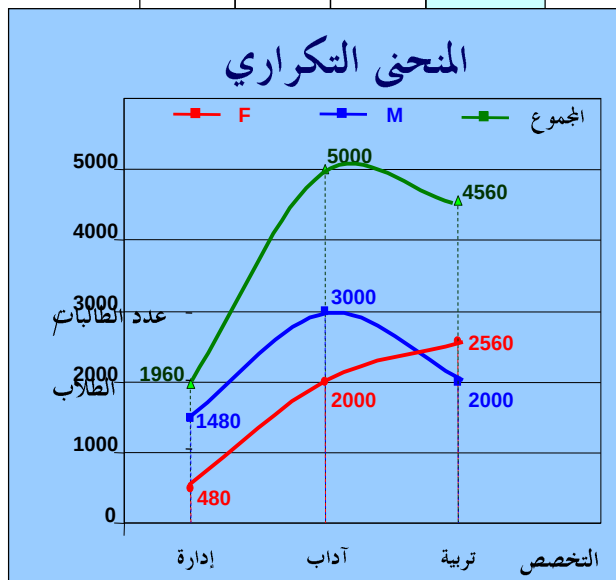


أي أن كل تخصص يُمثل بعمود طوله يُعبر عن مجموع عدد طالباته وطالابه معاً ثم يتم تجزئته إلى عمودين كل منهما يمثل فئة من الفئات



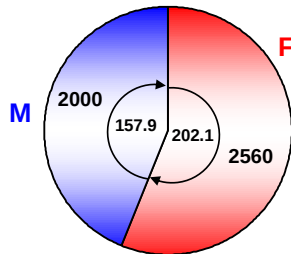
الاجموع	M	F	
1960	1480	480	إدارة أعمال
5000	3000	2000	آداب
4560	2000	2560	تربية خاصة

أيضاً نود التنويه أنه يمكن تمثيل جميع البيانات بطريقة المضلع التكراري أو المنحنى التكراري كما هو مبين



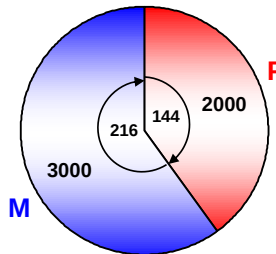
كما نود أن ننبه أيضاً إلى أنه يمكن تمثيل جميع البيانات بطريقة **الدائرة** ، وهنا يمكن أن نتعامل مع العرض بأكثر من طريقة [كما في حالة الأعمدة] . من هذه الطرق أن نقوم برسم دائرة لكل تخصص على حده كما هو موضح

تخصص تربوية	F	M	المجموع
العدد (التكرار)	2560	2000	4560
الزاوية المركزية	202.1°	157.9°	360°



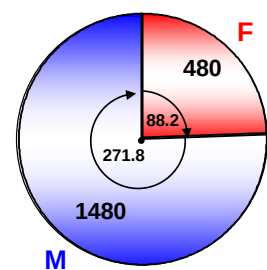
لاحظ أن قيم الزوايا المركزية هنا مبني على أساس العدد الكلي لطلبة (طالبات + طلاب) تخصص تربية خاصة

تخصص آداب	F	M	المجموع
العدد (التكرار)	2000	3000	5000
الزاوية المركزية	144°	216°	360°



لاحظ أن قيم الزوايا المركزية هنا مبني على أساس العدد الكلي لطلبة (طالبات + طلاب) تخصص آداب

تخصص إدارة	F	M	المجموع
العدد (التكرار)	480	1480	1960
الزاوية المركزية	88.2°	271.8°	360°



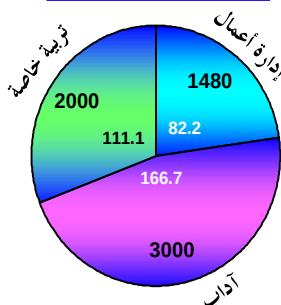
لاحظ أن قيم الزوايا المركزية هنا مبني على أساس العدد الكلي لطلبة (طالبات + طلاب) تخصص إدارة أعمال



أيضاً يمكن العرض باستخدام طريقة **الدائرة** وذلك برسم دائرتين : الأولى خاصة بطالبات جميع التخصصات والأخرى خاصة بطلاب جميع التخصصات كما هو موضح

الطلاب M	العدد (التكرار)	الزاوية المركزية
تخصص إدارة	1480	82.2°
تخصص آداب	3000	166.7°
تخصص تربية	2000	111.1°
المجموع	6480	360°

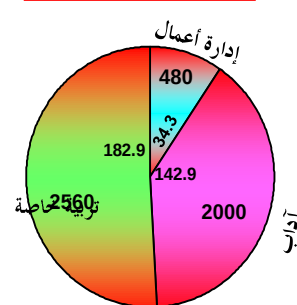
طلاب التخصصات المختلفة



لاحظ أن قيم الزوايا المركزية هنا مبني على أساس العدد الكلي لطلاب جميع التخصصات

الطالبات F	العدد (التكرار)	الزاوية المركزية
تخصص إدارة	480	34.3°
تخصص آداب	2000	142.9°
تخصص تربية	2560	182.9°
المجموع	5040	≈ 360°

طالبات التخصصات المختلفة



لاحظ أن قيم الزوايا المركزية هنا مبني على أساس العدد الكلي لطالبات جميع التخصصات



وهنا يتبادر إلى الذهن السؤال التالي [وهو مشابه للسؤال الذي سألناه عند تعرضنا لطرق الأعمدة المزدوجة والمجزأة]

أليس من الممكن تجميع الرسوم السابقة في دائرة واحدة

الإجابة نعم ، لكن لابد أن ننتبه إلى أن الزوايا المركزية هنا يجب أن تُحسب على أساس العدد الكلي للطلبة (طالبات + طلاب كل التخصصات) ، وبالتالي يجب تكوين الجدول المبين أولاً

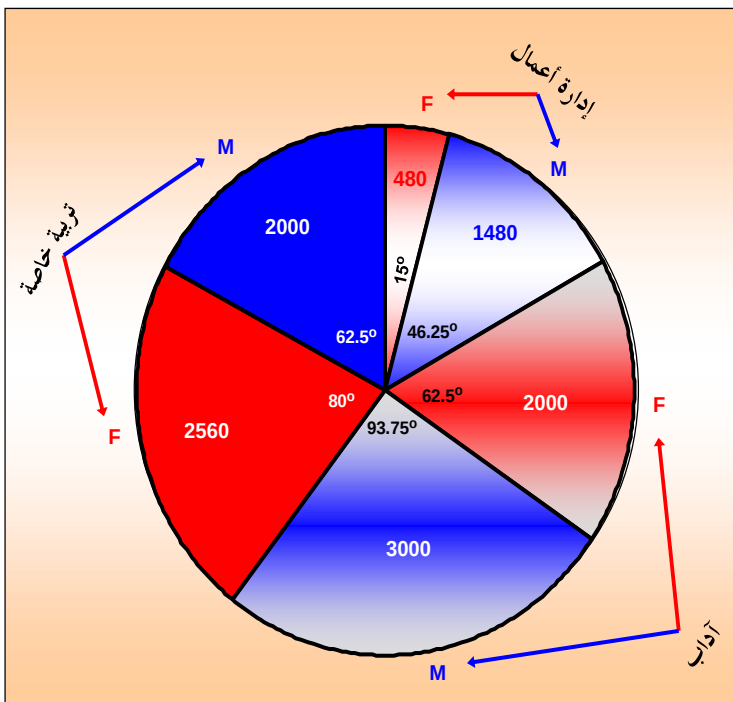


الجموع الكلي للطلبة (طالبات + طلاب) المتقدمين للاختبار في نهاية الفصل الثاني 1431 / 1430

العدد الكلي في كل تخصص	M	F	
61.25° 1960	46.25° 1480	15° 480	إدارة أعمال
156.25° 5000	93.75° 3000	62.5° 2000	آداب
142.5° 4560	62.5° 2000	80° 2560	تربية خاصة
360° 11520	202.5° 6480	157.5° 5040	العدد الكلي لكل جنس



والآن نقوم بعرض البيانات بالطريقة التقليدية التي تعلمناها :



ونتهي هذه المحاضرة بالسؤال التالي لأبنائي الطلاب والطالبات ومتروك إجابته لهم ، لكن قبل أن نسأل السؤال نود التنويه للملاحظة التالية :

ملحوظة : سنستخدم اللفظ “طالبات” للتدليل على الطلبة الإناث ، واللفظ “طلاب” للتدليل على الطلبة الذكور ، واللفظ “طلبة” للتدليل على الطالبات والطلاب معاً .

السؤال : بالاسترشاد بالجدول المبين في الصفحة السابقة ، ما هي النسبة المئوية لطلاب (ذكور) تخصص آداب بالنسبة :

- (أ) لجميع الطلبة (طالبات + طلاب) في كل التخصصات 26% تقريباً
 (ب) لجميع الطلاب (ذكور فقط) في كل التخصصات 46.3% تقريباً
 (ج) لطلبة (طالبات + طلاب) تخصصهم 60%



المحاضرة الرابعة

تابع التوزيعات التكرارية

المحاضرة الرابعة

{قالوا سبحانك لا علم لنا إلا ما علمتنا} (إنك أنت العليم الحكيم)

مبادئ الإحصاء

عناصر المحاضرة

عرض البيانات الكمية المتصلة

(١) تمهيد

(٢) العرض بطريقة الجداول

• الجداول التكرارية (أو التكرارية النسبية)

• الجداول التكرارية المتجمعة (الصاعدة والهابطة)

(٣) العرض البياني للبيانات المتصلة

King Faisal University[٢]

د. سعيد سيف الدين



المحاضرة الرابعة

تمهيد

مبادئ الإحصاء

كما ذكرنا سابقاً، فإن البيانات المتصلة هي تلك البيانات التي يمكن أن يأخذ فيها المتغير (الخاصية تحت الدراسة) أية قيمة بين قيمتين محددتين [مثل الأطوال، الأوزان، درجات الحرارة، الدخل الشهري أو السنوي، وغيرها]. ويمكن عرض هذه البيانات أيضاً عن طريق الجداول أو بيانياً. ولتوضيح ذلك دعنا ننظر للمثال التوضيحي التالي:

مثال توضيحي (٢-٤): في تجربة على أطوال سيقان زهور معينة في أحد المعامل البحثية بكلية الزراعة بجامعة الملك فيصل، قيست سيقان 50 زهرة فكانت البيانات كالتالي:

$x_0 \leq x < 20$	$20 \leq x < 30$	$30 \leq x < 35$	$35 \leq x < 40$	$40 \leq x < 50$	$50 \leq x < 60$	
16	12	10	6	2	1	

حيث x هو طول الساق (بوحدة السنتيمتر)، n هو عدد الأزهار.
المطلوب عرض هذه البيانات بطرق مختلفة.

قبل أن نبدأ في عرض البيانات لابد من التذكير والتنويه للتالي:

- البيانات هنا بيانات كمية متصلة فيها المتغير x (طول الزهرة) متغير كمي متصل.
- عدد الأزهار n هو تكرار المتغير x [وهذا واضح].

King Faisal University[٢]

د. سعيد سيف الدين



٣. قيم المتغير x هنا معطاة على صورة ٦ فترات أو ما يسمى بـ **الفئات** حيث :

الفئة	المتغير x (الطول)	يكون المتغير أكبر من أو يساوي 0 إلى ما قبل 20	$0 \leq x < 20$	الفئة الأولى :
الأولى	$0 \leq x < 20$	يكون المتغير أكبر من أو يساوي 20 إلى ما قبل 30	$20 \leq x < 30$	الفئة الثانية :
الثانية	$20 \leq x < 30$	يكون المتغير أكبر من أو يساوي 30 إلى ما قبل 40	$30 \leq x < 40$	الفئة الثالثة :
الثالثة	$30 \leq x < 40$	يكون المتغير أكبر من أو يساوي 40 إلى ما قبل 50	$40 \leq x < 50$	الفئة الرابعة :
الرابعة	$35 \leq x < 40$	يكون المتغير أكبر من أو يساوي 50 إلى ما قبل 60	$50 \leq x < 60$	الفئة الخامسة :
الخامسة	$40 \leq x < 50$			الفئة السادسة :
السادسة	$50 \leq x < 60$			

انتبه للفرق بين المتباينات ، وطريقة قراءتها وأيضاً معناها

$x \geq 0$	$x > 10$	$x \leq 10$	$x < 10$	المتباينة
x أكبر من أو تساوي 10	x أكبر من 10	x أقل من أو تساوي 10	x أقل من 10	طريقة القراءة
أي أن x تأخذ القيمة 10 وأيضاً تأخذ كل القيم الأكبر من 10	أي أن x لا تأخذ القيمة 10 ولكن تأخذ كل القيم الأكبر من 10	أي أن x تأخذ القيمة 10 وأيضاً تأخذ كل القيم الأصغر من 10	أي أن x لا تأخذ القيمة 10 ولكن تأخذ كل القيم الأصغر من 10	معناها



٤. لكل فئة حدان : **حد أدنى** ، **حد أعلى**

الفئة	المتغير x (الطول)
الأولى	$0 \leq x < 20$
الثانية	$20 \leq x < 30$
الثالثة	$30 \leq x < 35$
الرابعة	$35 \leq x < 40$
الخامسة	$40 \leq x < 50$
السادسة	$50 \leq x < 60$

- فالفئة الأولى : حدها الأدنى 0 وحدها الأعلى 20 [وهو الحد الأدنى للفئة الثانية]
- والفئة الثانية : حدها الأدنى 20 [الحد الأعلى للفئة الأولى] وحدها الأعلى 30 [وهو الحد الأدنى للفئة الثالثة]
- والفئة الثالثة : حدها الأدنى 30 [الحد الأعلى للفئة الثانية] وحدها الأعلى 35 [وهو الحد الأدنى للفئة الرابعة]

وهكذا .

الفئة	المتغير x (الطول)
الأولى	0-
الثانية	20-
الثالثة	30-
الرابعة	35-
الخامسة	40-
السادسة	50-60

أي أن الفئات **متصلة** ولا فراغات بينها، والحد الأدنى لكل فئة من الفئات الوسطى [غير الأولى والأخيرة] هو الحد الأعلى للفئة السابقة ، والحد الأعلى لها هو الحد الأدنى للفئة التالية لها .

وعليه ، يمكن كتابة الفئات كما هو مبين



الفئة	المتغير x (الطول)	طول الفئة h
الأولى	$x \leq x < 20$	$20-0=20$
الثانية	$20 \leq x < 30$	$30-20=10$
الثالثة	$30 \leq x < 35$	$35-30=5$
الرابعة	$35 \leq x < 40$	$40-35=5$
الخامسة	$40 \leq x < 50$	$50-40=10$
السادسة	$50 \leq x < 60$	$60-50=10$

٥. لكل فئة **طول** وهو يساوي الفرق بين حدها الأعلى وحدها الأدنى

• فالفئة الأولى طولها يساوي 20 والثانية طولها يساوي 10

والثالثة طولها يساوي 5 والرابعة طولها يساوي 5

والخامسة طولها يساوي 10، أما السادسة (والأخيرة) فطولها يساوي

10. أي أن الفئات [في هذا المثال] ليست متساوية في الطول

٦. لكل فئة **مركز** [وسنرمز له بالرمز x_0] وهي قيمة المتغير x الواقعة في منتصف تلك الفئة، وتُحسب ببساطة

على أنها متوسط حديها الأدنى والأعلى، أي أن:

الفئة	المتغير x (الطول)	مركز الفئة x_0
الأولى	$x \leq x < 20$	$(0+20) \div 2 = 10$
الثانية	$20 \leq x < 30$	$(20+30) \div 2 = 25$
الثالثة	$30 \leq x < 35$	$(30+35) \div 2 = 32.5$
الرابعة	$35 \leq x < 40$	$(35+40) \div 2 = 37.5$
الخامسة	$40 \leq x < 50$	$(40+50) \div 2 = 45$
السادسة	$50 \leq x < 60$	$(50+60) \div 2 = 55$

$$\text{مركز أي فئة } x = \frac{\text{حد الفئة الأدنى} + \text{حدها الأعلى}}{2}$$

ومن ثم يكون مركز الفئة الأولى 10، والثانية 25 والثالثة 32.5، والرابعة 37.5 والخامسة 45، ومركز الفئة الأخيرة (السادسة) 55



د. سعيد سيف الدين

King Fahd University [v]

ويمكن تجميع كل ما تقدم في جدول واحد كالتالي

الفئة	المتغير x (الطول)	طول الفئة h	مركز الفئة x_0
الأولى	$x \leq x < 20$	$20-0=20$	$(0+20) \div 2 = 10$
الثانية	$20 \leq x < 30$	$30-20=10$	$(20+30) \div 2 = 25$
الثالثة	$30 \leq x < 35$	$35-30=5$	$(30+35) \div 2 = 32.5$
الرابعة	$35 \leq x < 40$	$40-35=5$	$(35+40) \div 2 = 37.5$
الخامسة	$40 \leq x < 50$	$50-40=10$	$(40+50) \div 2 = 45$
السادسة	$50 \leq x < 60$	$60-50=10$	$(50+60) \div 2 = 55$

وبعد هذا التمهيد الضروري، نعود إلى مثالنا، حيث يمكن عرض البيانات (الكمية المتصلة) إما عن طريق جداول (تكرارية أو تكرارية نسبية) أو بيانياً كما في حالة البيانات المنفصلة التي سبق وتعرضنا لها من قبل



د. سعيد سيف الدين

King Fahd University [v]

١. الجدول (التوزيع) التكراري (أو التكراري النسبي) :

يُعتبر الجدول الأخير [بعد إضافة عمود التكرار أو عمود التكرار النسبي له] إحدى طرق عرض البيانات وبالتالي يمكننا الحصول على الجدول (التوزيع) التكراري (أو التكراري النسبي للبيانات

التكرار النسبي $\bar{f}$	التكرار (العدد) f	مركز الفئة x_0	طول الفئة c	المغير x (الطول)
4 + 50 = 0.08 or 8%	4	10	x0	0 ≤ x < 20
16 ÷ x0 = 0.32 or 32%	16	25	10	20 ≤ x < 30
12 ÷ 50 = 0.24 or 24%	12	32.5	5	30 ≤ x < 35
10 ÷ 50 = 0.20 or 20%	10	37.5	5	35 ≤ x < 40
6 ÷ 50 = 0.12 or 12%	6	45	10	40 ≤ x < 50
2 + x0 = 0.04 or 4%	2	55	10	50 ≤ x < 60
$\sum f = 50$	يمكن الاستغناء عنهما هنا			
$\sum \bar{f} = 1$ or 100%				

الجدول (التوزيع) التكراري

الجدول (التوزيع) التكراري النسبي

٢. الجدول (التوزيع) التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع :

وفي حالة البيانات المتصلة قد يكون من المفيد تكوين ما يسمى **بالتوزيع التكراري المتجمع** **الصاعد** الذي يعطى مجموع التكرارات المقابلة لجميع القيم الأقل من الحد الأدنى لكل فئة من الفئات

جدول التكراري		
التكرار x	التغير x (طول)	من الصفحة السابقة
4	$x \leq 20$	
16	$20 \leq x < 30$	
$1x$	$30 \leq x < 35$	
10	$35 \leq x < 40$	
6	$40 \leq x < 50$	
x	$50 \leq x < 60$	
$\Sigma f = 50$		

الجدول (التوزيع) التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الصاعد			
	التكرار النسبي المتجمع	التكرار المتجمع	المتغير x (الطول)
أقل من 0	$0 \div 50 = 0$ [0%]	0	$x < 0$
أقل من 20	$4 \div 50 = 0,08$ [8%]	$0 + 4 = 4$	$x < 20$
أقل من 30	$20 \div 50 = 0,40$ [40%]	$4 + 16 = 20$	$x < 30$
أقل من 35	$32 \div 50 = 0,64$ [64%]	$20 + 12 = 32$	$x < 35$
أقل من 40	$42 \div 50 = 0,84$ [84%]	$32 + 10 = 42$	$x < 40$
أقل من 50	$48 \div 50 = 0,96$ [96%]	$42 + 6 = 48$	$x < 50$
أقل من 60	$50 \div 50 = 1$ [100%]	$48 + 2 = 50$	$x < 60$

ذيل السهم يدل على البداية
 ويشير يدل على المصير
 الذيل للسكرات

 Σf Σf

وفي أحيان أخرى قد يكون من المرغوب فيه الحصول على التوزيع التكراري المتجمع لجميع القيم الأكبر من أو المساوية للحد الأدنى لكل فئة. عندئذ يسمى التوزيع بالتوزيع التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الملبط (أو النازل).

جدول التكراري	
التكرار f	المتغير x (الطول)
4	$0 \leq x < 20$
16	$20 \leq x < 30$
12	$30 \leq x < 35$
10	$35 \leq x < 40$
6	$40 \leq x < 50$
2	$50 \leq x < 60$
$\Sigma f = 50$	

الترتيب	الجدول		
	الترتيب	التكرار النسبي المتجمع	التكرار النسبي المتجمع
0 أو أكثر	$x \geq 0$	$46+4= 50$	$50 \div 50=1$ [100%]
20 أو أكثر	$x \geq 20$	$30+16= 46$	$46 \div 50= 0,92$ [92%]
30 أو أكثر	$x \geq 30$	$18+12= 30$	$30 \div 50= 0,60$ [60%]
35 أو أكثر	$x \geq 35$	$8+10= 18$	$18 \div 50= 0,36$ [36%]
40 أو أكثر	$x \geq 40$	$2+6=8$	$8 \div 50= 0,16$ [16%]
50 أو أكثر	$x \geq 50$	$0+2=2$	$2 \div 50= 0,04$ [4%]
60 أو أكثر	$x \geq 60$	0	$0 \div 50=0$ [0%]

وَيُخَوِّدُكَ بِاللَّيْلِ وَيَأْتِيكَ بِسَحَابٍ مُمِيزٍ
وَيُخَوِّدُكَ بِاللَّيْلِ وَيَأْتِيكَ بِسَحَابٍ مُمِيزٍ

هل لاحظت الفرق بين التوزيعين

المتجمع الصاعد

والمجتمع الهابط

التكرار	التكرار x
4	$0 \leq x < 20$
16	$20 \leq x < 30$
12	$30 \leq x < 35$
10	$35 \leq x < 40$
6	$40 \leq x < 50$
2	$50 \leq x < 60$
$\Sigma f = 50$	

التوزيع التكراري المتجمع الصاعد		$\sum f$
التكرار المتجمع	التغير x (الطول)	
0	أقل من x	الحد الأدنى للفترة الأولى
0+4=4	أقل من 20	
4+16=20	أقل من 30	الحد الأعلى للفترة الأخيرة
20+32=52	أقل من 35	
52+42=94	أقل من 40	
94+48=142	أقل من 50	
142+50=192	أقل من 60	
192+2=194	أقل من 60	
194		

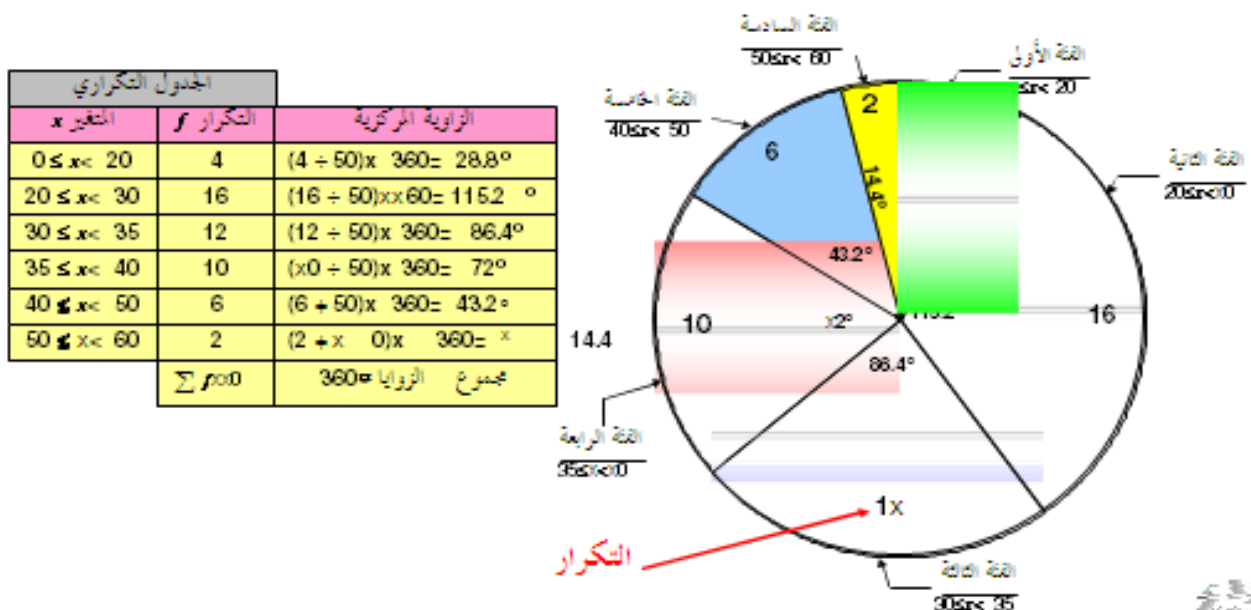
يمكن عرض البيانات المتصلة بطرق مختلفة وكل طريقة لها مزاياها ويمكن أن ترد على بعض الأسئلة بأسلوب أسرع من نظيرتها، لذا سنستعرض بعضاً من هذه الطرق. وكما ذكرنا سابقاً (عند تعاملنا مع البيانات المنفصلة) أنه من أساسيات عرض أي بيانات بيانياً هو **وضوح وبساطة** طريقة العرض ولا مانع من أن تكون أيضاً **جاذبة**. ولعرض للبيانات المعطاة في المثال التوضيحي (٣-٤) السابق يجب القيام أولاً بتنظيم البيانات [إن كانت على صورة بيانات خام] ووضعها في صورة جدول تكراري أو جدول تكراري نسبي [كما سبق] ثم نقوم بعرضها بيانياً بطرق مختلفة منها:

- **الدائرية:** مشابجة تماماً لطريقة الدائرة في عرض البيانات المنفصلة، لذا سنبدأ بها.
- **المدرج التكراري:** وهي تناظر طريقة الأعمدة البسيطة في حالة البيانات المنفصلة.
- **المضلع (أو المنحنى) التكراري:** وهي تناظر طريقة المضلع (أو المنحنى) التكراري للبيانات المنفصلة.
- **المضلع (أو المنحنى) التكراري المتجمع الصاعد (أو الهابط):**

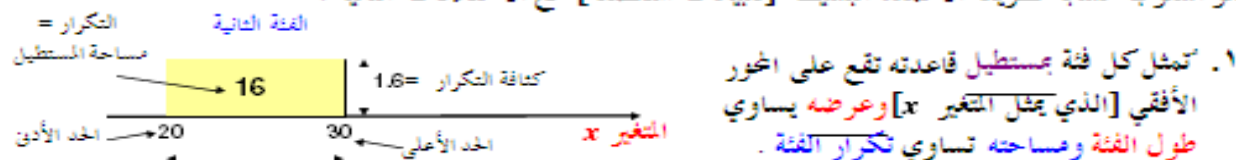
وهي طريقة ذات أهمية كبيرة في حالة البيانات الكمية المتصلة



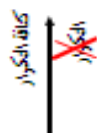
تمثل كل **فئة** قطاع دائري طبقاً للزاوية المركزية لهذه الفئة. إذن **لا بد** من تحديد الزوايا المركزية أولاً ثم تمثيل البيانات بنفس الطريقة التي اتبعناها مع البيانات المنفصلة.



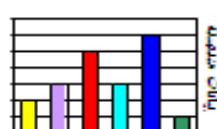
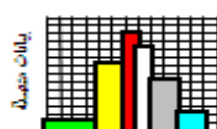
هو أسلوب مشابه لطريقة الأعمدة البسيطة [للبينات المنفصلة] مع الاختلافات التالية :



وحيث أن مساحة أي مستطيل تساوي عرض المستطيل مضروباً في ارتفاعه ، فإن ارتفاع أي مستطيل يكون مساوياً لـ "تكرار الفئة مقسوماً على طول الفئة" . سنسمي خارج القسمة هذا بـ "كثافة التكرار" .



٢. المحور الرأسى هنا يمثل كثافة التكرار [وليس التكرار كما في حالة الأعمدة البسيطة] .



٣. لافراغات موجودة بين المستطيلات [حيث أن البيانات هنا بيانات متصلة] بخلاف طريقة الأعمدة في حالة البيانات المنفصلة حيث يجب ألا تكون الأعمدة متلاصقة .



وبالتالي لرسم المدرج التكراري لابد أن نضيف للجدول التكراري أعمدة تبين طول كل فئة وكثافة تكرارها

الفئة	المتغير x (الطول)
الأولى	$0 \leq x < 20$
الثانية	$20 \leq x < 30$
الثالثة	$30 \leq x < 35$
الرابعة	$35 \leq x < 40$
الخامسة	$40 \leq x < 50$
السادسة	$50 \leq x < 60$

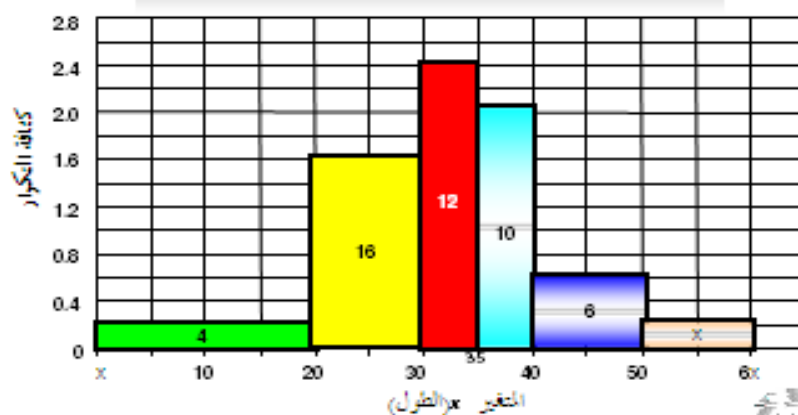


المتغير x (الطول)	التكرار (العدد) f	طول الفئة c	كثافة التكرار $x \div c$
$x \leq x < x_0$	x	20	$4 + 20 = 0.2$
$x_0 \leq x < 3x$	16	10	$16 \div 10 = 1.6$
$30 \leq x < 35$	12	5	$12 \div 5 = 2.4$
$35 \leq x < 40$	10	5	$10 \div 5 = 2$
$40 \leq x < 50$	6	10	$6 \div 10 = 0.6$
$50 \leq x < 60$	2	10	$2 \div 10 = 0.2$



المتغير x	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار
$0 \leq x < 20$	4	20	0.2
$20 \leq x < 30$	16	10	1.6
$30 \leq x < 35$	12	5	2.4
$35 \leq x < 40$	10	5	2
$40 \leq x < 50$	6	10	0.6
$50 \leq x < 60$	2	10	0.2

والآن يمكن رسم المدرج التكراري بأخذ محورين متعامدين: الأفقي ويمثل المتغير x [وهنا مقياس الرسم له أو تدرججه مهم] والرأسي يمثل كثافة التكرار ونقوم بتبثيل كل فئة بمستطيل قاعدته على المحور الأفقي (وطولها = طول الفئة) وارتفاعه يمثل كثافة تكرار الفئة (وبالتالي مساحته تساوي تكرار الفئة).



المضلع (المنحنى) التكراري للبيانات الكمية المتصلة

وهو أسلوب مشابه لطريقة المضلع التكراري للبيانات المنفصلة ، إلا أن كل فئة تمثل بنقطة : إحداثيها الأفقي هو مركز الفئة ، وإحداثيها الرأسي هو كثافة تكرارها .

وبالتالي لرسم المضلع التكراري لابد أن نضيف للجدول التكراري أعمدة تبين طول كل فئة وكثافة تكرارها [كما في حالة المدرج التكراري] إلى جانب عمود يبين مركز الفئة .

المتغير x (الطول)	التكرار (العدد) f	طول الفئة c	مركز الفئة x_0	كثافة التكرار
$0 \leq x < 20$	4	20	10	0.2
$20 \leq x < 30$	16	10	25	1.6
$30 \leq x < 35$	12	5	32.5	2.4
$35 \leq x < 40$	10	5	37.5	2
$40 \leq x < 50$	6	10	45	0.6
$50 \leq x < 60$	2	10	55	0.2



المتغير x (الطول)	تركيبة الفئة x_0	كثافة التكرار	النقطة
$0 \leq x < 20$	10	0.2	(10, 0.2)
$20 \leq x < 30$	25	1.6	(25, 1.6)
$30 \leq x < 35$	32.5	2.4	(32.5, 2.4)
$35 \leq x < 40$	37.5	2	(37.5, 2)
$40 \leq x < 50$	45	0.6	(45, 0.6)
$50 \leq x < 60$	55	0.2	(55, 0.2)

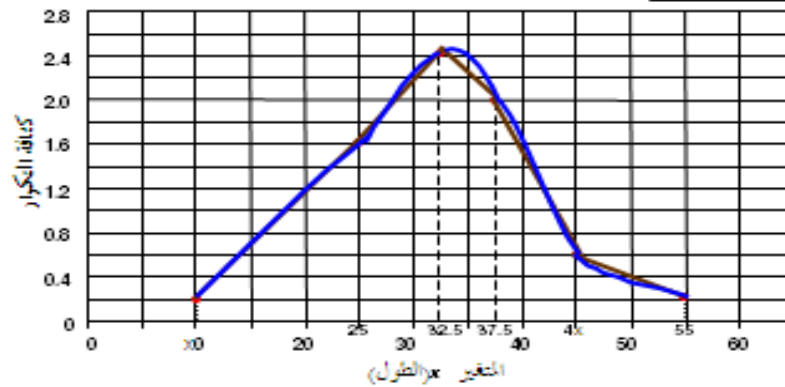
وبأخذ محورين متعامدين: الأفقي (يمثل المتغير x) والرأسي (يمثل كثافة التكرار)، نقوم بتمثيل الفئات بالنقاط المبينة بالجدول.

ثم نقوم بتوصيل هذه النقاط بالمسطرة نحصل على خط منكسر هو المضلع التكراري للبيانات.

أما إذا قمنا بتوصيل النقاط باليد وبطريقة ناعمة نحصل على خط ممد هو المنحنى التكراري لمجموعة البيانات.

أخذنا من الجدول السابق ما يهنا

المضلع التكراري
المنحنى التكراري



المتغير x (الطول)	تركيبة الفئة x_0	كثافة التكرار	النقطة
$0 \leq x < 20$	10	0.2	(10, 0.2)
$20 \leq x < 30$	25	1.6	(25, 1.6)
$30 \leq x < 35$	32.5	2.4	(32.5, 2.4)
$35 \leq x < 40$	37.5	2	(37.5, 2)
$40 \leq x < 50$	45	0.6	(45, 0.6)
$50 \leq x < 60$	55	0.2	(55, 0.2)

لاحظ أنه يمكن رسم المدرج التكراري والمضلع التكراري والمنحنى التكراري على رسم واحد، حيث أن نقطة منتصف القاعدة العليا من كل مستطيل في المدرج التكراري هي النقطة المبينة للفئة عند رسم كل من المضلع التكراري والمنحنى التكراري



المحاضرة الخامسة

تكملة لما سبق

المحاضرة الخامسة

{قالوا سبحانه لا علم لنا إلا ما علمتنا ، إنك أنت العليم الحكيم}

مبادئ الإحصاء

عناصر المحاضرة

تابع العرض البياني للبيانات الكمية المتصلة

- (١) ملخص لما سبق شرحه في المحاضرة السابقة (المحاضرة الرابعة)
- (٢) المضلع (المنحنى) التكراري المتجمع

مراجعة عامة على الباب الثاني [التوزيعات التكرارية]



King Faisal University [٣]

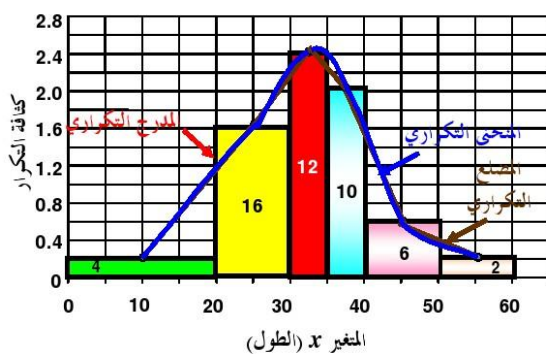
د. سعيد سيف الدين

المحاضرة الخامسة

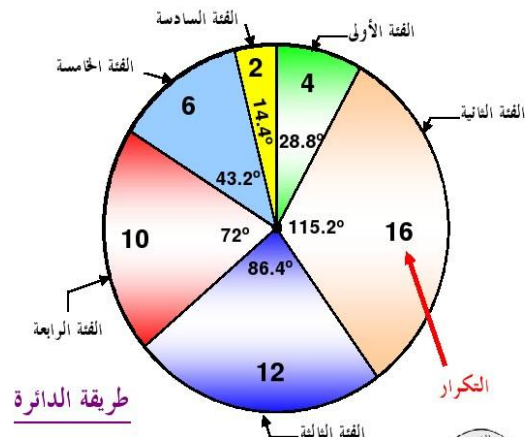
ملخص لما سبق

مبادئ الإحصاء

	الجدول التكراري		الزاوية المركزية	طول الفئة C	مركز الفئة x_0	كثافة التكرار	النقطة الممثلة للفئة
	المتغير x	التكرار f					
الفئة الأولى	$0 \leq x < 20$	4	28.8°	20	10	0.2	(10 , 0.2)
الفئة الثانية	$20 \leq x < 30$	16	115.2°	10	25	1.6	(25 , 1.6)
الفئة الثالثة	$30 \leq x < 35$	12	86.4°	5	32.5	2.4	(32.5 , 2.4)
الفئة الرابعة	$35 \leq x < 40$	10	72°	5	37.5	2	(37.5 , 2)
الفئة الخامسة	$40 \leq x < 50$	6	43.2°	10	45	0.6	(45 , 0.6)
الفئة السادسة	$50 \leq x < 60$	2	14.4°	10	55	0.2	(55 , 0.2)
		$\sum f = 50$	المجموع = 360°				



طرق عرض مختلفة للبيانات الكمية المتصلة



King Faisal University [٤]

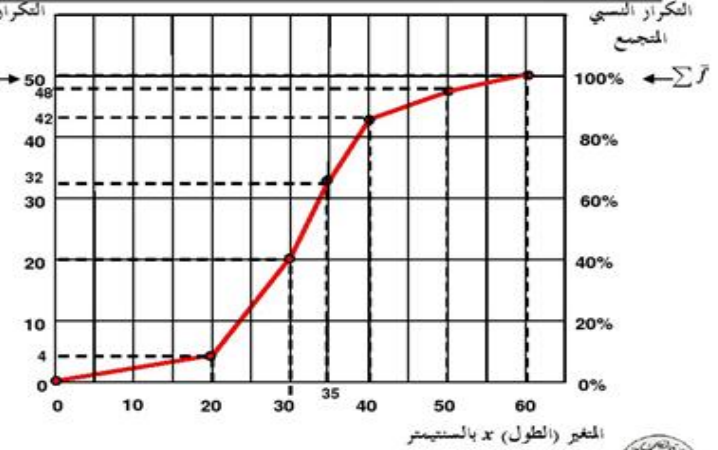
د. سعيد سيف الدين

ذكرنا سابقاً عند عرضنا للبيانات عن طريق الجداول أنه يمكن عرض البيانات عن طريق التوزيع التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الصاعد، ويمكن الاستفادة من هذه الجداول في رسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد كالآتي :

التكرار f	المتغير x
4	$0 \leq x < 20$
16	$20 \leq x < 30$
12	$30 \leq x < 35$
10	$35 \leq x < 40$
6	$40 \leq x < 50$
2	$50 \leq x < 60$
$\Sigma f = 50$	

التكرار المتجمع المناظر
الحد الأدنى للفترة
(30, 20)

المضلع التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الصاعد



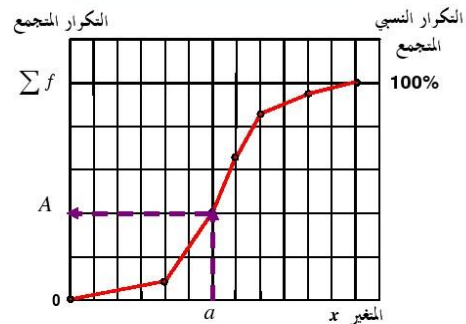
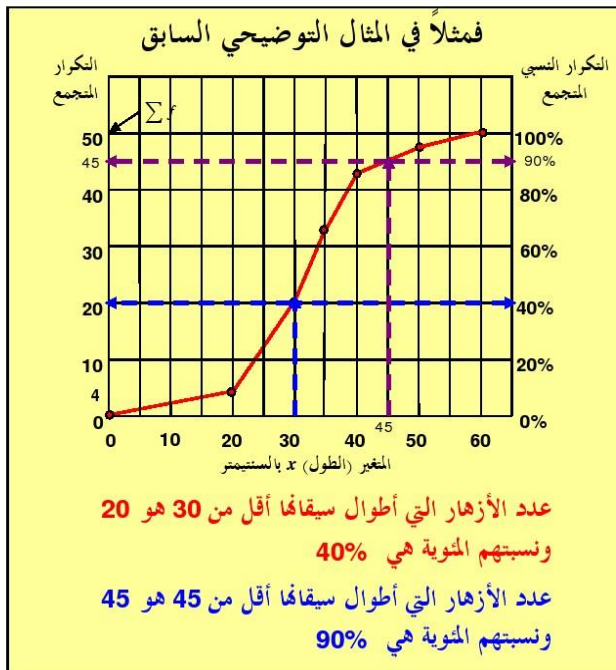
المتغير x	التكرار المتجمع	التكرار النسبي المتجمع	النقطة الموضوعة على الرسم
< 0	0	0%	(0, 0)
< 20	4	8%	(20, 4)
< 30	20	40%	(30, 20)
< 35	32	64%	(35, 32)
< 40	42	84%	(40, 42)
< 50	48	96%	(50, 48)
< 60	50	100%	(60, 50)



وفيد المضلع التكراري المتجمع الصاعد في الرد على العديد من الأسئلة نستعرض بعضها في التالي :

• تحديد التكرار المتجمع المناظر لـ :

“ x أقل من قيمة معينة”

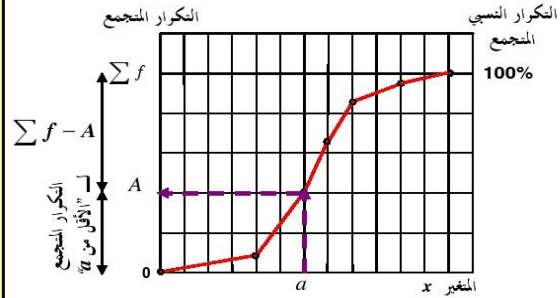


فلحساب قيمة التكرار المتجمع المناظر لـ “ $x < a$ ” نحدد قيمة a على المحور الأفقي [محور المتغير] ونرسم خطاً رأسياً حتى يتقاطع مع المضلع في نقطة ، فيكون التكرار المتجمع المطلوب هي القراءة الأفقية A [على محور التكرار المتجمع] المناظرة لنقطة التقاطع



• تحديد التكرار المتجمع المناظر لـ :

"x أكبر من أو تساوي قيمة معينة"

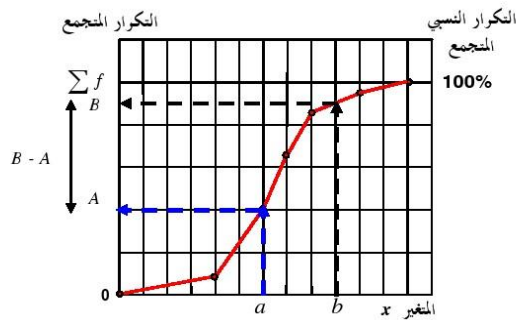


فلحساب قيمة التكرار المتجمع المناظر لـ " $x \geq a$ " نحدد قيمة a على محور الأفقي [محور المتغير] ونرسم خطاً رأسياً حتى يتقاطع مع المصّلع في نقطة ونحدد القراءة الأفقية A [على محور التكرار المتجمع] ، ويكون الحل المطلوب هو "المجموع الكلي للتكرارات - القيمة A "



• تحديد التكرار المتجمع المناظر لـ :

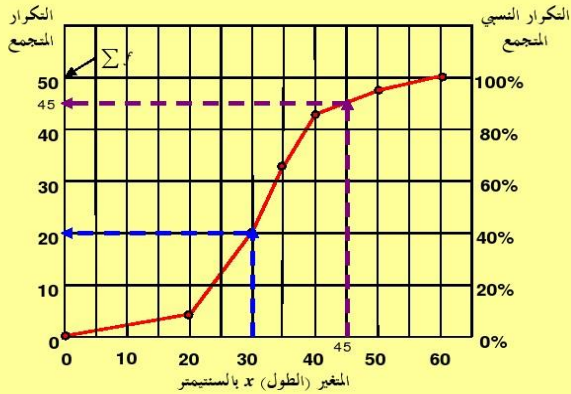
"x محصورة بين قيمتين"



فلحساب قيمة التكرار المتجمع المناظر لـ " $a \leq x < b$ " نحدد قيمتي a, b على محور الأفقي [محور المتغير] ونحدد قيم التكرارات المتجمعة المناظرة [لتكن A, B على الترتيب] ، فيكون الحل المطلوب هو : الفرق بين القيمتين A, B



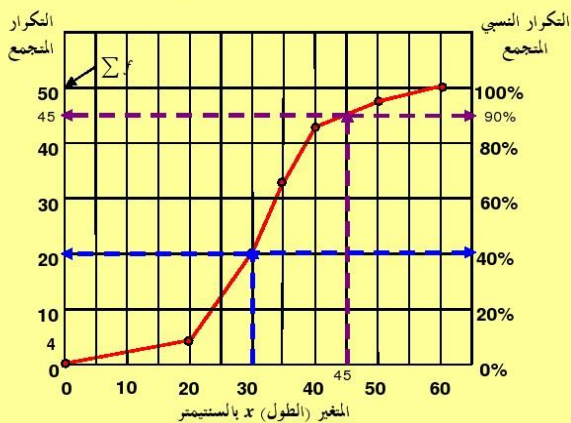
فمثلاً في المثال التوضيحي السابق



عدد الأزهار التي أطوال سيقانها 30 فأكثر هو :
 $50 - 20 = 30$

عدد الأزهار التي أطوال سيقانها 45 فأكثر هو :
 $50 - 45 = 5$

فمثلاً في المثال التوضيحي السابق



عدد الأزهار التي أطوال سيقانها ما بين 30 ، 45 هو :
 $45 - 20 = 25$

ونسبتهم المئوية تساوي : $\frac{25}{50} \times 100 = 50\%$
أو من الرسم : $90 - 40 = 50\%$

وبنفس طريقة المضلع التكراري المتجمع الصاعد يمكن رسم المضلع التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الهابط كالآتي :

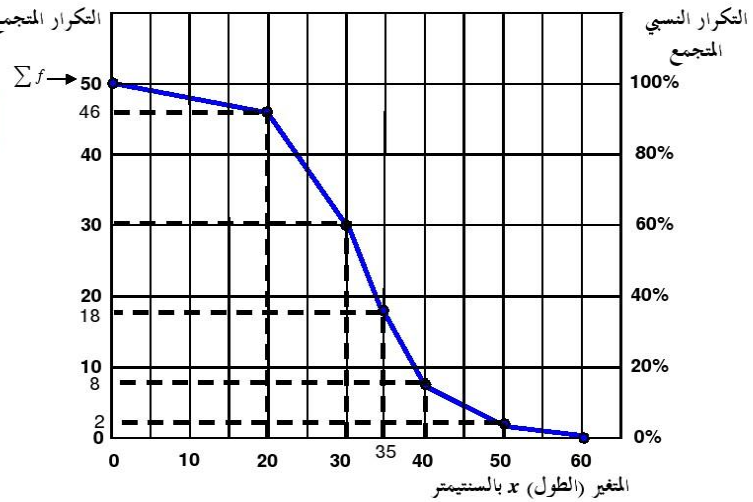
التوزيع التكراري الأصلي	
التكرار f	المتغير x
4	$0 \leq x < 20$
16	$20 \leq x < 30$
12	$30 \leq x < 35$
10	$35 \leq x < 40$
6	$40 \leq x < 50$
2	$50 \leq x < 60$
$\sum f = 50$	

التكرار المتجمع المناظر

الحد الأدنى للفترة
(30, 30)

المضلع التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الهابط

التكرار المتجمع



التوزيع التكراري المتجمع الهابط			
المتغير x	التكرار المتجمع	التكرار النسبي المتجمع	النقطة الموقعة على الرسم
≥ 0	50	100%	(0, 50)
≥ 20	46	92%	(20, 46)
≥ 30	30	60%	(30, 30)
≥ 35	18	36%	(35, 18)
≥ 40	8	16%	(40, 8)
≥ 50	2	4%	(50, 2)
≥ 60	0	0%	(60, 0)



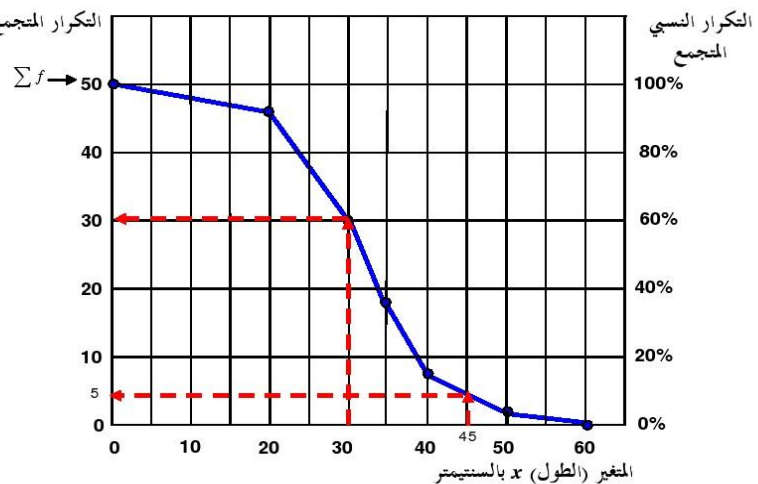
وفيق المضلع التكراري المتجمع الهابط في الرد على نفس الأسئلة التي يرد عليها المضلع التكراري المتجمع الصاعد مع الأخذ في الاعتبار أن التدرج الرأسي [التكرار المتجمع] يمثل التكرار المناظر لـ " x أكبر من أو تساوي"

فمثلاً في المثال التوضيحي السابق

- عدد الأزهار التي أطوال سيقانها 30 فأكثر هو 30 بينما عدد الأزهار التي أطوال سيقانها أقل من 30 هو : $50 - 30 = 20$
- عدد الأزهار التي أطوال سيقانها 45 فأكثر هو 5 بينما عدد الأزهار التي أطوال سيقانها أقل من 45 هو : $50 - 5 = 45$
- عدد الأزهار التي أطوال سيقانها ما بين 30 , 45 هو : $30 - 5 = 25$

قارن النتائج السابقة بالنتائج التي سبق وحصلنا عليها باستخدام المضلع التكراري المتجمع المتصاعد

التكرار المتجمع



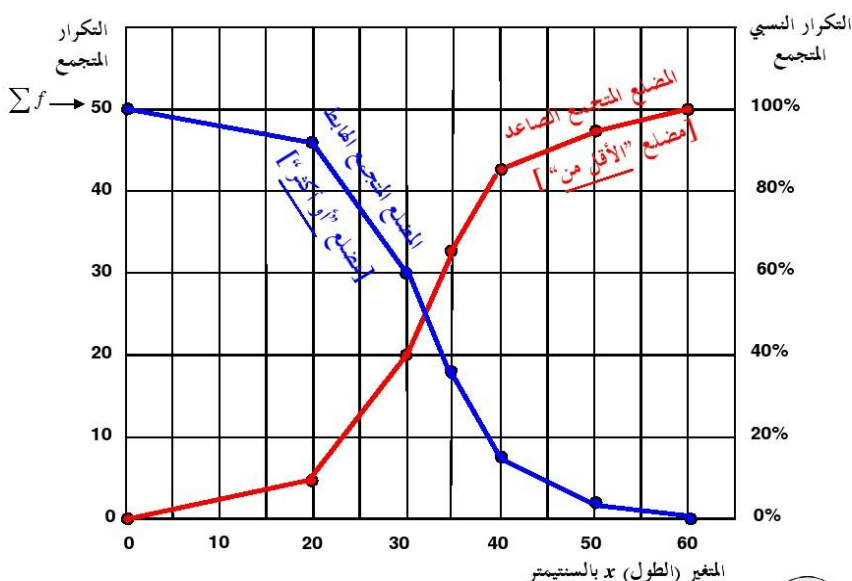
أي أن المضلعان التكراريان المتجمعان الصاعد و الهابط يؤديان نفس الغرض ، لذا سنوجه اهتمامنا لأحدهما فقط [وليكن الصاعد]



ويمكن رسم المثلثين التكراريين المتجمعين : **الصاعد** و**الهابط** على رسمة واحدة كما هو مبين :

التوزيع التكراري المتجمع الصاعد			
النقطة الموقوفة على الرسم	التكرار النسبي المتجمع	التكرار المتجمع	المتغير x
(0 , 0)	0%	0	< 0
(20 , 4)	8%	4	< 20
(30 , 20)	40%	20	< 30
(35 , 32)	64%	32	< 35
(40 , 42)	84%	42	< 40
(50 , 48)	96%	48	< 50
(60 , 50)	100%	50	< 60

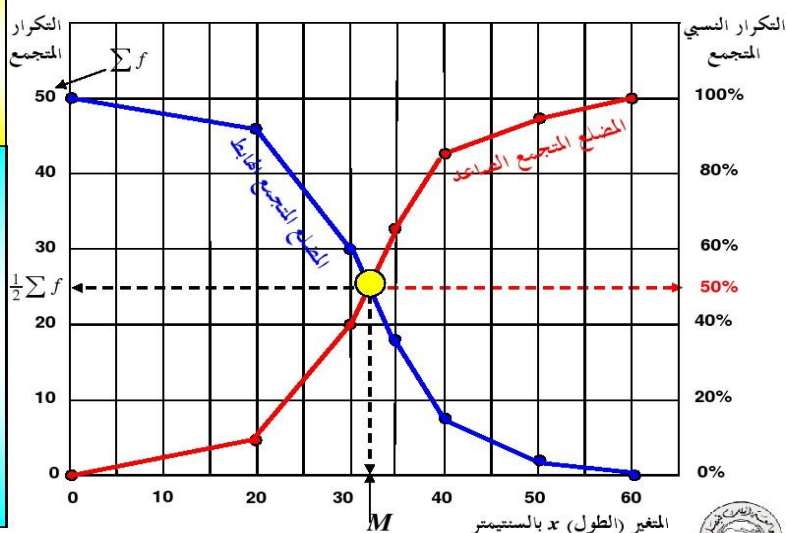
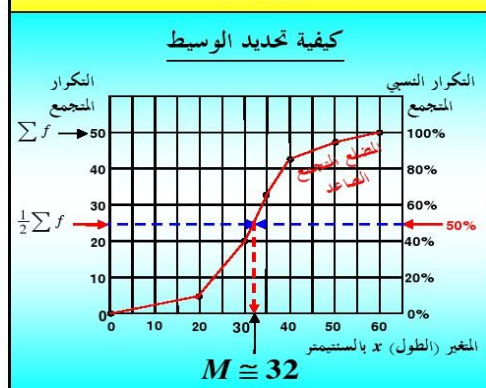
التوزيع التكراري المتجمع الهابط			
النقطة الموقوفة على الرسم	التكرار النسبي المتجمع	التكرار المتجمع	المتغير x
(0 , 50)	100%	50	≥ 0
(20 , 46)	92%	46	≥ 20
(30 , 30)	60%	30	≥ 30
(35 , 18)	36%	18	≥ 35
(40 , 8)	16%	8	≥ 40
(50 , 2)	4%	2	≥ 50
(60 , 0)	0%	0	≥ 60

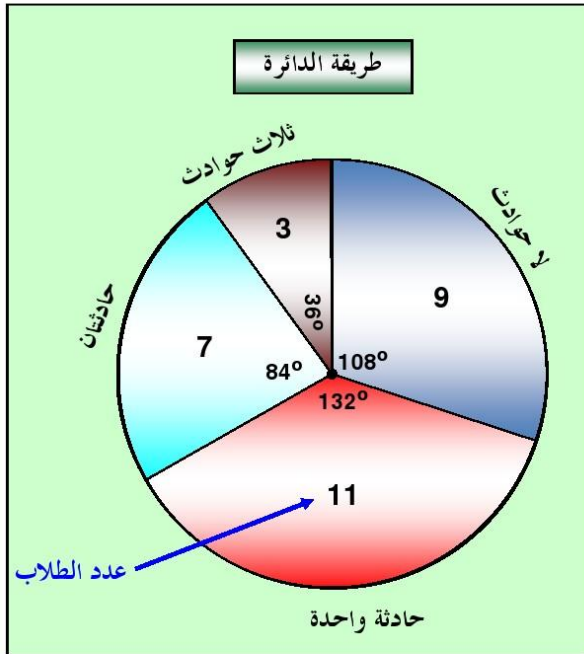


ونلاحظ أن المثلثين يتقاطعان في نقطة ، قيمة المتغير x عندها تساوي M (مثلاً) ، هذه القيمة يناظرها تكرار متجمع يساوي $\frac{1}{2} \sum f = 25$ في مثالنا التوضيحي] **وتكرار متجمع نسبي قدره 50%** . هذه القيمة M تُسمى

بالوسيط

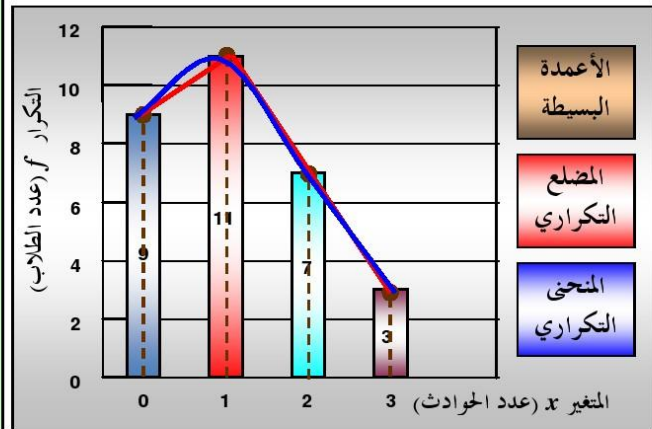
أي أن **وسيط** مجموعة من البيانات المرتبة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً هي قيمة في وسط مجموعة القيم تقسم المجموعة إلى مجموعتين متساويتين في العدد





x	f	$\bar{f}$	الزاوية المركزية
0	9	30%	$(9 \div 30) \times 360 = 108^\circ$
1	11	37%	$(11 \div 30) \times 360 = 132^\circ$
2	7	23%	$(7 \div 30) \times 360 = 84^\circ$
3	3	10%	$(3 \div 30) \times 360 = 36^\circ$
30	100%		360°

$\sum f$ $\sum \bar{f}$ مجموع الزوايا



مثال (٢-٦) : الجدول التالي يبين الأجر السنوي [بآلاف الريالات السعودية] لـ 60 عاملاً في إحدى الشركات :

الدخل x (بآلاف)	50 -	60 -	70 -	80 -	90 -	100 -	120 - 180
عدد العمال f	6	9	15	12	9	6	3

- (أ) أوجد المدى R للأجور .
- (ب) اعرض البيانات السابقة باستخدام طريقة الدائرة ، المدرج التكراري ، المضلع التكراري .
- (ج) كون كلاً من الجدولين التكراري المتجمع الصاعد والتكراري المتجمع الهابط .
- (د) ارسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد ومنه قدر عدد العاملين الذين يحصلون على أجر :
- (١) أقل من 88 ألف سنوياً
- (٢) 96 ألف سنوياً أو أكثر
- (٣) لا يقل عن 63 ألف سنوياً ولا يزيد عن 75 ألف سنوياً
- (هـ) قدر قيمة الوسيط M للأجور .



(أ) المدى R للأجور : ذكرنا في حالة البيانات الكمية المتقطعة أن المدى هو الفرق بين أكبر قيمة في البيانات وأصغر قيمة فيها . نفس الشيء في حالة البيانات الكمية المتصلة ، ولكن هنا [في حالة البيانات الكمية المتصلة] : تكون أكبر قيمة هي الحد الأعلى للفئة الأخيرة $[= 180]$ ، وأصغر قيمة هي الحد الأدنى للفئة الأولى $[= 50]$.

$$R = 180 - 50 = 130$$

الجدول التكراري النسبي

النقطة	كثافة التكرار	مركز الفئة x_0	طول الفئة c	الزاوية المركزية	التكرار النسبي	التكرار f	المتغير (الأجر) x	الفئة
(55 , 0.6)	0.6	55	10	36°	10%	6	$50 \leq x < 60$	الأولى
(65 , 0.9)	0.9	65	10	54°	15%	9	$60 \leq x < 70$	الثانية
(75 , 1.5)	1.5	75	10	90°	25%	15	$70 \leq x < 80$	الثالثة
(85 , 1.2)	1.2	85	10	72°	20%	12	$80 \leq x < 90$	الرابعة
(95 , 0.9)	0.9	95	10	54°	15%	9	$90 \leq x < 100$	الخامسة
(110 , 0.3)	0.3	110	20	36°	10%	6	$100 \leq x < 120$	السادسة
(150 , 0.05)	0.05	150	60	18°	5%	3	$120 \leq x < 180$	السابعة
				المجموع $= 360^\circ$	$\sum f = 100\%$	$\sum f = 60$		

والمعلومات التالية هي التي يمكن أن نحتاجها للرد على الجزء (ب) بالكامل

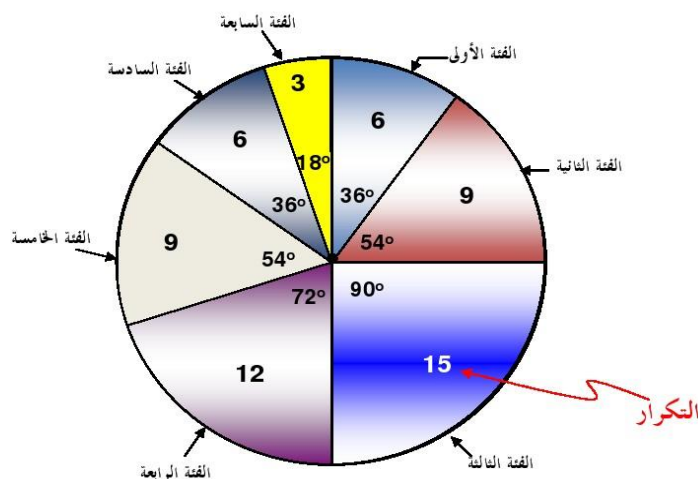
نحتاج إليهما في المدرج التكراري

نحتاجه في المصنع التكراري



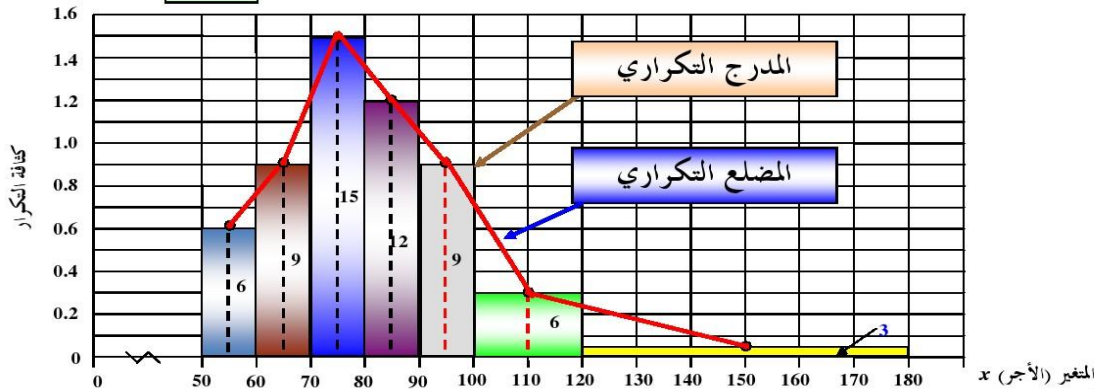
(ب) عرض البيانات بطريقة الدائرة :

الزاوية المركزية	التكرار f	المتغير (الأجر) x	الفئة
36°	6	$50 \leq x < 60$	الأولى
54°	9	$60 \leq x < 70$	الثانية
90°	15	$70 \leq x < 80$	الثالثة
72°	12	$80 \leq x < 90$	الرابعة
54°	9	$90 \leq x < 100$	الخامسة
36°	6	$100 \leq x < 120$	السادسة
18°	3	$120 \leq x < 180$	السابعة
المجموع $= 360^\circ$	$\sum f = 60$		



الجدول التكراري					
الفئة	المتغير (الأجر) x	التكرار f	طول الفئة c	مركز الفئة	كثافة التكرار
الأولى	$50 \leq x < 60$	6	10	55	0.6
الثانية	$60 \leq x < 70$	9	10	65	0.9
الثالثة	$70 \leq x < 80$	15	10	75	1.5
الرابعة	$80 \leq x < 90$	12	10	85	1.2
الخامسة	$90 \leq x < 100$	9	10	95	0.9
السادسة	$100 \leq x < 120$	6	20	110	0.3
السابعة	$120 \leq x < 180$	3	60	150	0.05
		$\sum f = 60$			

المدرج التكراري والمضلع التكراري



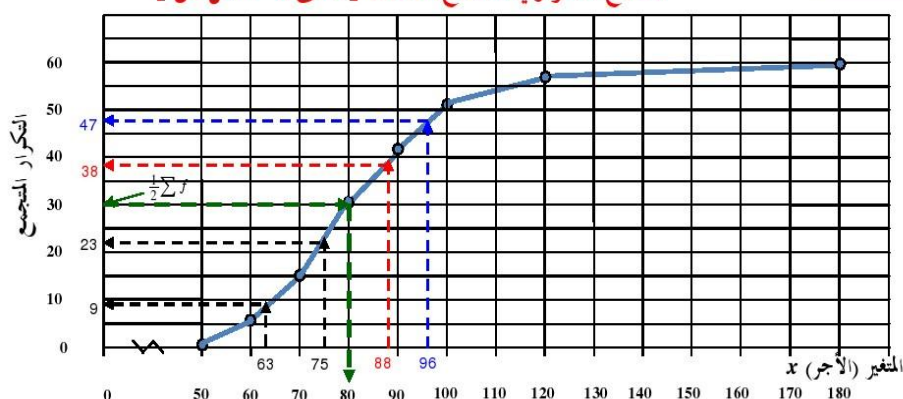
(ج) الجدول التكراري المتجمع الصاعد والجدول التكراري المتجمع الهابط

الجدول التكراري			التوزيع التكراري المتجمع الهابط			التوزيع التكراري المتجمع الصاعد		
الفئة	المتغير (الأجر) x	التكرار f	المتغير x	التكرار المتجمع	التكرار النسبي المتجمع	المتغير x	التكرار المتجمع	التكرار النسبي المتجمع
الأولى	$50 \leq x < 60$	6	≥ 50	60	100%	< 50	0	0%
الثانية	$60 \leq x < 70$	9	≥ 60	54	90%	< 60	6	10%
الثالثة	$70 \leq x < 80$	15	≥ 70	45	75%	< 70	15	25%
الرابعة	$80 \leq x < 90$	12	≥ 80	30	50%	< 80	30	50%
الخامسة	$90 \leq x < 100$	9	≥ 90	18	30%	< 90	42	70%
السادسة	$100 \leq x < 120$	6	≥ 100	9	15%	< 100	51	85%
السابعة	$120 \leq x < 180$	3	≥ 120	3	5%	< 120	57	95%
		$\sum f = 60$	≥ 180	0	0%	< 180	60	100%



(د) المضلع التكراري المتجمع الصاعد

المضلع التكراري المتجمع الصاعد [منحنى الـ "أقل من"]



التوزيع التكراري المتجمع الصاعد		
المتغير x	التكرار المتجمع	النقطة
< 50	0	(50 , 0)
< 60	6	(60 , 6)
< 70	15	(70 , 15)
< 80	30	(80 , 30)
< 90	42	(90 , 42)
< 100	51	(100 , 51)
< 120	57	(120 , 57)
< 180	60	(180 , 60)

(١) عدد العاملين الذين يحصلون على أقل من 88 ألف سنوياً حوالي : 38

(٢) عدد العاملين الذين يحصلون على 96 ألف سنوياً أو أكثر حوالي : $60 - 47 = 13$

(٣) عدد العاملين الذين يحصلون على أجر لا يقل عن 63 ألف ولا يزيد عن 75 ألف سنوياً حوالي :

$$23 - 9 = 14$$

(هـ) الوسيط M : هي قيمة x المناظرة لتكرار متجمع قدره $\frac{1}{2} \sum f$ أي 30 : $M = 80$ 

عناصر المحاضرة

تابع مراجعة عامة على الباب الثاني [التوزيعات التكرارية]

حيث نتابع المراجعة العامة التي بدأناها في المحاضرة الماضية [المحاضرة الخامسة] وذلك بعرض عدد من التمرينات المحلولة والتي روعي في أسئلتها أن تكون موضوعية [إختيارات متعددة] وبنفس الأسلوب التي ستوضع بها أسئلة إختبارات نهاية الفصل الدراسي وأيضاً أسئلة الواجبات حتى يألف كل طالب وطالبة على كل من أسئلة الاختبار النهائي وأسئلة الواجبات

لكن ما أنصح به ألا فحمل الأسئلة التقليدية [مثل المثالين السابقين (٢-٥) ، (٢-٦)] حيث أن هذا النوع من الأمثلة التقليدية هو الأساس الذي بدونه لا نستطيع التعامل مع أسئلة الاختيار المتعدد



تمارين محلولة على "تمثيل البيانات الكمية المتصلة"

س ١ : التكرار النسبي لفئة من الفئات هو :

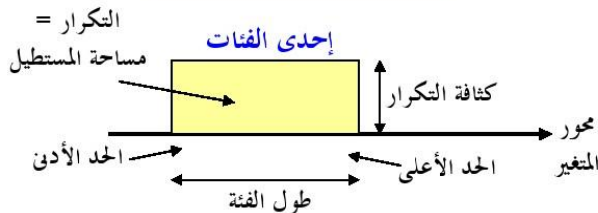
- ☐ النسبة بين الحد الأعلى للفئة ومجموع التكرارات
- ☐ خارج قسمة تكرار الفئة على طولها
- ☒ نسبة تكرار الفئة إلى مجموع التكرارات
- ☐ النسبة بين الحد الأدنى للفئة ومجموع التكرارات

ملحوظات :

- تكرار الفئة النسبي والذي نرمز له بالرمز $\bar{f}$ هو $\bar{f} = \frac{f}{\sum f}$
- كثافة التكرار هو التكرار مقسوماً على طول الفئة .
- لا معنى للإجابتين الأولى والأخيرة .

تذكر :

أنه في المدرج التكراري تُمثل كل فئة بمستطيل قاعدته مرسومة على المحور الأفقي (محور المتغير) بين الحدين الأدنى والأعلى للفئة [أي طول القاعدة = طول الفئة] ، ومساحته تمثل تكرار الفئة ، وارتفاعه يساوي كثافة تكرار الفئة [تكرار الفئة مقسوماً على طولها] . لمزيد من التفاصيل ، أنظر شريحة ١٥ من المحاضرة الرابعة .



س ٢ : في المدرج التكراري تكون مساحة أي مستطيل

من المستطيلات هي :

- ☒ تكرار الفئة التي يمثلها المستطيل
- ☐ التكرار النسبي للفئة التي يمثلها المستطيل
- ☐ كثافة تكرار الفئة التي يمثلها المستطيل
- ☐ طول الفئة التي يمثلها المستطيل

ملحوظة : تكون الإجابة الصحيحة هي الإجابة الثالثة إذا كان السؤال عن ارتفاع المستطيل وليس مساحته ، وتكون الإجابة الصحيحة هي الإجابة الرابعة إذا كان السؤال عن طول قاعدة المستطيل وليس مساحته ، ولا معنى في هذا السؤال للإجابة الثانية .



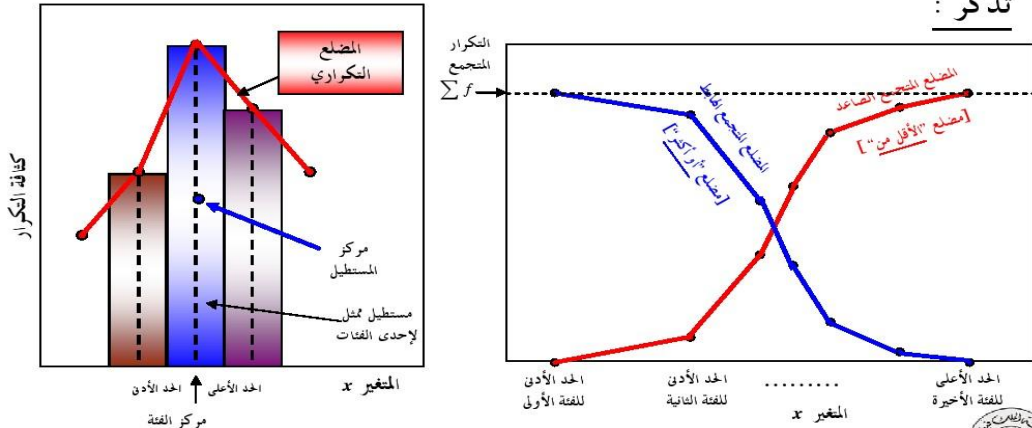
تمارين محلولة على "تمثيل البيانات الكمية المتصلة"

س ٣ : في المصنع التكراري تمثل كل فئة بنقطة إحداثياتها :

- ☐ الحد الأدنى للفئة والتكرار المتجمع لجميع قيم المتغير الأقل من هذا الحد .
- ☐ الحد الأدنى للفئة والتكرار المتجمع لجميع قيم المتغير الأكبر من أو تساوي هذا الحد .
- ☐ مركز المستطيل الممثل لتلك الفئة في المدرج التكراري .
- ☒ مركز الفئة وكثافة تكرارها .

لمزيد من المراجعة يمكن الرجوع للشرائح ١٨ ، ١٩ [الخاصة الرابعة] ، والشرائح ١٠ ، ١١ [الخاصة الخامسة]

تذكر :



ملحوظة : تكون الإجابة الصحيحة هي الإجابة الأولى إذا كان السؤال عن المصنع التكراري المتجمع الصاعد وليس عن المصنع التكراري ، وتكون الإجابة الصحيحة هي الإجابة الثانية إذا كان السؤال عن المصنع التكراري المتجمع الهابط وليس عن المصنع التكراري ، ولا معنى في هذا السؤال للإجابة الثالثة .



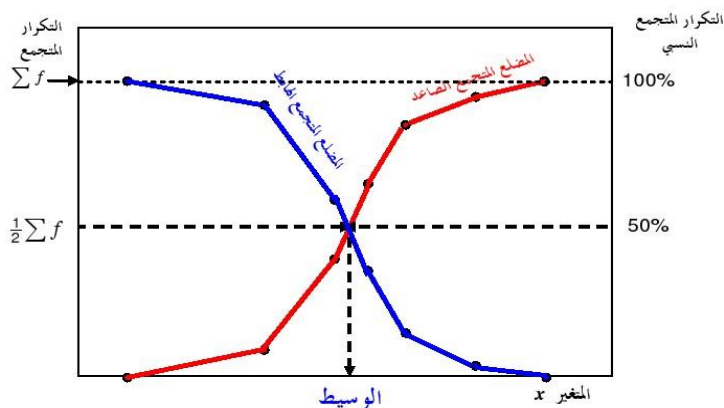
تمارين محلولة على "تمثيل البيانات الكمية المتصلة"

س ٤ : الوسيط لمجموعة من البيانات المرتبة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً هو :

- ☒ قيمة للمتغير يناظرها تكرار متجمع قدره $\frac{1}{2} \sum f$ حيث $\sum f$ هو مجموع التكرارات
- ☒ قيمة للمتغير يناظرها تكرار نسبي قدره 50% .
- ☒ نقطة تقاطع المصنعين التكرارين المتجمعين الصاعد والهابط .
- ☒ قيمة للمتغير تقسم مجموعة البيانات إلى مجموعتين متساويتين في العدد .

لمزيد من المراجعة يمكن الرجوع للشريحة ١٣ [الخاصة الخامسة]

تذكر :

**ملحوظة :**

مثل هذا النوع من الأسئلة [حيث من الممكن أن تكون هناك أكثر من إجابة صحيحة] مرفوض ، وبالتالي لن يكون هناك مثل هذا النوع من الأسئلة في اختبار نهاية الفصل . ولكن ميزة هذا السؤال الوحيدة هي أنه يُعطي أكثر من تعريف للوسيط



تمارين محلولة على "تمثيل البيانات الكمية المتصلة"

هامش للإجابة :

$$\sum f = 10 + 15 + 20 + 5 = 50 \quad (\text{أ})$$

$$\bar{f} = \frac{f}{\sum f} = \frac{5}{50} = 0.1 \quad (\text{ب})$$

$$\text{مركز الفئة الأولى} = \frac{\text{حدها الأدنى} + \text{حدها الأعلى}}{2}$$

$$\frac{0 + 20}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\text{طول الفئة الرابعة} = \text{حدها الأعلى} - \text{حدها الأدنى}$$

$$60 - 50 = 10$$

$$\therefore \text{كثافة تكرار الفئة الرابعة} = \frac{\text{تكرارها}}{\text{طولها}} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$\text{الحد الأعلى للفئة الثالثة} = \text{الحد الأدنى للفئة الرابعة} = 50 \quad (\text{هـ})$$

$$\text{الحد الأدنى للفئة الثانية} = \text{الحد الأعلى للفئة الأولى} = 20 \quad (\text{و})$$

$$\text{الحد الأعلى للفئة الثانية} = \text{الحد الأدنى للفئة الثالثة} = 30$$

$$\therefore \text{مركز الفئة الثانية} = \frac{\text{حدها الأدنى} + \text{حدها الأعلى}}{2}$$

$$\frac{20 + 30}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

الفئة	المتغير x	التكرار f
الأولى	$0 \leq x < 20$	10
الثانية	$\dots \leq x < \dots$	15
الثالثة	$30 \leq x < \dots$	20
الرابعة	$50 \leq x < 60$	5

س ٥ : في التوزيع التكراري المئين للمتغير الكمي المتصل x

(أ) مجموع التكرارات $\sum f$ يساوي :

50 ☒ 1 ☐ 200 ☐ 100 ☐

(ب) التكرار النسبي للفئة الرابعة يساوي :

0.4 ☐ 0.1 ☒ 0.3 ☐ 0.2 ☐

(ج) مركز الفئة الأولى عند x تساوي :

20 ☐ 15 ☐ 10 ☒ 0 ☐

(د) كثافة تكرار الفئة الرابعة تساوي :

55 ☐ 5 ☐ 0.5 ☒ 0.1 ☐

(هـ) الحد الأعلى للفئة الثالثة هو :

50 ☒ 40 ☐ 30 ☐ 20 ☐

(و) مركز الفئة الثانية عند x تساوي :

15 ☐ 35 ☐ 30 ☐ 25 ☒



تمارين محلولة على "تمثيل البيانات الكمية المتصلة"

هامش للإجابة :

(أ) مساحة أي مستطيل تمثل تكرار الفئة ، وبالتالي مجموع المساحات = مجموع التكرارات [أي المجموع الكلي للطلاب] . مع مراعاة أن مساحة أي مستطيل تساوي حاصل ضرب طول قاعدته $\times$ ارتفاعه ، يكون العدد الكلي للطلاب هو :

$$\begin{array}{ccccccc} 20 \times a & + & 10 \times 3a & + & 10 \times 2a & + & 30 \times a \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{الفئة الأولى} & & \text{الفئة الثانية} & & \text{الفئة الثالثة} & & \text{الفئة الرابعة} \end{array}$$

$$20a + 30a + 20a + 30a = 100a \quad \text{أي :}$$

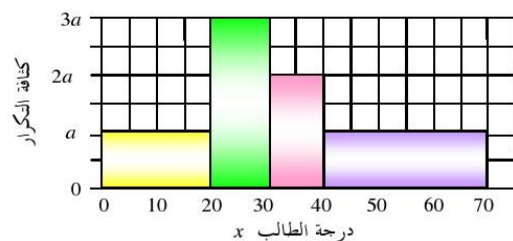
وبالتعويض عن $a = 0.5$ يكون العدد الكلي للطلاب هو :

$$100a = 100 \times 0.5 = 50$$

(ب) بنفس الأسلوب السابق ، نحسب مجموع مساحات المستطيلات [بدلالة a (وسبق حسابها فكان الناتج 100a) وتساوي الناتج بـ 150 [عدد الطلاب] فنحصل على قيمة a :

$$100a = 150 \quad \therefore a = \frac{150}{100} = 1.5$$

س ٦ : في المدرج التكراري المئين للمتغير المتصل x [الذي يمثل درجة مجموعة من الطلاب في مقرر الإحصاء] :

(أ) إذا كانت $a = 0.5$ فإن العدد الكلي للطلاب يساوي :

75 ☐ 50 ☒

125 ☐ 100 ☐

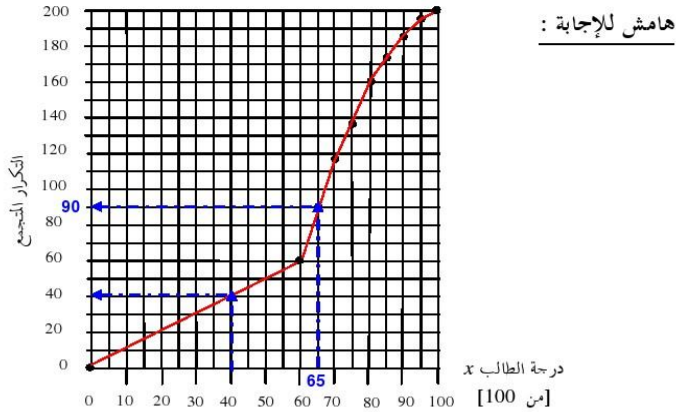
(ب) وإذا كان عدد الطلاب يساوي 150 فإن قيمة a تساوي :

1 ☐ 0.5 ☐

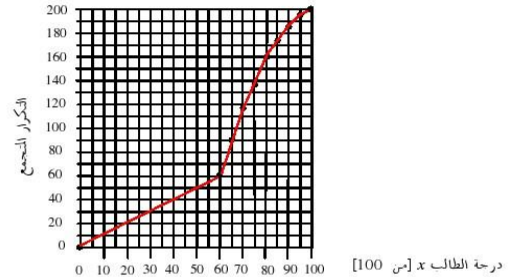
2 ☐ 1.5 ☒



تمارين محلولة على "تمثيل البيانات الكمية المتصلة"



س ٧ : الشكل المرافق يبين المضلع التكراري المتجمع الصاعد لدرجات 200 طالب في مقرر الإحصاء ، بالاسترشاد بهذا المضلع أجب على الآتي :



(أ) عدد الطلاب الحاصلين على درجة أقل من 40 يساوي

20% ☐ 40 ☒ 160 ☐ 80% ☐

(ب) نسبة الطلاب الحاصلين على تقدير D+ على الأقل هي

55% ☒ 45 ☐ 40% ☐ 65% ☐



د. سعيد سيف الدين

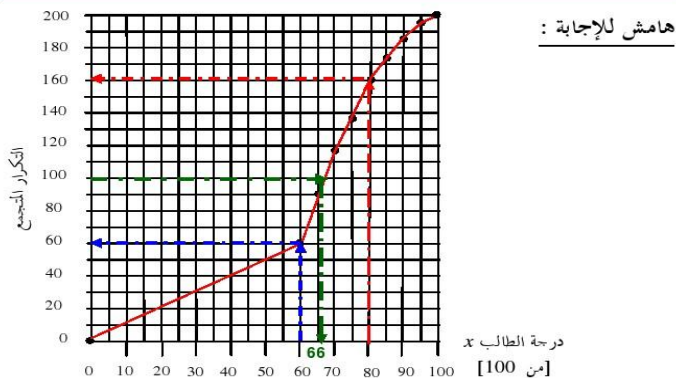
(أ) من الدرجة 40 [على المحور الأفقي] نرسم خطاً رأسياً حتى المضلع ثم خطاً أفقياً تجاه التكرار المتجمع ونرصد التكرار المناظر [وهو 40] . وحيث أن المضلع هو مضلع "الأقل من" والمطلوب "أقل من" يكون التكرار المرصود [40] هو النتيجة المطلوبة .

(ب) تقدير D+ على الأقل [أي درجة أكبر من أو تساوي 65 من 100] . من الدرجة 65 [على المحور الأفقي] نرسم خطاً رأسياً حتى المضلع ثم خطاً أفقياً ونرصد التكرار المتجمع [وهو 90] . وحيث أن المضلع هو مضلع "الأقل من" والمطلوب هو "الأكثر من أو تساوي" فيكون العدد المطلوب هو :

$$110 = 200 - 90 \text{ ونسبتهم المئوية } = 55\% \times 100 = \frac{110}{200}$$

King Faisal University [٩]

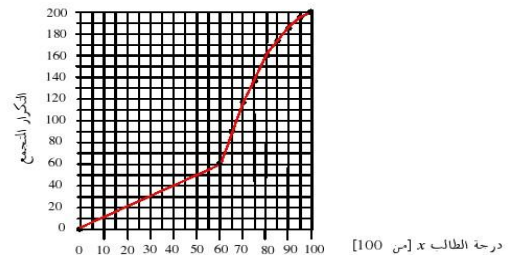
تمارين محلولة على "تمثيل البيانات الكمية المتصلة"



(ج) عدد الطلاب الناجحين والحاصلين على درجة أقل من

80 هو :

120 ☐ 100 ☒ 80 ☐ 60 ☐



(د) الوسيط M لدرجات الطلاب هي (تقريباً) الدرجة :

66 ☒ 55 ☐ 50 ☐ 34 ☐



د. سعيد سيف الدين

(ج) نأخذ [أي حاصل على درجة 60 فأكثر] ، إذن من الدرجتين 60 ، 80 [على المحور الأفقي] نرسم خطين رأسيين حتى المضلع ثم خطين أفقيين تجاه التكرار المتجمع ونرصد التكرارين المناظرين [وهما 60 ، 160] . فيكون العدد المطلوب هو :

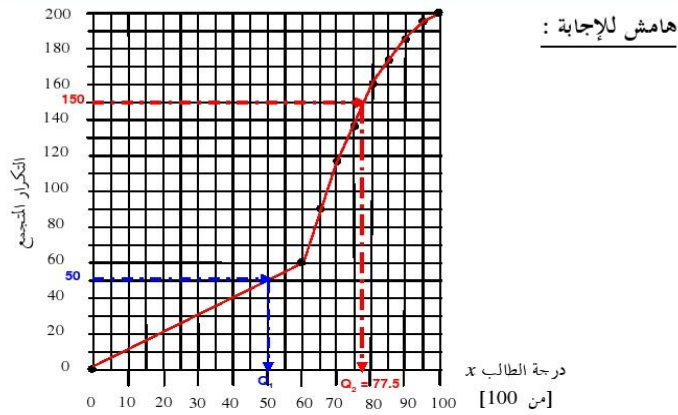
$$160 - 60 = 100$$

(د) الوسيط M هي قيمة المتغير x التي يناظرها تكرار متجمع قدره :

$$\frac{\sum f}{2} = \frac{200}{2} = 100$$

من التكرار المتجمع 100 على المحور الرأسي نرسم خطاً أفقياً حتى المضلع ثم خطاً رأسياً ونرصد قيمة المتغير فتكون النتيجة المرصودة [وهي بالتقريب 66] هي وسيط الدرجات .

King Faisal University [١٠]



(هـ) 25% من الطلبة تعني عدداً من الطلبة قدره : $\frac{25}{100} \times 200 = 50$

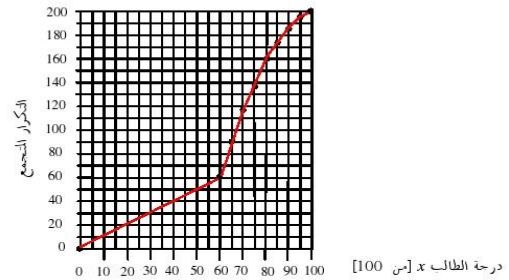
بنفس الطريقة التي اتبعناها مع الوسيط : من التكرار المتجمع 50 على المحور الرأسي نرسم خطاً أفقياً حتى المضلع ثم خطاً رأسياً ونرصد قيمة المتغير فتكون النتيجة المرصودة [وهي 50] هي القيمة المطلوبة Q_1 .

(و) 25% من الطلبة [أي 50 طالب] درجاتهم أكثر من أو تساوي الدرجة Q_2 تعني أن 75% من الطلبة [أي 150 طالب] درجاتهم أقل من هذه الدرجة . إذن بنفس الأسلوب السابق [ولكن من تكرار متجمع 150 بدلاً من 50 نحصل على : $Q_2 = 77.5$

(هـ) الدرجة Q_1 التي تقسم الطلبة إلى مجموعتين بحيث تقع

درجات 25% من الطلبة تحتها هي (تقريباً) :

77.5 ○ 75 ○ 50 ● 25 ○



(و) أما الدرجة Q_2 التي تقسم الطلبة إلى مجموعتين بحيث تقع

درجات 25% من الطلبة فوقها فهي (تقريباً) :

77.5 ● 75 ○ 50 ○ 25 ○

ملحوظة : تُسمى القيمة Q_1 بالربيع الأول لمجموعة البيانات ، Q_2 بالربيع الثالث للبيانات ، في حين يكون الوسيط M هو الربيع الثاني كما سنرى في الباب القادم بإذن الله



عناصر المحاضرة

- التعريف بمقاييس النزعة المركزية
- الوسط الحسابي



التعريف بمقاييس النزعة المركزية

(١) المتوسطات ومقاييس النزعة المركزية

المتوسط هو قيمة نموذجية يمكن أن تمثل مجموعة من البيانات بحيث تعطي دلالة معينة لتلك البيانات ، بمعنى أنه عندما ينظر الباحث (أو القارئ لتلك البيانات) ويريد أن يبحث عن شيء يربط هذه البيانات فإن تلك المتوسطات يمكن أن تعطيه بعضاً مما يريده .

وحيث أن مثل هذه القيم (المتوسطات) تميل إلى الوقوع في المركز داخل مجموعة البيانات (عند ترتيبها حسب قيمها) ، فإن هذه المتوسطات تُسمى أيضاً **بمقاييس النزعة المركزية** .

وهناك صور عديدة من هذه المقاييس وإن كان الأكثر شيوعاً :

- الوسط الحسابي (أو باختصار الوسط) .
- الوسيط
- المنوال (أو الشائع)

وغيرها ، وكل منها له مميزاته وعيوبه وهذا يعتمد على البيانات والهدف من استخدامه .



وإلى جانب كونه ممثلاً لمجموعة البيانات يجب أيضاً أن تتوفر في المتوسط عدة شروط ، منها :

- أن يمكن تحديد قيمته بالضبط وتكون عملية حسابه سهلة إلى حد كبير .
- أن يأخذ في الاعتبار جميع البيانات .

ومن الجدير بالذكر أن بعض هذه المقاييس يمكن تحديدها حسابياً بسهولة ، وبعضها يمكن تحديدها بيانياً بسهولة ، والبعض يمكن تحديده حسابياً وبيانياً بسهولة ، لكننا في هذا المقرر سنكتفي بالطريقة الأبسط (للطالب) عند تحديد هذه المقاييس ، وهذه الطريقة الأبسط ستختلف من مقياس لآخر .

(٢) أهمية حساب مقاييس التزعة المركزية

عند معرفتنا بتلك المتوسطات (مقاييس التزعة المركزية) يصبح أمامنا فرصة كبيرة لأن :

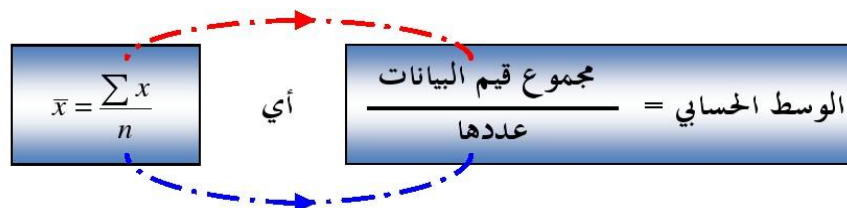
- ننظر لمتوسط مجموعة من البيانات لنعرف الكثير عن خصائص تلك المجموعة .
- نعقد مقارنة بين عدة مجموعات من البيانات في وقت واحد وذلك من خلال مقارنة متوسطات تلك المجموعات بعضها ببعض .



(١) تعريف الوسط الحسابي

يُعرف الوسط الحسابي [وسنرمز له بالرمز $\bar{x}$] لمجموعة من البيانات $x_1, x_2, \dots, x_n$ [قيم المتغير x وعددها n]

كالتالي :



س ١ : درجات خمسة طلاب في مقرر ما [الدرجة العظمى 20] هي : 9 , 2 , 7 , 12 , 10 . أوجد الوسط الحسابي لدرجاتهم .

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{9+2+7+12+10}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

ج ١ :

من هذا المثال البسيط يمكن ملاحظة الخصائص العامة التالية للوسط الحسابي :



- يمكن تحديد قيمة الوسط الحسابي بالضبط ، كما أن طريقة تحديده سهلة .
- يأخذ في الاعتبار جميع البيانات .
- لا يتأثر بترتيب البيانات .
- لا يُشترط أن يكون الوسط الحسابي عدداً صحيحاً ولا يُشترط أن يكون إحدى قيم البيانات ولكنه قيمة تقع بين أقل قيمة في البيانات وأكبر قيمة فيها .
- يتأثر بالقيم المتطرفة في البيانات [كما يتضح من السؤالين التاليين] .

س ٣ : احسب الوسط الحسابي للقيم :

10 , 15 , 12 , 13 , 900

ج ٣ :

$$\frac{10 + 15 + 12 + 13 + 900}{5} = \frac{950}{5} = 190$$

س ٢ : احسب الوسط الحسابي للقيم :

10 , 15 , 12 , 13 , 9

ج ٢ :

$$\frac{10 + 15 + 12 + 13 + 9}{5} = \frac{59}{5} = 11.8$$



- حاصل ضرب قيمة الوسط الحسابي في عدد البيانات = مجموع قيم البيانات

فمثلاً

خمس درجات وسطها الحسابي 8

$$5 \times 8 = 9 + 2 + 7 + 12 + 10$$

$$= 40 = 40$$

وهذا واضح من تعريف الوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \xrightarrow[\text{أن}]{\text{تعني}} n \times \bar{x} = \sum x$$

- إذا أضفنا عدد ثابت c لكل قيمة من قيم البيانات ، فإن :

الوسط الحسابي الجديد = الوسط الحسابي القديم + العدد الثابت c

بيانات قديمة

9 2 7 12 10

خمس درجات وسطها الحسابي 8

إضافة 1 لكل قيمة

بيانات جديدة

10 3 8 13 11

خمس درجات وسطها الحسابي 9 [8 + 1 = 9]

- إذا ضربنا كل قيمة من قيم البيانات في عدد ثابت c ، فإن :

الوسط الحسابي الجديد = الوسط الحسابي القديم $\times$ العدد الثابت c

بيانات قديمة

9 2 7 12 10

خمس درجات وسطها الحسابي 8

ضرب كل قيمة في 1.1

بيانات جديدة

9.9 2.2 7.7 13.2 11

خمس درجات وسطها الحسابي 8.8 [8 $\times$ 1.1 = 8.8]



سلي نفسك بهذا السؤال : اعتبر نفسك مدرساً للطلاب الخمسة المذكورين في **س ١** [كانت درجاتهم (من 20) كالتالي : 10 , 12 , 7 , 2 , 9] وأردت أن تحسن من الوسط الحسابي لدرجاتهم ، أيهما أفضل : **أن** نزيد درجة كل طالب 5 درجات أم نزيد درجة كل طالب 50% من قيمتها ؟ علل إجابتك .

أضف إجابتك هنا واحتفظ بهذه الصفحة كصفحة من صفحات الخاصة :



د. سعيد سيف الدين

King Faisal University [٩]

(٢) حساب الوسط الحسابي لبيانات كمية متقطعة ذات تكرارات

س : أوجد الوسط الحسابي للأرقام :

5, 5, 5, 5, 5, 5, 3, 3, 6, 6, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 8, 8, 8

ج : بتطبيق مباشر للتعريف :

$$\bar{x} = \frac{(5+5+5+5+5+5) + (3+3) + (6+6) + (4+4+4+4+4) + (2+2) + (8+8+8)}{20} = \frac{96}{20} = 4.8$$

لاحظ أن الرقم 5 متكرر 6 مرات ، الرقم 3 مرتان ، والرقم 6 مرتان ، والرقم 4 متكرر 5 مرات ، والرقم 2 مرتان ، والرقم 8 ثلاث مرات ، وبالتالي يمكن عمل العملية الحسابية السابقة كالآتي :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{(6 \times 5) + (2 \times 3) + (2 \times 6) + (5 \times 4) + (2 \times 2) + (3 \times 8)}{6 + 2 + 2 + 5 + 2 + 3} \\ &= \frac{30 + 6 + 12 + 20 + 4 + 24}{20} = \frac{96}{20} = 4.8\end{aligned}$$

وهذا يمكن إنجازه ببسر من خلال الجدول التكراري للبيانات كالتالي :



د. سعيد سيف الدين

King Faisal University [١٠]

$$\frac{30 + 6 + 12 + 20 + 4 + 24}{20} = \frac{96}{20}$$

نعمل هذا العمود : حاصل ضرب كل قيمة في تكرارها

المتغير x	التكرار f	fx
5	6	30
3	2	6
6	2	12
4	5	20
2	2	4
8	3	24
	20	96

ده الجدول التكراري بتاعنا
[مُعْطَى أو نعمله]

$$\sum f = 20 \quad \sum fx = 96$$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{96}{20} = 4.8$$

∴

أي أنه في حالة البيانات الكمية المتقطعة ذات التكرارات يمكن حساب الوسط الحسابي من العلاقة :

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

حيث $\sum f$ هو مجموع التكرارات
 $\sum fx$ هو مجموع حاصل ضرب كل قيمة في تكرارها



س : من مائة رقم يتكرر الرقم 4 عشرون مرة ، والرقم 5 أربعون مرة ، والرقم 6 ثلاثون مرة ، والباقي كانوا الرقم 7 . احسب الوسط الحسابي للمائة رقم .

المتغير x	التكرار f	fx
4	20	80
5	40	200
6	30	180
7	10	70
	100	530

$$\sum f = 100 \quad \sum fx = 530$$

ج : بتكوين الجدول التكراري للأرقام المذكورة ، ثم بضرب كل قيمة في تكرارها والتجميع [عمود fx] يكون الوسط الحسابي للأرقام المذكورة هو :

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{530}{100} = 5.3$$

(٣) حساب الوسط الحسابي لبيانات كمية متصلة

عندما نتعامل مع بيانات متصلة تُعطى فيها قيم المتغير على صورة فترات ، فيمكن اعتبار أن جميع القيم داخل الفترة مطابقة لمركز الفترة ، وبالتالي يمكن استخدام الصيغة السابقة لحساب الوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{\sum f x_0}{\sum f}$$

حيث $\sum f$ هو مجموع التكرارات ، $\sum f x_0$ هو مجموع حاصل ضرب مركز كل فئة في تكرار الفئة



الفئة	المتغير x (الطول)	التكرار f	مركز الفئة x_0	fx_0
الأولى	$0 \leq x < 20$	4	10	40
الثانية	$20 \leq x < 30$	16	25	400
الثالثة	$30 \leq x < 35$	12	32.5	390
الرابعة	$35 \leq x < 40$	10	37.5	375
الخامسة	$40 \leq x < 50$	6	45	270
السادسة	$50 \leq x < 60$	2	55	110
		$\sum f = 50$	$\sum fx_0 = 1585$	

فمثلاً في المثال التوضيحي (٢-٤) [شريحة ٤ - الخاصة الرابعة] يكون الوسط الحسابي لأطوال سيقان الأزهار (بوحدة السنتيمتر) هو :

$$\bar{x} = \frac{\sum fx_0}{\sum f} = \frac{1585}{50} = 31.7$$

الفئة	المتغير x (الأجر)	التكرار f	مركز الفئة x_0	fx_0
الأولى	$50 \leq x < 60$	6	55	330
الثانية	$60 \leq x < 70$	9	65	585
الثالثة	$70 \leq x < 80$	15	75	1125
الرابعة	$80 \leq x < 90$	12	85	1020
الخامسة	$90 \leq x < 100$	9	95	855
السادسة	$100 \leq x < 120$	6	110	660
السابعة	$120 \leq x < 180$	3	150	450
		$\sum f = 60$	$\sum fx_0 = 5025$	

وفي مثال (٢-٦) [شريحة ١٦ - الخاصة الخامسة] يكون الوسط الحسابي للأجر السنوي للعاملين (بآلاف الريالات) هو :

$$\bar{x} = \frac{\sum fx_0}{\sum f} = \frac{5025}{60} = 83.75$$



من كل ما سبق يمكن استعراض مزايا وعيوب الوسط الحسابي كالتالي :

- يمكن تحديد قيمة الوسط الحسابي بالضبط ، كما أن طريقة تحديده سهلة [ميزة] .
- يأخذ في الاعتبار جميع البيانات [ميزة] .
- لا يتأثر بترتيب البيانات [ميزة] .
- يتأثر بالقيم المتطرفة في البيانات [عيب] .
- لا يمكن حسابه بالرسم ، أي بيانياً [عيب] .

سلي نفسك لغاية ما نتقابل بإذن الله

(١) درجات طالب في ست امتحانات هي : 78 , 87 , 68 , 72 , 91 , 84 . أوجد الوسط الحسابي لهذه الدرجات . [الإجابة : 80]

(٢) أوجد الوسط الحسابي للقياسات : 40.6 , 39.8 , 40.3 , 39.5 , 40.2 , 39.7 , 39.2 , 40.9 , 38.8 . [الإجابة : 39.82]

(٣) (أ) الأجر الشهري لأربعة موظفين (بالريال) هو : 30000 , 6500 , 6000 , 5000 . أوجد الوسط الحسابي للأجور [الإجابة : 11875 ريال]

(ب) هل يمكن القول بأن هذا الأجر ممثل للأجور ؟ . علل إجابتك . [الإجابة : لا] . علل أنت بقي . .

(٤) مجموعة من الأرقام مكونة من ست ستات ، سبع سيعات ، ثماني ثنائيات ، وتسع تسعات ، وعشر عشرات . ما هو الوسط الحسابي للأرقام ؟

[الإجابة : 8.25]

(٥) الجدول المرافق يعطي التوزيع التكراري لأوزان 100 طالب بوحدة الكيلوجرام . أوجد الوسط الحسابي للوزن ..

الوزن x (بالكيلو)	60 -	62 -	66 -	68 -	72 - 74
عدد الطلاب f	5	18	42	27	8

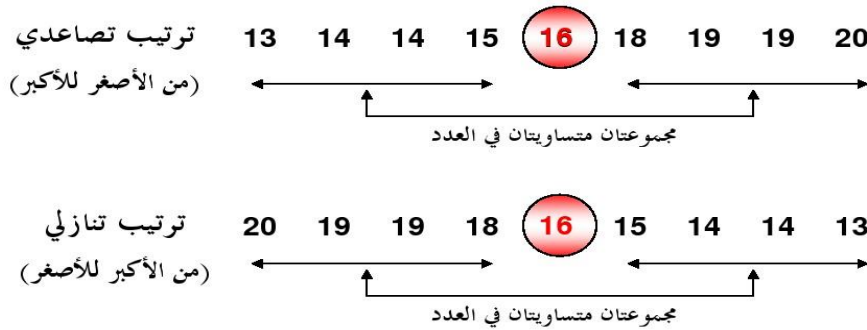
[الإجابة : 67.45]



تعريف الوسيط :

(ببساطة) يُعرف الوسيط [وسنرمز له بالرمز M] لمجموعة من القيم (المرتبة تصاعدياً أو تنازلياً حسب قيمها) على أنه القيمة التي تقسم مجموعة القيم إلى مجموعتين متساويتين في العدد ، أو بتعبير آخر هي القيمة التي في المنتصف

فمثلاً لمجموعة القيم : 13 , 14 , 15 , 16 , 18 , 19 , 19 , 20 ، إذا قمنا بترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً



يكون الوسيط هو
العدد الخامس
[رتبة الوسيط أي
ترتيبه بين القيم]
وقيمته 16

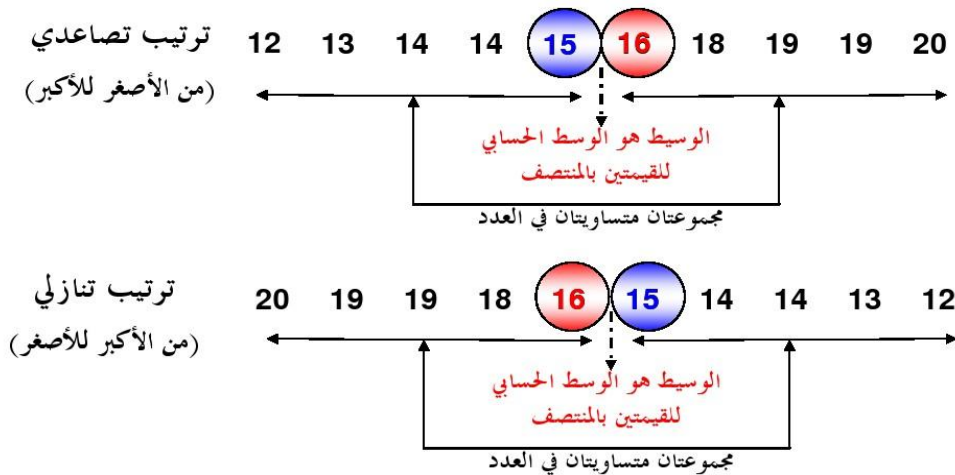
فرق بين رتبة
الوسيط وقيمته

هام
جدا

لاحظ هنا أن عدد القيم n [هنا = 9] فردي وبالتالي هناك قيمة واحدة في منتصف المجموعة



أما لمجموعة القيم : 12 , 13 , 14 , 15 , 16 , 18 , 19 , 19 , 20 ، إذا قمنا بترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً



في هذه الحالة توجد قيمتان بالمنتصف وهما القيمة الخامسة والقيمة السادسة [وهما العددان 15 و 16] ، عندئذ يكون الوسيط هو الوسط الحسابي لهاتين القيمتين ، أي :

$$\frac{15 + 16}{2} = 15.5$$



إذن من السابق يمكن استنتاج طريقة حساب الوسيط لمجموعة من القيم كالآتي :

- قم أولاً بترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً .
- حدد ما إذا كانت هناك قيمة واحدة بالمنتصف أم قيمتين ، وهذا يتوقف على قيمة n حيث n عدد القيم

إذا كانت n زوجية

كانت هناك قيمتان في المنتصف رتبتهما

$$\frac{n}{2} , \frac{n}{2} + 1$$

ويكون الوسيط الحسابي لهماين القيمتين هو الوسيط

إذا كانت n فردية

كانت هناك قيمة واحدة في المنتصف رتبها

$$\frac{n+1}{2}$$

وتكون هذه القيمة هي الوسيط

فمثلاً

$n = 6$

الوسيط الحسابي لهذه القيم هو

$$\frac{9+2+7+12+10+500}{6} = 90$$

وواضح تأثره كثيراً بالقيمة المتطرفة 500

هناك قيمتان في المنتصف رتبتهما :

$$\frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3 , 3+1 = 4$$

أي القيمتان الثالثة والرابعة ، وتكون قيمة الوسيط هي الوسيط الحسابي لهماين القيمتين ، أي :

$$\frac{9+10}{2} = 9.5$$

هل لاحظت أن الوسيط لم يتأثر بالقيمة المتطرفة 500

فمثلاً

$n = 5$

الوسيط الحسابي لهذه القيم هو :

$$\frac{9+2+7+12+10}{5} = 8$$

هناك قيمة واحدة في المنتصف رتبها :

$$\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

أي القيمة الثالثة . وتكون تلك القيمة هي الوسيط . أي أن :

الوسيط = 9

تذكر : الوسيط الحسابي لهذه القيم هو :



مثال : مجموعة الأرقام 2 3 3 4 5 6 6 7 9 وسيطها هو 5 [عدد القيم $n = 9$ (فردية)]

تذكر : الوسيط الحسابي لهذه القيم هو :

$$\bar{x} = \frac{2+3+3+4+5+6+6+7+9}{9} = 5$$

مثال آخر : مجموعة الأرقام 5 5 7 9 11 12 15 18 وسيطها هو 10 $10 = \frac{9+11}{2}$ [$n = 8$ (زوجية)]

تذكر : الوسيط الحسابي لهذه القيم هو :

$$\bar{x} = \frac{5+5+7+9+11+12+15+18}{8} = 10.25$$

في السؤال [سلي نفسك - الخاصة السابعة - شريحة ١٤ - ١٥] : كانت درجات طالب في ٦ اختبارات هي :

84 , 91 , 72 , 68 , 87 , 78

وطلبنا حساب الوسيط الحسابي للدرجات ، أضف لهذا حساب وسيط هذه الدرجات ، وحدد أيهما تفضل (كمتوسط) ولماذا ؟

الوسيط الحسابي لدرجات الطالب هو :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{84+91+72+68+87+78}{6} = \frac{480}{6} = 80$$

ولتحديد الوسيط لابد أولاً من ترتيب القيم (تصاعدياً مثلاً) :

68 , 72 , 78 , 84 , 87 , 91

وحيث أن عدد القيم زوجي ، إذن هناك قيمتان في المنتصف [78 , 84] وسطحهما الحسابي $\frac{78+84}{2} = 81$ الوسيط

لاحظ في السؤال السابق أن كلاً من المتوسطين : الوسيط الحسابي و الوسيط من السهل حسابها ومن الممكن أن يمثل كل منهما مقياساً للدرجة المركزية للبيانات ، لكن الأفضل (نسبياً هنا) أن نستخدم الوسيط الحسابي كمقياس للدرجة المركزية للبيانات حيث أنه يأخذ في الاعتبار جميع قيم البيانات ، بينما يهتم الوسيط بقيم البيانات في المنتصف (وذلك بعد ترتيبها) .



مثال : الأجر (بالريال) في الساعة لخمسة عاملين في مكتب هو : 25 , 39 , 32 , 92 , 37 . احسب الوسط الحسابي للأجور ووسط هذه الأجور . أيهما تفضل كمقياس لمتوسط أجر الساعة ؟ ولماذا ؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{25 + 39 + 32 + 92 + 37}{5} = \frac{225}{5} = 45$$

أما لتحديد الوسيط ، فلابد أولاً من ترتيب القيم (تصاعدياً مثلاً) : 25 , 32 , 37 , 39 , 92

وحيث أن عدد القيم فردي ، إذن هناك قيمة واحدة في المنتصف [هي 37] وهي **الوسيط**

لاحظ في السؤال السابق أن الوسط الحسابي (بالرغم من عدم احتياجه لترتيب القيم وفي نفس الوقت يأخذ في الاعتبار جميع قيم البيانات) إلا أنه تأثر جداً بالقيمة المتطرفة **92** ، في حين لم يتأثر بها الوسيط لأنه يعتمد على البيانات في المنتصف . لذا **يُفضل هنا استخدام الوسيط** كمقياس للترعة المركزية حيث يعطي **دلالة أفضل** لمتوسط الأجور من الوسط الحسابي .

والآن ماذا عن الوسيط لبيانات كمية متصلة

أعتقد أننا نستطيع تحديده بسهولة [حيث نوهنا لذلك في الباب الثاني] فهو :

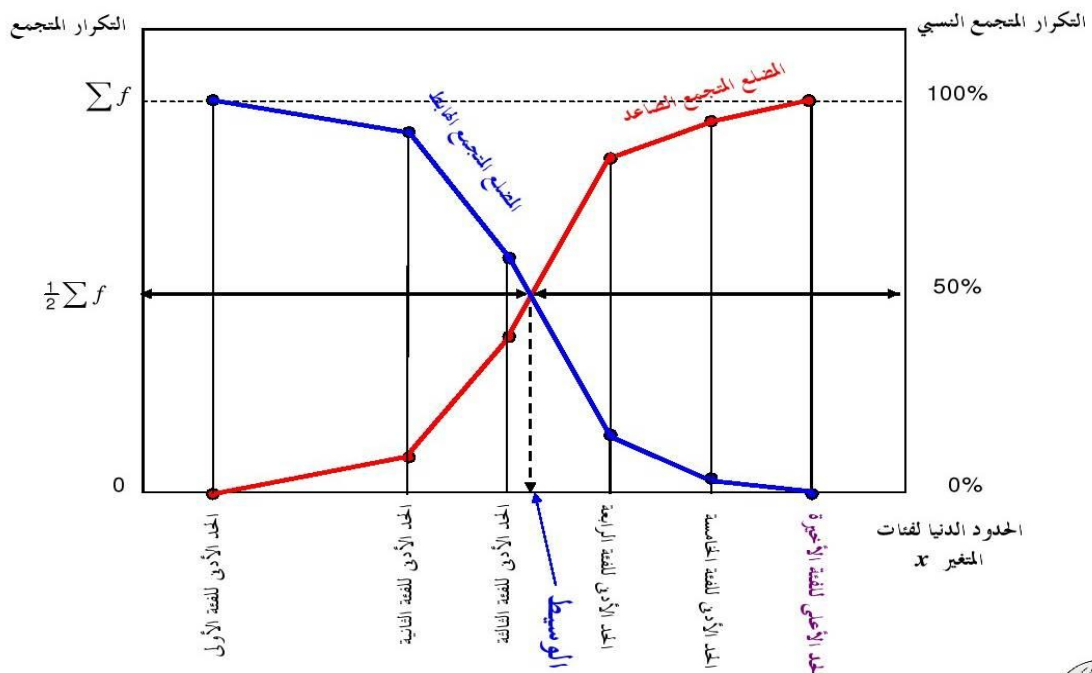
- قيمة المتغير المناظرة لنقطة تقاطع المضلعين : المتجمع **الصاعد** والمتجمع **الهابط** للبيانات .
- القيمة التي يناظرها تكرار متجمع = نصف مجموع التكرارات
- القيمة التي يناظرها تكرار نسبي متجمع = 50%

أو

أو



طريقة تحديد الوسيط من :
* من المضلع المتجمع الصاعد فقط
* من المضلع المتجمع الهابط فقط
* من المضلعين معاً



المساحة (بالفدان)	عدد قطع الأراضي
1 -	14
3 -	29
5 -	18
7 - 10	9

مثال : في دراسة جغرافية لعدد من مساحات مجموعة من الأراضي لمنطقة سكنية بالرياض تبين أن التوزيع التكراري لها كما هو مبين .
المطلوب حساب الوسط الحسابي والوسيط لمساحة الأراضي .

المتغير x هنا هو مساحة الأرض (بالفدان) ، في حين يمثل عدد قطع الأراضي **التكرار f** .

أولاً : الوسط الحسابي : نستكمل الجدول التكراري كما هو مبين :

الفئة	المتغير (المساحة) x	التكرار f	المركز x_0	$f x_0$
الأولى	$1 \leq x < 3$	14	2	28
الثانية	$3 \leq x < 5$	29	4	116
الثالثة	$5 \leq x < 7$	18	6	108
الرابعة	$7 \leq x < 10$	9	8.5	76.5
		$\sum f = 70$		$\sum f x_0 = 328.5$

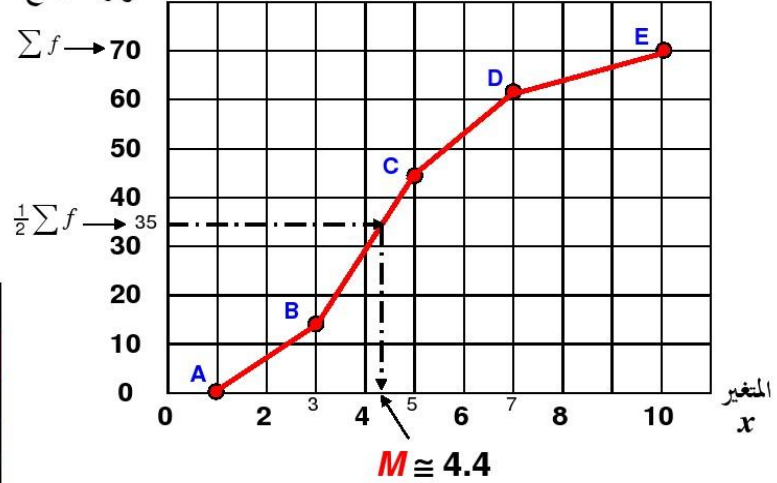
$$\therefore \bar{x} = \frac{\sum f x_0}{\sum f} = \frac{328.5}{70} = 4.692857143 \approx 4.7$$

الجدول التكراري		
الفئة	المتغير (المساحة) x	التكرار f
الأولى	$1 \leq x < 3$	14
الثانية	$3 \leq x < 5$	29
الثالثة	$5 \leq x < 7$	18
الرابعة	$7 \leq x < 10$	9
		$\sum f = 70$

الجدول التكراري المتجمع الصاعد		
المتغير x	التكرار المتجمع	النقطة على المصنع
< 1	0	A (1 , 0)
< 3	14	B (3 , 14)
< 5	43	C (5 , 43)
< 7	61	D (7 , 61)
< 10	$\sum f = 70$	E (10 , 70)

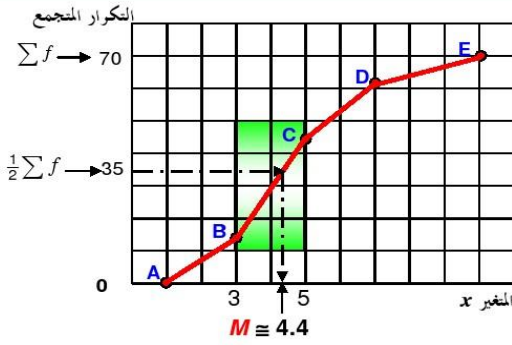
ثانياً : الوسيط : نكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد [أو الهابط]

التكرار المتجمع



كده انتهى السؤال ، أي أن الوسيط الحسابي للمساحة ≈ 4.7
والوسيط ≈ 4.4

لكن هناك ملحوظة هامة جداً مش عارف أنت لاحظتها أم لا



الوسيط يقع بين النقطتين $B(3, 14)$, $C(5, 43)$ أي داخل
الفئة $[3 \leq x < 5]$ هذه الفئة تُسمى — **الفئة الوسيطة**

أي أن **الفئة الوسيطة** هي تلك الفئة التي يقع
داخلها الوسيط

وهنا يتبادر إلى الذهن سؤالان هاما :

السؤال الأول : هل من الممكن تحديد الفئة الوسيطة من الجدول التكراري مباشرة أم لازم نعمل الجدول التكراري المتجمع الصاعد ونرسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد ؟ .

السؤال الثاني : هل من الممكن [بعد تحديد الفئة الوسيطة] تحديد الوسيط من الجدول التكراري مباشرة دون الحاجة للجدول التكراري المتجمع الصاعد أو المضلع التكراري المتجمع الصاعد ؟ .

والإجابة على السؤالين : نعم يمكن تحديد الفئة الوسيطة من الجدول التكراري مباشرة ، ثم بعد ذلك يمكن أيضاً من هذا الجدول التكراري تحديد قيمة الوسيط دون أن نحتاج لعمل جدول تكراري متجمع صاعد ورسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد ، **وتعالى نشوف إزاي**



بالنسبة للسؤال الأول [تحديد الفئة الوسيطة]

- (١) احسب أولاً نصف مجموع التكرارات .
- (٢) ابدأ بالرقم صفر في ذهنك وزود تكرارات الفئات على التوالي وكل مرة قارن بنصف مجموع التكرارات السابق . أول ما يزيد الناتج عن نصف المجموع السابق أو يساويه يبقى آخر فئة زدنا تكرارها تكون هي الفئة الوسيطة .

يا الله نشوف

الجدول التكراري		
الفئة	المغير (المساحة) x	التكرار f
الأولى	$1 \leq x < 3$	14
الثانية	$3 \leq x < 5$	29
الثالثة	$5 \leq x < 7$	18
الرابعة	$7 \leq x < 10$	9
		$\sum f = 70$

• احسب $\frac{1}{2} \sum f = \frac{70}{2} = 35$ ← ماشي يا عم .. طلع ..

• نبدأ بالصفر [في ذهننا]

• نزود على الصفر السابق تكرار الفئة الأولى [14] ينتج 14

14 أقل من 35 ، يبقى الفئة الأولى ليست الفئة الوسيطة

• نزود على الـ 14 الأخيرة تكرار الفئة الثانية [29] ينتج 43

43 أكبر من 35 ، يبقى الفئة الثانية هي الفئة الوسيطة



وبالنسبة للسؤال الثاني [تحديد الوسيط (بعد ما حددنا الفئة الوسيطة)]

- (١) حدد الحد الأدنى للفئة الوسيطة وأيضاً طولها .
 (٢) احسب ما يُسمى بـ "التكرار المتجمع السابق" = مجموع تكرار الفئات السابقة للفئة الوسيطة
 (٣) احسب الوسيط من العلاقة :

$$\text{الوسيط } M = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطة} + \left[\frac{(\text{نصف مجموع التكرارات} - \text{التكرار المتجمع السابق})}{\text{تكرار الفئة الوسيطة}} \times \text{طول الفئة الوسيطة} \right]$$

يا الله نشوف

- الفئة الوسيطة هي الفئة الثانية :

حدها الأدنى 3 وطولها 2 [5 - 3 =] وتكرارها 29

- التكرار المتجمع السابق :

يساوي مجموع تكرارات الفئات السابقة للفئة الوسيطة [أي تكرار الفئة الأولى فقط] = 14

الجدول التكراري		
التكرار f	المتغير (المساحة) x	الفئة
14	$1 \leq x < 3$	الأولى
29	$3 \leq x < 5$	الثانية
18	$5 \leq x < 7$	الثالثة
9	$7 \leq x < 10$	الرابعة
$\sum f = 70$		

→ الفئة الوسيطة



د. سعيد سيف الدين

King Faisal University [١٤]

- بالتعويض في القانون السابق : [ونعمل الحسابات واحدة واحدة الله يسترها معاكم]

$$M = 3 + \left[\frac{35 - 14}{29} \times 2 \right] = 3 + \left[\frac{21}{29} \times 2 \right] = 3 + 1.44827 = 4.44827 \approx 4.4$$

تُسمى الطريقة الحسابية السابقة (لحساب الوسيط) بـ "طريقة الاستكمال"

مثال جميل : طُلب من ٣ مشرفين بإحدى المدارس تقسيم طلبة المدرسة إلى ٣ مجموعات متساوية على أن يقوم كل مشرف بتقديم بيان عن فئات العمر المختلفة لطلبة مجموعته وعدد الطلبة في كل فئة من فئات العمر ، فكانت الجداول التكرارية المبينة :

المجموعة (٣)		
العدد f	العمر x	الفئة
20	$x < 6$	الأولى
25	$6 \leq x < 12$	الثانية
35	$12 \leq x < 15$	الثالثة
18	$x \geq 15$	الرابعة
$\sum f = 98$		

المجموعة (٢)		
العدد f	العمر x	الفئة
20	$6 \leq x < 12$	الأولى
25	$12 \leq x < 15$	الثانية
35	$15 \leq x < 18$	الثالثة
18	$x \geq 18$	الرابعة
$\sum f = 98$		

المجموعة (١)		
العدد f	العمر x	الفئة
20	$x < 6$	الأولى
25	$6 \leq x < 12$	الثانية
35	$12 \leq x < 15$	الثالثة
18	$15 \leq x < 18$	الرابعة
$\sum f = 98$		

هل يمكن من خلال البيانات السابقة حساب الوسيط الحسابي لعمر الطلبة في كل مجموعة ؟ علل إجابتك . وإذا كانت الإجابة بـ "لا" احسب مقياساً مناسباً يُعطي دلالة لمتوسط العمر في كل مجموعة .



د. سعيد سيف الدين

King Faisal University [١٥]

المجموعة (٣)			المجموعة (٢)			المجموعة (١)		
العدد f	العمر x	الفئة	العدد f	العمر x	الفئة	العدد f	العمر x	الفئة
20	$x < 6$	الأولى	20	$6 \leq x < 12$	الأولى	20	$x < 6$	الأولى
25	$6 \leq x < 12$	الثانية	25	$12 \leq x < 15$	الثانية	25	$6 \leq x < 12$	الثانية
35	$12 \leq x < 15$	الثالثة	35	$15 \leq x < 18$	الثالثة	35	$12 \leq x < 15$	الثالثة
18	$x \geq 15$	الرابعة	18	$x \geq 18$	الرابعة	18	$15 \leq x < 18$	الرابعة
$\sum f = 98$			$\sum f = 98$			$\sum f = 98$		

الإجابة هي " لا " للمجموعات الثلاث [أي لا يمكن حساب الوسط الحسابي للعمر] ، وها هي الأسباب :

- في المجموعة الأولى : الحد الأدنى للفئة الأولى غير معروف [يقال للجدول عندئذ أنه مفتوح من أسفل]
- في المجموعة الثانية : الحد الأعلى للفئة الأخيرة غير معروف [يقال للجدول عندئذ أنه مفتوح من أعلى]
- في المجموعة الثالثة : الحد الأدنى للفئة الأولى غير معروف وأيضاً الحد الأعلى للفئة الأخيرة غير معروف [يقال للجدول عندئذ أنه مفتوح من الطرفين]

مثل هذه الجداول تُسمى **جداول تكرارية مفتوحة** :

- من أسفل [إذا كان الحد الأدنى للفئة الأولى غير معروف]
- من أعلى [إذا كان الحد الأعلى للفئة الأخيرة غير معروف]
- من الطرفين [إذا كان الحد الأدنى للفئة الأولى والحد الأعلى للفئة الأخيرة غير معروفين]



وحيث أن الوسيط لأي مجموعة من البيانات يعتمد في حسابه على البيانات الموجودة في المنتصف ، إذن يمكن استخدام **الوسيط** كمتوسط للدلالة على متوسط العمر في كل مجموعة :

بالنسبة للمجموعة الأولى من الطلبة :

المجموعة (١)		
العدد f	العمر x	الفئة
20	$x < 6$	الأولى
25	$6 \leq x < 12$	الثانية
35	$12 \leq x < 15$	الثالثة
18	$15 \leq x < 18$	الرابعة
$\sum f = 98$		

تحديد الفئة الوسيطة :

$$\text{احسب } \frac{1}{2} \sum f = \frac{98}{2} = 49$$

- نبدأ بالصفر [في ذهننا]
- نزود على الصفر تكرار الفئة الأولى [20] ينتج 20 [أقل من 49]
- نزود على الـ 20 الأخيرة تكرار الفئة الثانية [25] ينتج 45 [أيضاً أقل من 49]
- نزود على الـ 45 الأخيرة تكرار الفئة الثالثة [35] ينتج 80 [أكبر من 49]

إذن الفئة الثالثة هي الفئة الوسيطة



تحديد الوسيط :

- الحد الأدنى للفئة الوسيطة = 12
- طول الفئة الوسيطة = 3 [15 - 12 =]
- تكرار الفئة الوسيطة = 35
- التكرار المتجمع السابق = مجموع تكرارات الفئات السابقة للفئة الوسيطة

[أي الفئتين الأولى والثانية] = 20 + 25 = 45 . إذن

$$M = 12 + \left[\frac{(49 - 45)}{35} \times 3 \right] = 12 + \left[\frac{4}{35} \times 3 \right] = 12 + 0.342857 = 12.342857 \approx 12.3$$

وبنفس الطريقة يمكن التعامل مع المجموعتين (٢) ، (٣) ، وعليك التأكد من صحة الحل

الفئة
الوسيطة

المجموعة (١)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$x < 6$	20
الثانية	$6 \leq x < 12$	25
الثالثة	$12 \leq x < 15$	35
الرابعة	$15 \leq x < 18$	18
		$\sum f = 98$

التكرار المتجمع السابق = مجموع تكرارات الفئات السابقة للفئة الوسيطة

[أي الفئتين الأولى والثانية] = 20 + 25 = 45 . إذن

$$M = 12 + \left[\frac{(49 - 45)}{35} \times 3 \right] = 12 + \left[\frac{4}{35} \times 3 \right] = 12 + 0.342857 = 12.342857 \approx 12.3$$

وبنفس الطريقة يمكن التعامل مع المجموعتين (٢) ، (٣) ، وعليك التأكد من صحة الحل

الفئة
الوسيطة

المجموعة (٣)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$x < 6$	20
الثانية	$6 \leq x < 12$	25
الثالثة	$12 \leq x < 15$	35
الرابعة	$x \geq 15$	18
		$\sum f = 98$

$$M = 12 + \left[\frac{(49 - 45)}{35} \times 3 \right] \approx 12.3$$

المجموعة (٢)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$6 \leq x < 12$	20
الثانية	$12 \leq x < 15$	25
الثالثة	$15 \leq x < 18$	35
الرابعة	$x \geq 18$	18
		$\sum f = 98$

$$M = 15 + \left[\frac{(49 - 45)}{35} \times 3 \right] \approx 15.3$$



سلي نفسك بهذا السؤال : سبق وحسبنا الوسيط الحسابي لأطوال سيقان الأزهار [مثال (٢-٤)/محاضرة ٧/ص ١٣] وكان 31.7 تقريباً وحسبنا الوسيط (بيانياً) للأطوال وكان 32 تقريباً . أيضاً سبق وحسبنا الوسيط الحسابي للأجر السنوي لمجموعة من العمال [مثال (٢-٦)/محاضرة ٧/ص ١٣] وكان 83.75 تقريباً وحسبنا الوسيط (بيانياً) للأجور وكان 80 تقريباً . والآن مطلوب من سعادتك حساب الوسيط للمثالين بطريقة الاستكمال السابقة ومقارنة الحلول ببعضها .

لمساعدتك على الحل وتنظيم تفكيرك قم باستكمال البيانات الناقصة في المثالين

مثال (٢-٦)

الجدول التكراري		
الفئة	المغیر (الأجر) x	التكرار f
الأولى	$50 \leq x < 60$	6
الثانية	$60 \leq x < 70$	9
الثالثة	$70 \leq x < 80$	15
الرابعة	$80 \leq x < 90$	12
الخامسة	$90 \leq x < 100$	9
السادسة	$100 \leq x < 120$	6
السابعة	$120 \leq x < 180$	3
		$\sum f = 60$

الفئة الوسيطة هي :

حدها الأدنى وطولها هو وتكرارها

التكرار المتجمع السابق =

إذن الوسيط M [وتحسبه] يطلع 80 بالضبط

مثال (٢-٤)

الجدول التكراري		
الفئة	المغیر x	التكرار f
الأولى	$0 \leq x < 20$	4
الثانية	$20 \leq x < 30$	16
الثالثة	$30 \leq x < 35$	12
الرابعة	$35 \leq x < 40$	10
الخامسة	$40 \leq x < 50$	6
السادسة	$50 \leq x < 60$	2
		$\sum f = 50$

الفئة الوسيطة هي :

حدها الأدنى وطولها هو وتكرارها

التكرار المتجمع السابق =

إذن الوسيط M [وتحسبه] يطلع 32.1 تقريباً



عناصر المحاضرة

- **المنوال**
- **العلاقة بين المتوسطات الثلاثة : الوسط ، الوسيط ، المنوال**
- **مقارنة بين المتوسطات الثلاثة : الوسط ، الوسيط ، المنوال**
- **مراجعة على كل ما تقدم من المحاضرة السابعة حتى المنوال**

من خلال مسائل "سلي نفسك" المتروكة لسعادتك

مبادئ الإحصاء

المنوال

المحاضرة التاسعة

تعريف المنوال [الشائع] :

يُعرف المنوال لمجموعة من القيم على أنه القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها أو القيمة الأكثر شيوعاً [لذا يُسمى في بعض الأحيان بالـ "الشائع"] . وأحياناً يُرمز للمنوال بالرمز $\bar{x}$

فمثلاً :

مجموعة القيم	18	12	11	10	10	9	9	9	7	5	2	2	ها منوال 9
ومجموعة القيم	16	15	12	10	8	5	3	9	ليس لها منوال [أو <u>عدمية المنوال</u>]				
ومجموعة القيم	9	7	7	7	5	5	4	4	4	3	2	ها منوالان 4 , 7	

أي أن مجموعة القيم قد تكون وحيدة المنوال [لها منوال واحد] ، وقد تكون عديدة المنوال [منوالان أو أكثر] وقد تكون عدمية المنوال [لا يوجد لها منوال]

أما مجموعة القيم 4 4 5 5 6 6 7 7 فقد تتسرع وتقول أنها رباعية المنوال ومناو لها : 4 , 5 , 6 , 7

لكن [حيث أن جميع القيم لها نفس التكرار] هذه المجموعة الأخيرة عدمية المنوال



بيانات منفصلة

درجات الطلاب في مقرر الإنجليزي	عدد الطلاب
12	23
14	30
16	30
18	17

بيانات كمية متقطعة

لها متوالان وهما "14, 16"

درجات الطلاب في مقرر الإحصاء	عدد الطلاب
12	28
14	24
16	39
18	9

بيانات كمية متقطعة

لها متوال وحيد وهو "الدرجة 16"

سيارات في أحد المواقف	
لون السيارة	عدد السيارات
أحمر R	10
أزرق B	23
أبيض W	12
أصفر Y	5

بيانات نوعية

لها متوال وهو "اللون الأزرق"

درجات طلاب في مقرر الفقه	عدد الطلاب
12	25
14	25
16	25
18	25

بيانات كمية متقطعة

ليس لها متوال

والمتوال [مقارنةً بالوسط الحسابي والوسيط]
به العديد من العيوب منها :

- أنه لا يأخذ في الاعتبار جميع البيانات ولكنه يهتم فقط بالقيم الأكثر تكراراً .
- أنه قد لا يتواجد أو قد يكون هناك أكثر من متوال للبيانات .

إلا أنه أيضاً يتميز ببعض المزايا منها :

- أنه أسرع في تحديده من الوسط والوسيط
- من الممكن تحديده للتوزيعات التكرارية للبيانات المنفصلة سواء كانت تلك البيانات كمية متقطعة أو نوعية [والبيانات الأخيرة (النوعية) لا يمكن حساب الوسط الحسابي لها أو الوسيط]



وماذا عن التوزيعات التكرارية للبيانات الكمية المتصلة

الموضوع في غاية البساطة :

- حدد الفئة المتوالية [وهي الفئة التي بناظرها أكبر كثافة تكرار]
- حدد المتوال [وهو (تقريباً) مركز الفئة المتوالية]

فمثلاً في التوزيع التكراري المبين [مثال (٢-٤)]/الخطوة ٤/شرحية [٤]

الجدول التكراري					
	المتغير x	التكرار f	طول الفئة c	مركز الفئة x_0	كثافة التكرار
الفئة الأولى	$0 \leq x < 20$	4	20	10	0.2
الفئة الثانية	$20 \leq x < 30$	16	10	25	1.6
الفئة الثالثة	$30 \leq x < 35$	12	5	32.5	2.4
الفئة الرابعة	$35 \leq x < 40$	10	5	37.5	2
الفئة الخامسة	$40 \leq x < 50$	6	10	45	0.6
الفئة السادسة	$50 \leq x < 60$	2	10	55	0.2
		$\sum f = 50$			

أكبر كثافة تكرار

إذن الفئة المتوالية هي الفئة الثالثة

والمتوال = 32.5

وبالرغم من هذه البساطة إلا أن هناك تنبيه و تحذير



بالنسبة للتنبيه : فالطريقة السابقة [اعتبار أن مركز الفئة المتوالية هو المتوال] هي طريقة تقريبية ، لكن هناك طرق أخرى **حسابية وبيانية** تعطي تقريباً أكثر دقة ، لكننا لن نتطرق لهذه الطرق في هذا المكان وذلك للتبسيط

وبالنسبة للتحذير : فالفئة المتوالية هي الفئة التي يناظرها **أكبر كثافة تكرار** وليس **أكبر تكرار** ، ويتفق اللفظان "**أكبر كثافة تكرار**" و "**أكبر تكرار**" فقط إذا كانت أطوال الفئات واحدة .

فمثلاً في المثال السابق ، إذا قلنا أن الفئة المتوالية هي الفئة المناظرة لأكبر تكرار فستكون تلك الفئة هي الفئة الثانية [وهذا خطأ جسيم] في حين أن الفئة المتوالية هي الفئة الثالثة [كما سبق وينا] .

الجدول التكراري					
كثافة التكرار	مركز الفئة x_0	طول الفئة c	التكرار f	المتغير x	الفئة المتوالية
0.2	10	20	4	$0 \leq x < 20$	الفئة الأولى
1.6	25	10	16	$20 \leq x < 30$	الفئة الثانية
2.4	32.5	5	12	$30 \leq x < 35$	الفئة الثالثة
2	37.5	5	10	$35 \leq x < 40$	الفئة الرابعة
0.6	45	10	6	$40 \leq x < 50$	الفئة الخامسة
0.2	55	10	2	$50 \leq x < 60$	الفئة السادسة
$\sum f = 50$					

الفئة المتوالية [خطأ جسيم]

الفئة المتوالية [كده صح]



وإليك بعض الحالات التي قد **تخدعك** **س :** في كل حالة من الحالات التالية حدد المتوال

حالة (١) [أنظر الجدول التكراري (١)] :

الجدول التكراري (١)					
كثافة التكرار	مركز الفئة	طول الفئة	f	x	الفئة المتوالية
0.2	10	20	4	$0 \leq x < 20$	الفئة الأولى
1.8	25	10	18	$20 \leq x < 30$	الفئة الثانية
1.2	37.5	15	18	$30 \leq x < 45$	الفئة الثالثة
0.8	50	10	8	$45 \leq x < 55$	الفئة الرابعة

إذا اعتمدنا في ردنا على التكرار فستكون الإجابة :
التوزيع : **تتالي** المتوال ، والفئات المتوالية هي **الثانية والثالثة** ،
والمتوالان هما **25 و 37.5** [مراكز فئات المتوال] . **خطأ**

أما الإجابة الصحيحة فهي التي تعتمد على كثافة التكرار وليس التكرار :

التوزيع : **وحيد** المتوال ، والفئة المتوالية هي **الثانية** ، والمتوال هو **25** [مركز الفئة المتوالية] . **كده صح [يحميك يا بني]**

حالة (٢) [أنظر الجدول التكراري (٢)] :

الجدول التكراري (٢)					
كثافة التكرار	مركز الفئة	طول الفئة	f	x	الفئة المتوالية
0.2	10	20	4	$0 \leq x < 20$	الفئة الأولى
0.2	40	40	8	$20 \leq x < 60$	الفئة الثانية
0.2	75	10	2	$60 \leq x < 70$	الفئة الثالثة
0.2	72.5	5	1	$70 \leq x < 75$	الفئة الرابعة

إذا اعتمدنا في ردنا على التكرار فستكون الإجابة :
التوزيع : **وحيد** المتوال ، والفئة المتوالية هي **الثانية** ، والمتوال
هو **40** [مركز الفئة المتوالية] . **خطأ**

أما الإجابة الصحيحة فهي التي تعتمد على كثافة التكرار وليس التكرار :

التوزيع : **عديم** المتوال [أي ليس هناك متوال] **كده صح [يحميك يا بني]**



حالة (٣) [أنظر الجدول التكراري (٣)]:

الجدول التكراري (٣)					
	x	f	طول الفئة	مركز الفئة	كثافة التكرار
الفئة الأولى	$0 \leq x < 5$	4	5	2.5	0.8
الفئة الثانية	$5 \leq x < 15$	16	10	10	1.6
الفئة الثالثة	$15 \leq x < 20$	8	5	17.5	1.6
الفئة الرابعة	$20 \leq x < 60$	20	40	40	0.5

إذا اعتمدنا في ردنا على التكرار فستكون الإجابة:

التوزيع: وحيد الشوال، والفئة المتوالية هي الرابعة، والشوال هو 40 [مركز الفئة المتوالية]. خطأ

أما الإجابة الصحيحة فهي التي تعتمد على كثافة التكرار وليس التكرار:

التوزيع: ثاني الشوال، والفئات المتوالية هي الثانية و الثالثة، والمتوالان هما 10 و 17.5 [مراكز الفئات المتوالية].

كده صح [برافو عليك يا بنقي]

حالة (٤) [أنظر الجدول التكراري (٤)]:

الجدول التكراري (٤)					
	x	f	طول الفئة	مركز الفئة	كثافة التكرار
الفئة الأولى	$0 \leq x < 10$	18	10	5	1.8
الفئة الثانية	$10 \leq x < 20$	20	10	15	2
الفئة الثالثة	$20 \leq x < 30$	25	10	25	2.5
الفئة الرابعة	$30 \leq x < 40$	12	10	35	1.2

إذا اعتمدنا في ردنا على التكرار فستكون الإجابة:

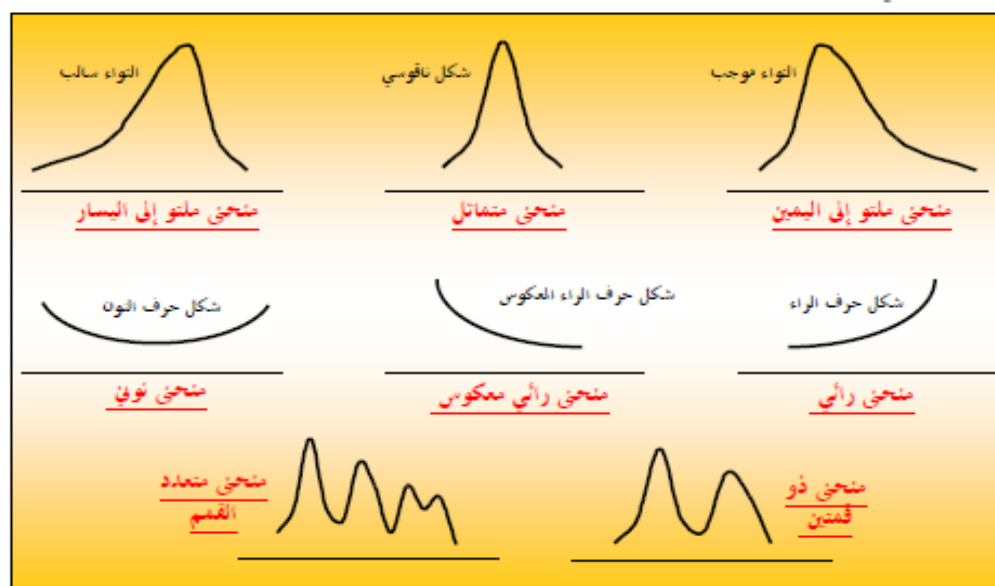
التوزيع: وحيد الشوال، والفئة المتوالية هي الثالثة، والشوال هو 25 [مركز الفئة المتوالية]. صح

طيب ليه هنا صح؟ لأن الفئات متساوية الأطوال، وبالتالي الفئة ذات أكبر كثافة تكرار هي نفسها الفئة ذات أكبر تكرار

تأكد من ذلك بنفسك يا بنقي

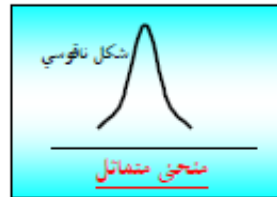
العلاقة بين المتوسطات الثلاثة: الوسط، الوسيط و المنوالعلاقة اعتبارية (تقريبية) بين المتوسطات الثلاثة: الوسط و الوسيط و المنوال

المنحنيات التكرارية التي تظهر في الناحية العملية تأخذ أشكالاً مميزة كالأشكال التالية:

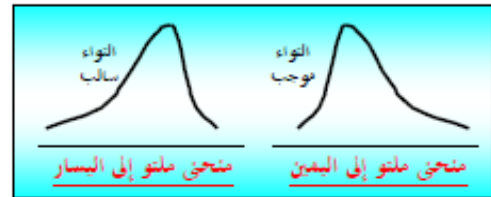




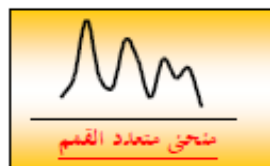
في المنحنيات ذات الشكل الرأسي أو
الرأسي المعكوس فإن نقطة النهاية
العظمى للمنحني تقع عند أحد
طرفي المنحني



في المنحنى التكراري الشتمائل
تكون النهاية العظمى في المنتصف
وتكون المشاهدات المتساوية
البعد عن مركز النهاية العظمى
لها نفس التكرارات



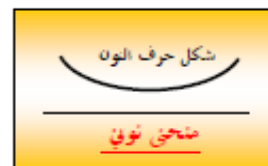
قد يكون المتحني قريباً من التماثل لكن أحد طرفيه يمتد أكثر من الآخر على جانبي مركز النهاية العظمي . فإذا كان الطرف الأيمن أطول يكون المتحني في هذه الحالة ملتوياً إلى اليمين ، بينما لو كان العكس صحيحاً يكون ملتوياً إلى اليسار



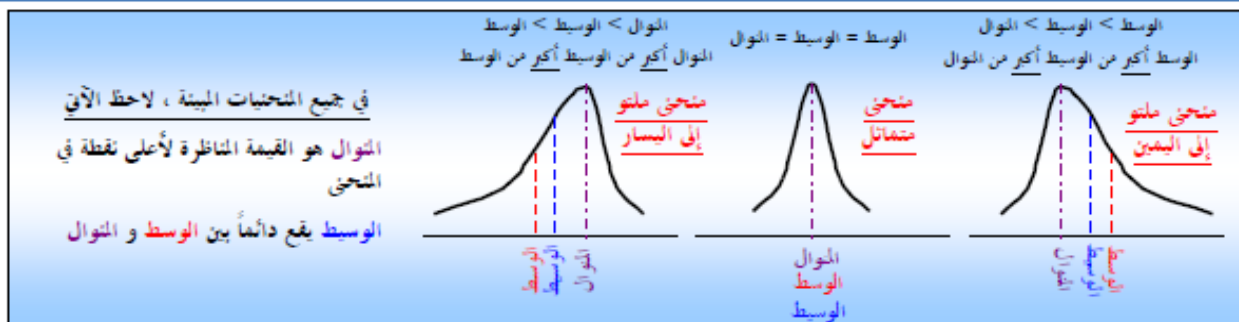
والمشحي متعدد القسم له
أكثر من هاتين عظمتين



والمُحَيِّ ذُو الْقَمَتَيْنِ لَهُ
مُحَايَتَانِ عَظِيمَتَانِ



والمحني النوني له نهاية عظمية
عند كل من طرفيه



والمحنيات التكرارية وحيدة المنوال والبسيطة الالتواء تحقق العلاقة الاعتبارية التالية :

الوسط - المتوال = ٣ × (الوسط - الوسيط)

وهذه العلاقة يمكن وضعها على أي صورة من الصور التالية

$$\frac{\text{المتوال} + (2 \times \text{الوسط})}{3} = \text{الوسيط}$$

وهذه الصورة مفيدة عندما يكون
الوسط الحسابي و التوال معلومان
ونريد معرفة الوسط

المَنَوَال = (٣ × الوسيط) - (٢ × الوسط)

وهذه الصورة مفيدة عندما يكون
الوسط الحسابي و الوسط المتوسط معلومان
ونريد معرفة المتوال

$$\frac{\text{المعدل} - (\text{الوسيط} \times 3)}{2} = \text{الوسيط}$$

وهذه الصورة مفيدة عندما يكون
الوسيط و المتوال معلومان ونريد
معرفة الوسط الحسابي

• فمثلاً إذا كان المتوال مجموعة من القيم = 95 ، والمتوسط لها = 85 ، فإن :

$$\text{المتوال} = (\text{المتوسط} \times 3) - \text{المتوال} = \frac{95 - (85 \times 3)}{2} = \frac{95 - 255}{2} = \frac{160}{2} = 80$$

• وإذا كان **المتوسط الحسابي** مجموعة من القيم = 80 ، والمتوسط لها = 85 ، فإن :

$$\text{المتوال} = (\text{المتوسط} \times 3) - (\text{المتوسط} \times 2) = (80 \times 3) - (85 \times 2) = 240 - 170 = 70$$

• وإذا كان **المتوسط الحسابي** مجموعة من القيم = 80 ، والمتوال لها = 95 ، فإن :

$$\text{المتوسط} = \frac{(\text{المتوال} + (\text{المتوسط} \times 2))}{3} = \frac{95 + (80 \times 2)}{3} = \frac{95 + 160}{3} = \frac{255}{3} = 85$$

سؤال متروك إجابته لك : المنحنى التكراري للبيانات المذكورة في أي من الأمثلة السابقة :

☐ ملتو لليمين ☐ ملتو لليسار ☐ متماثل

الإجابة موجودة في الصفحة السابقة [على وجه التحديد] وعليك استخراجها



مقارنة بين المتوسطات الثلاثة : الوسط ، المتوسط ، المتوال

المتوال	المتوسط	المتوسط الحسابي
مزاياه : - سهولة حسابه - لا يتأثر كثيراً بالقيم المتطرفة - لا يحتاج لترتيب البيانات	مزاياه : - سهولة حسابه حسابياً أو بيانياً - لا يتأثر بالقيم المتطرفة - يمكن حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة	مزاياه : - سهولة حسابه - يأخذ في الاعتبار جميع البيانات - لا يحتاج إلى ترتيب معين للبيانات
عيوبه : قد لا يتواجد وقد يكون له أكثر من قيمة	عيوبه : - يحتاج إلى ترتيب للبيانات أولاً - لا يأخذ في الاعتبار جميع البيانات	عيوبه : - يتأثر بشدة بالقيم المتطرفة - لا يمكن إنجاده بالرسم [بيانياً] - لا يمكن حسابه في حالات التوزيعات التكرارية المفتوحة
أقل مقياس النزعة المركزية استخداماً	يفضل استخدامه في الحالات التي لا نستطيع فيها حساب المتوسط الحسابي	الأكثر استخداماً
في بعض الحالات يمكن تحديده للبيانات النوعية	يمكن حسابها للبيانات الكمية	



سلي نفسك لغاية ما نتقابل بإذن الله

في كل من المسائل من (١) حتى (٥) أوجد الوسط الحسابي $\bar{x}$ ، الوسيط M ، المنوال $\hat{X}$.

(١) $3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6$ الإجابة : $\bar{x} = 5.1, M = 5, \hat{X} = 5$

(٢) $5, 4, 8, 3, 7, 2, 9$ الإجابة : $\bar{x} = 5.4, M = 5, \hat{X} = -$ [الـ "-" تعني "غير موجود"]

(٣) $18.3, 20.6, 19.3, 22.4, 20.2, 18.8, 19.7, 20.0$ الإجابة : $\bar{x} = 19.2, M = 19.9, \hat{X} = -$

(٤) $85, 76, 93, 82, 94$ الإجابة : $\bar{x} = 86, M = 85, \hat{X} = -$

(٥) 6 [ست مرات] ، 7 [سبع مرات] ، 8 [ثمان مرات] ، 9 [تسع مرات] ، 10 [عشر مرات] الإجابة : $\bar{x} = 8.25, M = 8, \hat{X} = 10$

الجدول التكراري		
	x	f
الفئة الأولى	$10 \leq x < 15$	3
الفئة الثانية	$15 \leq x < 20$	7
الفئة الثالثة	$20 \leq x < 25$	16
الفئة الرابعة	$25 \leq x < 30$	12
الفئة الخامسة	$30 \leq x < 35$	9
الفئة السادسة	$35 \leq x < 40$	5
الفئة السابعة	$40 \leq x < 45$	2
		54

(٦) الجدول التكراري المرفق يبين توزيع أقطار رؤوس مسامير x [بالمليمتر] منتجة بواسطة شركة ما . احسب الوسط الحسابي ، الوسيط ، والمنوال للأقطار

الإجابة : $\bar{x} = 26.20, M = 85, \hat{X} = 22.50$



مراجعة على الباب الثالث

مقاييس التزعة المركزية [المحاضرات ٧ ، ٨ ، ٩]

من خلال مسائل "سلي نفسك" المتروكة لسعادتك في المحاضرات

٩ ، ٨ ، ٧

يُرجى قبل الانتقال للشرح التالية أن يكون الطالب/الطالبة قد راجع المحاضرات من السابعة حتى الشريحة الحالية حتى تكون المراجعة القادمة مجدية . وبالله التوفيق



سؤال [سلي نفسك] - المحاضرة ٧ - شريحة ٩ : اعتبر نفسك مدرساً للطلاب الخمسة المذكورين في س ١ [كانت درجاتهم (من 20) كالتالي : 9, 2, 7, 12, 10] وأردت أن تحسن من الوسط الحسابي لدرجاتهم ، أيهما أفضل : أن تزيد درجة كل طالب 5 درجات أم تزيد درجة كل طالب 50% من قيمتها ؟ علل إجابتك .

أبو وليد ماذاكر
كوبس بس بيشك في نفسه كثير : حا يحل إزاي ؟ حا يحل كده

الدرجات القديمة

9	2	7	12	10
---	---	---	----	----

حس درجات وسطها الحسابي 8

الدرجات الجديدة

13.5	3	10.5	18	15
------	---	------	----	----

حس درجات وسطها الحسابي :

$$\frac{13.5+3+10.5+18+15}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

الدرجات القديمة

9	2	7	12	10
---	---	---	----	----

حس درجات وسطها الحسابي 8

الدرجات الجديدة

14	7	12	17	15
----	---	----	----	----

حس درجات وسطها الحسابي :

$$\frac{14+7+12+17+15}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

بالمقارنة : فإن إضافة 5 درجات لكل طالب ستحسن الوسط الحسابي للدرجات بصورة أفضل من زيادة كل درجة من الدرجات بنسبة 50% من قيمتها



أم وليد بقي واحدة
مممكنة حا نحل إزاي
حا نحل كده

الوسط الحسابي لدرجات الطلاب هو : $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{9+2+7+12+10}{5} = \frac{40}{5} = 8$
وعند إضافة 5 لكل درجة يصبح الوسط الجديد : $8 + 5 = 13$
أما إذا أضفنا لكل درجة 50% من قيمتها ، أي ضربنا كل قيمة في 1.5 = $\frac{150}{100}$
يصبح الوسط الجديد : $8 \times 1.5 = 12$. إذن الأسلوب الأول أفضل لتحسين الوسط الحسابي .



سلي نفسك : المحاضرة ٧ - شريحة ١٤ - س ٢ : ما هو الوسط الحسابي للقياسات

38.8 , 40.9 , 39.2 , 39.7 , 40.2 , 39.5 , 40.3 , 39.2 , 39.8 , 40.6

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{38.8+40.9+39.2+39.7+40.2+39.5+40.3+39.2+39.8+40.6}{10} = \frac{398.2}{10} = 39.82$$

سلي نفسك : المحاضرة ٧ - شريحة ١٤ - س ٣ : الوسط الحسابي للأجور : 5000 , 6000 , 6500 , 30000 هو :

وهو لا يمكن أن يكون ممثلاً للأجور نظراً لتأثيره بالقيمة (المتطرفة) 30000

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{5000+6000+6500+30000}{4} = \frac{47500}{4} = 11875$$

سلي نفسك : المحاضرة ٧ - شريحة ١٤ - س ٤ : الوسط الحسابي لـ 6 سنوات ، 7 سباعات ، 8 غنايات ، 9 تسعات ، 10 عشرات

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{(6 \times 6) + (7 \times 7) + (8 \times 8) + (9 \times 9) + (10 \times 10)}{6+7+8+9+10} = \frac{36+49+64+81+100}{40} = \frac{330}{40} = 8.25$$

x	f	fx
6	6	36
7	7	49
8	8	64
9	9	81
10	10	100
	40	330

$\sum f = 40$ $\sum fx = 330$

ويمكنك الحل بعمل جدول تكراري [لكن لا يستدعي الأمر ذلك] .

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{330}{40} = 8.25$$



سلي نفسك : المحاضرة ٧ - شريحة ١٤ - س ٥ :

للبينات المجمعة (بيانات كمية متصلة) المعطاة [والمبينة أمامك] يمكن حساب الوسط الحسابي كالتالي :

الفئة	المتغير x (الطول)	التكرار f	مركز الفئة x_0	fx_0
الأولى	$60 \leq x < 62$	5	61	305
الثانية	$62 \leq x < 66$	18	64	1152
الثالثة	$66 \leq x < 68$	42	67	2814
الرابعة	$68 \leq x < 72$	27	70	1890
الخامسة	$72 \leq x < 74$	8	73	584
		$\sum f = 100$		$\sum fx_0 = 6745$

$$\bar{x} = \frac{\sum f x_0}{\sum f} = \frac{6745}{100} = 67.45$$

سلي نفسك : المحاضرة ٩ - شريحة ١٥ : أوجد الوسط الحسابي $\bar{x}$ ، الوسيط M ، المتوال $\hat{x}$ للبيانات التالية :

(٢) 5, 4, 8, 3, 7, 2, 9

(١) 3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6

(٤) 85, 76, 93, 82, 94

(٣) 18.3, 20.6, 19.3, 22.4, 20.2, 18.8, 19.7, 20.0

(٥) 6 [ست مرات] ، 7 [سبع مرات] ، 8 [ثمان مرات] ، 9 [تسع مرات] ، 10 [عشر مرات]



$$\bar{x} = \frac{3+5+2+6+5+9+5+2+8+6}{10} = 5.1 : \text{الوسط}$$

(١) 3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6

3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6

الوسيط : البيانات الأصلية :

البيانات بعد ترتيبها تصاعدياً : 2, 2, 3, 5, 5, 5, 6, 6, 8, 9 [عددتها 10 (زوجي)] ، إذن الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين الخامسة والسادسة

$$\therefore M = \frac{5+5}{2} = 5$$

المتوال : القيمة الأكثر تكراراً : 3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6 ← $\hat{x} = 5$

$$\bar{x} = \frac{5+4+8+3+7+2+9}{7} = 5.42857 \approx 5.43 : \text{الوسط}$$

(٢) 5, 4, 8, 3, 7, 2, 9

الوسيط : البيانات بعد الترتيب : 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 [عددتها 7 (فردية)] ، إذن الوسيط هو القيمة الرابعة $M = 5$

المتوال : القيمة الأكثر تكراراً : لا يوجد

(٣) 18.3, 20.6, 19.3, 22.4, 20.2, 18.8, 19.7, 20.0

$$\bar{x} = \frac{18.3+20.6+19.3+22.4+20.2+18.8+19.7+20}{8} = 19.9125 \approx 19.91 : \text{الوسط}$$

الوسيط : البيانات بعد الترتيب : 18.3, 18.8, 19.3, 19.7, 20, 20.2, 20.6, 22.4 [عددتها 8 (زوجي)] ، إذن الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين الرابعة والخامسة

$$\therefore M = \frac{19.7+20}{2} = 19.85$$

المتوال : القيمة الأكثر تكراراً : لا يوجد



$$\bar{x} = \frac{85+76+93+82+94}{5} = 86 \quad \text{الوسط} \quad (4) \quad 85, 76, 93, 82, 94$$

الوسيط : البيانات بعد الترتيب : 76, 82, 85, 93, 94 [عددتها 5 (فردية)] ، إذن الوسيط هو القيمة الثالثة $M = 85$.
 المتوال : القيمة الأكثر تكراراً : لا يوجد

$$(5) \quad 6 \text{ [ست مرات]} , 7 \text{ [سبع مرات]} , 8 \text{ [ثمان مرات]} , 9 \text{ [تسع مرات]} , 10 \text{ [عشر مرات]} \quad \text{الوسط} = 8.25$$

x	f
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10
	40

$\sum f = 40$

[سبق حله/شريحة ١٨/هذه الخاصة]

الوسيط : عدد القيم n هنا هو مجموع التكرارات $\sum f = 40$ زوجي ، وبالتالي هناك قيمتان في المنتصف ترتيبهما 20 ، 21 ، وبالتالي يكون الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين العشرين و الواحد وعشرين وهاتان القيمتان هما 8 ، 8 [كيف عرفتهما] ؟

$$\therefore M = \frac{8+8}{2} = 8$$

القيم مرتبة	رتبتها
6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 8 8 8 9 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23

لأن أصغر القيم هو 6 وتكررها ست مرات ، إذن سيتم ترتيبهم من الأول إلى السادس ، يلي القيم 7 وتكررها سبع ، إذن سيتم ترتيبهم من السابع حتى الثالث عشر ، يلي القيم 8 وتكررها ثمانية ، إذن سيتم ترتيبهم من الرابع عشر حتى الواحد والعشرون ، إذن القيم ذات الترتيب 20 ، 21 ستكون 8 ، 8 .

المتوال : هو القيمة الأكثر تكراراً : $\hat{X} = 10$



سلي نفسك : الخاصة ٩ - شريحة ١٥ : الجدول التكراري المرفق يبين توزيع أقطار رؤوس مسامير x (بالمليمتر) منتجة بواسطة إحدى الشركات . المطلوب حساب الوسط الحسابي والوسيط والمتوال للأقطار .

	x	f	x_0	fx_0
الفئة الأولى	$10 \leq x < 15$	3	12.5	37.5
الفئة الثانية	$15 \leq x < 20$	7	17.5	122.5
الفئة الثالثة	$20 \leq x < 25$	16	22.5	360
الفئة الرابعة	$25 \leq x < 30$	12	27.5	330
الفئة الخامسة	$30 \leq x < 35$	9	32.5	292.5
الفئة السادسة	$35 \leq x < 40$	5	37.5	187.5
الفئة السابعة	$40 \leq x < 45$	2	42.5	85
		54		1415

الوسط : لتحديد الوسط ، لابد من تحديد مراكز الفئات أولاً ثم اتباع نفس الخطوات السابق اتباعها في الشريحة (١٩) من هذه الخاصة ، فيكون :

$$\bar{x} = \frac{\sum f x_0}{\sum f} = \frac{1415}{54} = 26.2037037 \approx 26.20$$

المتوال : هنا الفئات متساوية الطول وبالتالي تكون الفئة المتوالية هي الفئة التي يناظرها أكبر تكرار [لأن "أكبر تكرار" يناظره في هذا السؤال "أكبر كثافة تكرار"]

x	f
$10 \leq x < 15$	3
$15 \leq x < 20$	7
$20 \leq x < 25$	16
$25 \leq x < 30$	12
$30 \leq x < 35$	9
$35 \leq x < 40$	5
$40 \leq x < 45$	2
	54

الفئة المتوالية

واحد بالك وواحدة بالك

إذن الفئة المتوالية هنا هي الفئة الثالثة ومركزها [22.5] هو تقريباً المتوال

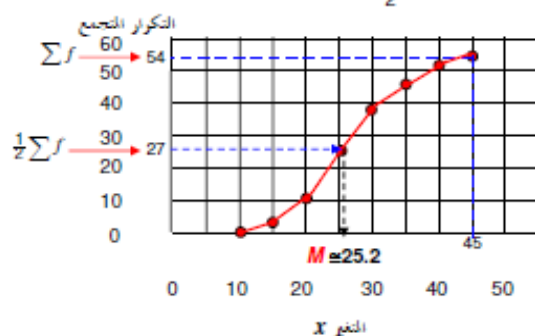


الوسيط : بياناً [المصطلح التكراري المتجمع الصاعد]

x	f متجمع	النقطة
$x < 10$	0	(10, 0)
$x < 15$	3	(15, 3)
$x < 20$	10	(20, 10)
$x < 25$	26	(25, 26)
$x < 30$	38	(30, 38)
$x < 35$	47	(35, 47)
$x < 40$	52	(40, 52)
$x < 45$	54	(45, 54)

- تكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد .
- ومنه نرسم المصطلح المتجمع الصاعد.
- تكون قيمة الوسيط هي قيمة المتغير x المناظرة لتكرار متجمع قدره

$$\frac{1}{2} \sum f = 27$$



الوسيط : حساباً [طريقة الاستكمال]

- احسب $\frac{1}{2} \sum f = \frac{54}{2} = 27$: نبدأ بالصفر [في ذهننا]
- نرود على الصفر السابق تكرار الفئة الأولى [3] ينتج 3 [وهي أقل من 27]
- نرود على الـ 3 السابقة تكرار الفئة الثانية [7] ينتج 10 [ما زال أقل من 27]
- نرود على الـ 10 السابقة تكرار الفئة الثالثة [16] ينتج 26 [ما زال أقل من 27]
- نرود على الـ 26 السابقة تكرار الفئة الرابعة [12] ينتج 38 [أكبر من 27]

إذن الفئة الرابعة هي الفئة الوسيطة

حدها الأدنى 25 وطولها 5 [$30 - 25 = 5$] ، وتكرارها 12

- التكرار المتجمع السابق = مجموع تكرارات الفئات الأولى والثانية والثالثة

$$26 = 3 + 7 + 16 =$$

$$M = 25 + \left[\frac{(27 - 26)}{12} \times 5 \right] = 25 + \left[\frac{1}{12} \times 5 \right] = 25 + 0.41666 = 25.41666 \approx 25.42$$



عناصر المحاضرة

تعريف التشتت مقاييس التشتت

- المدى
- الانحراف المتوسط (متوسط الانحرافات)
- الانحراف المعياري

تعريف التشتت

الدرجة التي تتجه بها البيانات الكمية للانتشار حول قيمة متوسطة (أحد مقاييس الزعة المركزية) تسمى تشتت أو تغير البيانات. فمثلاً إذا كان لدينا 3 مجموعات من الطلاب ، كل مجموعة مكونة من خمسة طلاب ، وكانت لها الدرجات التالية (من 10 درجات) في أحد المقررات

المجموعة الثالثة
1, 2, 5, 8, 9

وسطها الحسابي 5

المجموعة الثانية
3, 4, 5, 6, 7

وسطها الحسابي 5

المجموعة الأولى
5, 5, 5, 5, 5

وسطها الحسابي 5

المجموعات الثلاثة لها وسط حسابي 5 ، لكن في المجموعة الأولى : جميع القيم متساوية وتساوي الوسط 5 ، في حين تنتشر البيانات في المجموعة الثانية حول هذا الوسط بقدر ما ، وفي المجموعة الثالثة تنتشر البيانات حول الوسط بقدر آخر .

أي أن الوسط الحسابي وحده [وهو يمثل لمقاييس زعة مركزية ، أي قيمة نموذجية ممثلة للبيانات] ليس كافياً وحده لوصف البيانات ، ولكن لابد من وجود نوع آخر من المقاييس لرصد مدى تشتت البيانات عن تلك القيمة المتوسطة الممثلة للبيانات . هذا النوع من المقاييس هو ما نسميه بـ مقاييس التشتت .

وهناك العديد من المقاييس التي يمكن استخدامها لقياس هذا التشتت ولكن أكثرها شيوعاً :

المدى - الانحراف المتوسط - الانحراف المعياري - الانحراف الربيعي

ولنتعرف على كل منها الآن



أولاً : المدى R :

مدى مجموعة من البيانات الكمية هو الفرق بين أكبر قيمة في البيانات وأقل قيمة فيها

فمثلاً مجموعة القيم : 15 3 7 6 12 18 5 13 15 يكون المدى : $R = 18 - 3 = 15$ ومجموعة القيم : 16 3 14 15 17 18 13 14 16 يكون المدى : $R = 18 - 3 = 15$

أي أن المدى واحد للمجموعتين في حين يبدو للعين المجردة أن هناك تشتت للبيانات أكبر في المجموعة الأولى عنه في المجموعة الثانية ، مما يعني أن المدى هنا لا يظهر هذا الفارق . لذا يُعد المدى مقياساً للتشتت لكنه غير جيد في كثير من الأحيان .

وبالرغم من بساطة تحديده إلا أن بعض العيوب [مثل تأثره بالقيم المتطرفة كما اتضح من المثال السابق عند حسابه للمجموعة الثانية حيث تأثر بالقيمة المتطرفة 3] ، فإذا استبعدنا تلك القيمة يكون المدى مساوياً لـ : $R = 18 - 13 = 5$.

أيضاً من بين عيوبه أنه لا يمكن تحديده في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة .

الفترة	العمر x	الفترة	العمر x	الفترة	العمر x	الفترة	العمر x
الأولى	$x < 6$	الأولى	$6 \leq x < 12$	الأولى	$x < 6$	الأولى	$2 \leq x < 6$
الثانية	$6 \leq x < 12$	الثانية	$12 \leq x < 15$	الثانية	$6 \leq x < 12$	الثانية	$6 \leq x < 12$
الثالثة	$12 \leq x < 15$	الثالثة	$15 \leq x < 18$	الثالثة	$12 \leq x < 15$	الثالثة	$12 \leq x < 15$
الرابعة	$x \geq 15$	الرابعة	$x \geq 18$	الرابعة	$15 \leq x < 18$	الرابعة	$15 \leq x < 18$

مفتوح من الطرفين

مفتوح من أعلى

مفتوح من أسفل

 $R = 18 - 2 = 16$

لا يمكن تحديد مدى البيانات

الحدا الأعلى للغة الأخيرة

الحدا الأدنى للغة الأولى

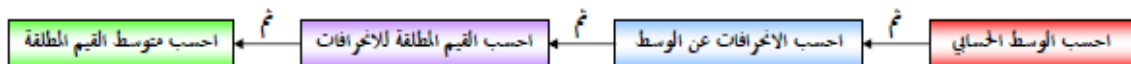
ثانياً : الانحراف المتوسط [أو متوسط الانحرافات] $M.D$ يُعرف الانحراف المتوسط (أو متوسط الانحرافات) [وسنرمز له بالرمز $M.D$] على أنه متوسط القيم المطلقة للانحرافات عن قيمة متوسطة للبيانات [عادة تكون الوسط الحسابي أو الوسيط] .فإذا اعتبرنا أن القيمة المتوسطة للبيانات هي الوسط الحسابي ، فإن الانحراف المتوسط لمجموعة من البيانات عددها n يُعطى بـ

ملحوظة هامة : القيمة المطلقة لأي عدد y هي القيمة العددية له دون إشارة ، ونرمز له بنفس الرمز y لكن بين خطين رأسيين $|y|$ ، أي نكتب القيمة المطلقة لـ y على الصورة $|y|$. فمثلاً : $|3| = 3$ ، $|-3| = 3$ ، $|2.5| = 2.5$ ، $|-3.25| = 3.25$ وهكذا .

$$M.D = \frac{\sum |d|}{n} \quad \text{أو} \quad M.D = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}$$

الانحراف عن الوسط $d = x - \bar{x}$

عدد القيم n

حيث $d = x - \bar{x}$ هي انحراف القيمة x عن الوسط الحسابي ، $|d|$ هي القيمة المطلقة للانحراف d .إذن لحساب الانحراف المتوسط (أو متوسط الانحرافات) $M.D$ لمجموعة من القيم يلزم حساب الوسط الحسابي أولاً ، ثم نحسب انحرافات كل قيمة من هذه القيم عن الوسط الحسابي ، ثم القيم المطلقة لهذه الانحرافات ، ثم متوسط هذه القيم المطلقة كما هو مبين :

فمثلاً : مجموعة القيم التي تعاملنا معها في الشريحة (٥) من هذه المحاضرة [عندما تعرفنا على "المدى"] :

مجموعة القيم الأولى :

15	13	3	5	18	12	6	7	3	15
-9.7	-9.7	-9.7	-9.7	-9.7	-9.7	-9.7	-9.7	-9.7	-9.7
5.3	3.3	-6.7	-4.7	8.3	2.3	-3.7	-2.7	-6.7	5.3
5.3	3.3	6.7	4.7	8.3	2.3	3.7	2.7	6.7	5.3

وسطها الحسابي : $\bar{x} = \frac{15+13+3+5+18+12+6+7+3+15}{10} = 9.7$

لاحظ أن مجموع الانحرافات = صفر

الانحرافات عن الوسط

القيم المطلقة للانحرافات

إذن الانحراف المتوسط هو متوسط القيم المطلقة للانحرافات : $M.D = \frac{5.3+3.3+6.7+4.7+8.3+2.3+3.7+2.7+6.7+5.3}{10} = 4.9$

ومجموعة القيم الثانية :

16	14	13	17	18	17	15	14	3	16
-14.3	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3
1.7	-0.3	-1.3	2.7	3.7	2.7	0.7	-0.3	-11.3	1.7
1.7	0.3	1.3	2.7	3.7	2.7	0.7	0.3	11.3	1.7

وسطها الحسابي : $\bar{x} = \frac{16+14+13+17+18+17+15+14+3+16}{10} = 14.3$

لاحظ أن مجموع الانحرافات = صفر

الانحرافات عن الوسط

القيم المطلقة للانحرافات

إذن الانحراف المتوسط هو متوسط القيم المطلقة للانحرافات : $M.D = \frac{1.7+0.3+1.3+2.7+3.7+2.7+0.7+0.3+11.3+1.7}{10} = 2.64$

أي أن الانحراف المتوسط للمجموعة الثانية من القيم أقل من الانحراف المتوسط للمجموعة الأولى من القيم مما يعني أن المجموعة الثانية أقل تشتتاً من المجموعة الأولى وهذا ما لم يمكن ملاحظته عند استخدام المدى كمقياس للتشتت



ويمكن أن يتم حل السؤال السابق وذلك بتنظيم خطواتنا من خلال جداول كالتالي :

المجموعة الثانية [n = 10]				المجموعة الأولى [n = 10]			
x	$\bar{x}$	$d = x - \bar{x}$	d	x	$\bar{x}$	$d = x - \bar{x}$	d
16	14.3	16 - 14.3 = 1.7	1.7	15	9.7	15 - 9.7 = 5.3	5.3
14	14.3	14 - 14.3 = -0.3	0.3	13	9.7	13 - 9.7 = 3.3	3.3
13	14.3	13 - 14.3 = -1.3	1.3	3	9.7	3 - 9.7 = -6.7	6.7
17	14.3	17 - 14.3 = 2.7	2.7	5	9.7	5 - 9.7 = -4.7	4.7
18	14.3	18 - 14.3 = 3.7	3.7	18	9.7	18 - 9.7 = 8.3	8.3
17	14.3	17 - 14.3 = 2.7	2.7	12	9.7	12 - 9.7 = 2.3	2.3
15	14.3	15 - 14.3 = 0.7	0.7	6	9.7	6 - 9.7 = -3.7	3.7
14	14.3	14 - 14.3 = -0.3	0.3	7	9.7	7 - 9.7 = -2.7	2.7
3	14.3	3 - 14.3 = -11.3	11.3	3	9.7	3 - 9.7 = -6.7	6.7
16	14.3	16 - 14.3 = 1.7	1.7	15	9.7	15 - 9.7 = 5.3	5.3
143	143	0	26.4	97	97	0	49

$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{143}{10} = 14.3$

$M.D = \frac{\sum |d|}{n} = \frac{26.4}{10} = 2.64$

مجموع الأعمدة →

← مجموع الأعمدة

ويمكن الاستغناء عن هذا العمود



• وفي حالة البيانات الكمية المتقطعة ذات التكرارات :

يمكن تحديد الانحراف المتوسط $M.D$ من العلاقة :

أي نضرب القيمة المطلقة لانحراف كل قيمة [عن الوسط] في تكرارها ، ثم نقسم الناتج على مجموع التكرارات

$$M.D = \frac{\sum f \times |d|}{\sum f}$$

الجدول التكراري	X			X		
	المتغير x	التكرار f	fx	$d = x - \bar{x}$	d	$f \times d $
	4	20	80	$4 - 5.3 = -1.3$	1.3	$20 \times 1.3 = 26$
	5	40	200	$5 - 5.3 = -0.3$	0.3	$40 \times 0.3 = 12$
	6	30	180	$6 - 5.3 = 0.7$	0.7	$30 \times 0.7 = 21$
	7	10	70	$7 - 5.3 = 1.7$	1.7	$10 \times 1.7 = 17$
		100	530			$\sum f \times d = 76$

$\sum f = 100$ $\sum fx = 530$
 $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{530}{100} = 5.3$

$M.D = \frac{\sum f \times |d|}{\sum f} = \frac{76}{100} = 0.76$

انتبه :
 مجموع الانحرافات هنا [والذي يجب أن يساوي صفراً] هو $\sum fd$ وليس $\sum d$ [حق ذلك بنفسك]

وهذا الجزء يُضاف إذا كان مطلوباً حساب الانحراف المتوسط

فمثلاً : إذا كان المطلوب حساب الانحراف المتوسط للبيانات المبينة بالجدول التكراري :

الجدول التكراري	المتغير x	التكرار f
	4	20
	5	40
	6	30
	7	10

هذا هو السؤال

وإليك الجواب



وبالتالي يكون الحل [بصورة ملخصة] كالآتي :

الجدول التكراري	X			X		
	المتغير x	التكرار f	fx	$d = x - \bar{x}$	d	$f \times d $
	4	20	80	$4 - 5.3 = -1.3$	1.3	$20 \times 1.3 = 26$
	5	40	200	$5 - 5.3 = -0.3$	0.3	$40 \times 0.3 = 12$
	6	30	180	$6 - 5.3 = 0.7$	0.7	$30 \times 0.7 = 21$
	7	10	70	$7 - 5.3 = 1.7$	1.7	$10 \times 1.7 = 17$
		100	530			76

$\sum f = 100$ $\sum fx = 530$ $\sum f \times |d| = 76$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{530}{100} = 5.3$$

$$M.D = \frac{\sum f \times |d|}{\sum f} = \frac{76}{100} = 0.76$$

• وفي حالة البيانات الكمية المتصلة : نستخدم نفس العلاقة السابقة لتحديد الانحراف المتوسط $M.D$ ، أي يكون

$$M.D = \frac{\sum f \times |d|}{\sum f} \quad \text{حيث} \quad d = x_0 - \bar{x} \quad , \quad x_0 \text{ تمثل مراكز الفئات}$$

أي أنه عند حساب الانحرافات نعتبر أن مركز أي فئة يمثل جميع القيم الموجودة في تلك الفئة

فمثلاً في المثالين التوضيحين (٢-٤) ، (٢-٦) بالباب الثاني [الخاصة ٤/ شريحة ٤ ، الخاصة ٥/ شريحة ١٦] والذي قمنا بحساب الوسط الحسابي لهما [الخاصة ٧/ شريحة ١٣] ، نقوم بعمل أعمدة إضافية للجدول تمكنا من حساب الانحراف المتوسط للبيانات كالآتي :



مثال (٢-٤) الجدول التكراري

الفئة	المتغير x (الطول)	التكرار f	المركز x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	$ d $	$f \times d $
الأولى	$0 \leq x < 20$	4	10	40	$10 - 31.7 = -21.7$	21.7	86.8
الثانية	$20 \leq x < 30$	16	25	400	$25 - 31.7 = -6.7$	6.7	107.2
الثالثة	$30 \leq x < 35$	12	32.5	390	$32.5 - 31.7 = 0.8$	0.8	9.6
الرابعة	$35 \leq x < 40$	10	37.5	375	$37.5 - 31.7 = 5.8$	5.8	58
الخامسة	$40 \leq x < 50$	6	45	270	$45 - 31.7 = 13.3$	13.3	79.8
السادسة	$50 \leq x < 60$	2	55	110	$55 - 31.7 = 23.3$	23.3	46.6
		50		1585			388
		$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum f d $

$$\bar{x} = \frac{\sum f x_0}{\sum f} = \frac{1585}{50} = 31.7$$

$$M.D = \frac{\sum f |d|}{\sum f} = \frac{388}{50} = 7.76$$

وبنفس الأسلوب يمكن التعامل مع مثال (٢-٦)

مثال (٢-٦) الجدول التكراري

الفئة	المتغير x (الطول)	التكرار f	المركز x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	$ d $	$f \times d $
الأولى	$50 \leq x < 60$	6	55	330	$55 - 83.75 = -28.25$	28.25	169.5
الثانية	$60 \leq x < 70$	9	65	585	$65 - 83.75 = -18.75$	18.75	168.75
الثالثة	$70 \leq x < 80$	15	75	1125	$75 - 83.75 = -8.75$	8.75	131.25
الرابعة	$80 \leq x < 90$	12	85	1020	$85 - 83.75 = 1.25$	1.25	15
الخامسة	$90 \leq x < 100$	9	95	855	$95 - 83.75 = 11.25$	11.25	101.25
السادسة	$100 \leq x < 120$	6	110	660	$110 - 83.75 = 26.25$	26.25	157.5
السابعة	$120 \leq x < 180$	3	150	450	$150 - 83.75 = 66.25$	66.25	198.75
		60		5025			942
		$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum f d $

مطلوب من سعادتك التحقق من صحة النتائج

$$\bar{x} = \frac{\sum f x_0}{\sum f} = \frac{5025}{60} = 83.75$$

$$M.D = \frac{\sum f |d|}{\sum f} = \frac{942}{60} = 15.7$$

King Faisal University [١١]

د. سعيد سيف الدين

ثالثاً : الانحراف المعياري s

يُعرف متوسط مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي على أنه **تباين** مجموعة البيانات [ويُرمز له بالرمز s^2]، ويُعرف الجذر التربيعي للتباين على أنه **الانحراف المعياري** للبيانات [ويُرمز له بالرمز s]، أي أن :

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \text{الانحراف المعياري} \quad \leftarrow \text{وفيه يكون} \quad s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \text{التباين}$$

فمثلاً في المثال المذكور في الشريحة ٥ [والذي سبق حساب كل من المدى والانحراف المتوسط للبيانات المعطاة] يكون "

الجموعه الثانية [n = 10]				الجموعه الأولى [n = 10]			
x	$d = x - \bar{x}$	d^2		x	$d = x - \bar{x}$	d^2	
16	$16 - 14.3 = 1.7$	2.89		15	$15 - 9.7 = 5.3$	28.09	
14	$14 - 14.3 = -0.3$	0.09		13	$13 - 9.7 = 3.3$	10.89	
13	$13 - 14.3 = -1.3$	1.69		3	$3 - 9.7 = -6.7$	44.89	
17	$17 - 14.3 = 2.7$	7.29		5	$5 - 9.7 = -4.7$	22.09	
18	$18 - 14.3 = 3.7$	13.69		18	$18 - 9.7 = 8.3$	68.89	
17	$17 - 14.3 = 2.7$	7.29		12	$12 - 9.7 = 2.3$	5.29	
15	$15 - 14.3 = 0.7$	0.49		6	$6 - 9.7 = -3.7$	13.69	
14	$14 - 14.3 = -0.3$	0.09		7	$7 - 9.7 = -2.7$	7.29	
3	$3 - 14.3 = -11.3$	127.69		3	$3 - 9.7 = -6.7$	44.89	
16	$16 - 14.3 = 1.7$	2.89		15	$15 - 9.7 = 5.3$	28.09	
$\sum x$			143	$\sum x$			97
			164.1				274.1
			$\sum d^2$				$\sum d^2$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 14.3$$

$$s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \frac{164.1}{10} = 16.41$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16.41} \approx 4.05$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 9.7$$

$$s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \frac{274.1}{10} = 27.41$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{27.41} \approx 5.24$$

King Faisal University [١٢]

د. سعيد سيف الدين



• وفي حالة البيانات الكمية المتقطعة ذات التكرارات :

يمكن تحديد التباين s^2 والانحراف المعياري s من :

$$s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \text{التباين} \quad \leftarrow \text{ومنه يكون} \quad s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}} = \text{الانحراف المعياري}$$

فمثلاً : إذا كان المطلوب حساب الانحراف المعياري للبيانات المبينة بالجدول التكراري :

الجدول التكراري	التكرار f	المتغير x	fx	$d = x - \bar{x}$	d^2	fd^2
	20	4	80	$4 - 5.3 = -1.3$	1.69	$20 \times 1.69 = 33.8$
	40	5	200	$5 - 5.3 = -0.3$	0.09	$40 \times 0.09 = 3.6$
	30	6	180	$6 - 5.3 = 0.7$	0.49	$30 \times 0.49 = 14.7$
	10	7	70	$7 - 5.3 = 1.7$	2.89	$10 \times 2.89 = 28.9$
	100		530			81

$\sum f = 100$ $\sum fx = 530$ $\sum fd^2 = 81$

$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{530}{100} = 5.3$

$s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \frac{81}{100} = 0.81$

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0.81} = 0.9$

هذا هو السؤال وإليك الجواب



• وفي حالة البيانات الكمية المتصلة : نستخدم نفس العلاقة السابقة لتحديد الانحراف المعياري s ، أي يكون :

$$s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \text{التباين} \quad \leftarrow \text{ومنه يكون} \quad s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}} = \text{الانحراف المعياري} \quad \text{حيث } d = x_0 - \bar{x}$$

أي أنه عند حساب الانحرافات نعتبر أن مركز أي فئة يمثل جميع القيم الموجودة في تلك الفئة

فمثلاً في المثال التوضيحي (٢-٤) بالباب الثاني [الخاصة ٤/ شريحة ٤] والذي قمنا بحساب الوسط الحسابي والانحراف المتوسط لبياناته ، يمكن حساب الانحراف المعياري لهذه البيانات كالتالي :

مثال (٢-٤) الجدول التكراري

الفئة	المتغير x (الطول)	التكرار f	المركز x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	d^2	$f \times d^2$
الأولى	$0 \leq x < 20$	4	10	40	$10 - 31.7 = -21.7$	470.89	$4 \times 470.89 = 1883.56$
الثانية	$20 \leq x < 30$	16	25	400	$25 - 31.7 = -6.7$	44.89	$16 \times 44.89 = 718.24$
الثالثة	$30 \leq x < 35$	12	32.5	390	$32.5 - 31.7 = 0.8$	0.64	$12 \times 0.64 = 7.68$
الرابعة	$35 \leq x < 40$	10	37.5	375	$37.5 - 31.7 = 5.8$	33.64	$10 \times 33.64 = 336.4$
الخامسة	$40 \leq x < 50$	6	45	270	$45 - 31.7 = 13.3$	176.89	$6 \times 176.89 = 1061.34$
السادسة	$50 \leq x < 60$	2	55	110	$55 - 31.7 = 23.3$	542.89	$2 \times 542.89 = 1085.78$
		50		1585			5093

$\sum f = 50$ $\sum fx_0 = 1585$ $\sum fd^2 = 5093$

$\bar{x} = \frac{\sum fx_0}{\sum f} = \frac{1585}{50} = 31.7$ $s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \frac{5093}{50} = 101.86$ $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{101.86} = 10.09$



مطلوب من سعادتك التحقق من صحة النتائج

وبنفس الأسلوب يمكن التعامل مع مثال (٢-٦) [الخاصة ٥/شريحة ١٦]

الفئة	المعبر x (الطول)	التكرار f	المركز x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	d^2	$f \times d^2$
الأولى	$50 \leq x < 60$	8	55	330	$55 - 83.75 = -28.25$	798.06	4788.36
الثانية	$60 \leq x < 70$	9	65	585	$65 - 83.75 = -18.75$	351.56	3164.04
الثالثة	$70 \leq x < 80$	15	75	1125	$75 - 83.75 = -8.75$	76.56	1148.4
الرابعة	$80 \leq x < 90$	12	85	1020	$85 - 83.75 = 1.25$	1.56	18.72
الخامسة	$90 \leq x < 100$	9	95	855	$95 - 83.75 = 11.25$	126.56	1139.04
السادسة	$100 \leq x < 120$	6	110	660	$110 - 83.75 = 26.25$	689.06	4134.36
السابعة	$120 \leq x < 180$	3	150	450	$150 - 83.75 = 66.25$	4389.06	13167.18
		$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum fd^2$
		60		5025			27560.1

$$\bar{x} = \frac{\sum f x_0}{\sum f} = \frac{5025}{60} = 83.75$$

$$s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \frac{27560.1}{60} = 459.34$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{459.34} = 21.43$$

من السابق يتضح أن كلاً من الانحراف المتوسط والانحراف المعياري يعتمدان تماماً في حسابهما على الوسط الحسابي ، وبالتالي فلهما نفس مزايا وعيوب الوسط الحسابي . أي :

المزايا : من السهل حسابها - يأخذ في الاعتبار جميع البيانات - لا يحتاجا لترتيب معين للبيانات

العيوب : يتأثرا بشدة بالقيم المتطرفة - لا يمكن إيجادها بالرسم (بيانياً) - لا يمكن حسابها للتوزيعات التكرارية المفتوحة

ويمكن تلخيص كل ما يخص الوسط الحسابي والانحراف المتوسط والانحراف المعياري في الآتي :



• للقيم المفردة :

قيم عددها n	الانحرافات عن الوسط	القيم المطلقة للانحرافات	مربع الانحرافات
x	$d = x - \bar{x}$	$ d $	d^2
...	...	...	...
...	...	...	...
$\sum x$		$\sum d $	$\sum d^2$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \text{الوسط الحسابي}$$

$$M.D = \frac{\sum |d|}{n} = \text{الانحراف المتوسط}$$

$$s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \text{التباين} \longrightarrow s = \sqrt{s^2} = \text{الانحراف المعياري}$$

• ولتوزيع تكراري :

القيم	التكرار		الانحرافات عن الوسط	القيم المطلقة للانحرافات	مربع الانحرافات		
x	f	fx	$d = x - \bar{x}$	$ d $	d^2	$f d $	fd^2
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
	$\sum f$	$\sum fx$				$\sum f d $	$\sum fd^2$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

$$M.D = \frac{\sum f|d|}{\sum f}$$

$$s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} \longrightarrow s = \sqrt{s^2}$$

• وليبيانات المتصلة :

الفئات	التكرار		الانحرافات عن الوسط	القيم المطلقة للانحرافات	مربع الانحرافات		
x	f	مراكز الفئات x_0	$d = x_0 - \bar{x}$	$ d $	d^2	$f d $	fd^2
...	...	x_0	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
	$\sum f$					$\sum f d $	$\sum fd^2$

مثل التوزيع التكراري السابق فيما عدا أن كل فئة تُمثل بمركزها



خاصتان هامتان للانحراف المتوسط والانحراف المعياري :

الخاصة الأولى : إضافة عدد ثابت C لكل قيمة من قيم البيانات لا يؤثر على قيمة الانحراف المتوسط والمعياري .

الانحراف المتوسط (أو المعياري) الجديد = الانحراف المتوسط (أو المعياري) القديم

الخاصة الثانية : ضرب كل قيمة من قيم البيانات في عدد ثابت C يجعل :

الانحراف المتوسط (أو المعياري) الجديد = الانحراف المتوسط (أو المعياري) القديم $\times$ القيمة المطلقة للثابت C

فمثلاً في سؤال "سلي نفسك" [الخاصة ٧/شريحة ٩ - سؤال أم وليد وأبو وليد] ، كانت البيانات عن درجات الطلاب كالتالي :

الدرجات الأصلية					بعد إضافة 5 لكل درجة					بعد ضرب كل درجة في 1.5				
x	d	$ d $	d^2		x	d	$ d $	d^2		x	d	$ d $	d^2	
9	1	1	1	$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{40}{5} = 8$	14	1	1	1	$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{65}{5} = 13$	13.5	1.5	1.5	2.25	
2	-6	6	36	$M.D = \frac{\sum d }{n} = \frac{14}{5} = 2.8$	7	-6	6	36	$M.D = \frac{\sum d }{n} = \frac{14}{5} = 2.8$	3	-9	9	81	
7	-1	1	1	$s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \frac{58}{5} = 11.6$	12	-1	1	1	$s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \frac{58}{5} = 11.6$	10.5	-1.5	1.5	2.25	
12	4	4	16	$s = \sqrt{11.6} = 3.4$	17	4	4	16	$s = \sqrt{11.6} = 3.4$	18	6	6	36	
10	2	2	4		15	2	2	4		15	3	3	9	
40		14	58		65		14	58		60		21	130.5	

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{60}{5} = 12$$

$$s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \frac{130.5}{5} = 26.1$$

$$M.D = \frac{\sum |d|}{n} = \frac{21}{5} = 4.2$$

$$s = \sqrt{26.1} = 5.1$$

$$(2.8 \times 1.5)$$

$$(3.4 \times 1.5)$$

التكملة هنا



سلي نفسك لغاية ما نتقابل بإذن الله [حل الأسئلة التالية يُعد بمثابة ملخص لكل ما تقدم ، وللمساعدة أكمل الجداول المعطاة كموذج من تنظيم حلك]

(١) أوجد المدى R ، الوسط الحسابي $\bar{x}$ ، الانحراف المتوسط $M.D$ ، التباين s^2 ، والانحراف المعياري s لمجموعة القيم :

5 3 8 4 7 6 12 4 3 8

الحل :

x	$d = x - \bar{x}$	$ d $	d^2
5			
3			
8			
4			
7			
6			
12			
4			
3			
8			
$\sum x$		$\sum d $	$\sum d^2$

• المدى $R = \text{أكبر قيمة} - \text{أقل قيمة} = \dots - \dots = \dots$

• الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \dots$

• الانحراف المتوسط $M.D = \frac{\sum |d|}{n} = \dots$

• التباين $s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \dots$

• الانحراف المعياري $s = \sqrt{s^2} = \dots$

الإجابة :

$$R = 9 , \bar{x} = 6 , M.D = 2.2 , s^2 = 7.2 , s = 2.68$$



المتغير x	8	2	4	6
التكرار f	20	30	35	15

(٢) أوجد المدى R ، الوسط الحسابي $\bar{x}$ ، الانحراف المتوسط $M.D$ ، التباين s^2 ، والانحراف المعياري s للبيانات المبينة بالجدول التكراري المقابل.

الحل:

المتغير x	التكرار f	fx	$d = x - \bar{x}$	$ d $	$f d $	d^2	fd^2
8	20						
2	30						
4	35						
6	15						
	$\sum f$	$\sum fx$			$\sum f d $		$\sum fd^2$

• المدى $R = \text{أكبر قيمة} - \text{أقل قيمة} = \dots - \dots = \dots$

• الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \dots$ • الانحراف المتوسط $M.D = \frac{\sum f|d|}{\sum f} = \dots$

• التباين $s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \dots$ • الانحراف المعياري $s = \sqrt{s^2} = \dots$

الإجابة: $R = 6$ ، $\bar{x} = 4.5$ ، $M.D = 1.85$ ، $s^2 = 4.75$ ، $s \approx 2.18$



المتغير x	$5 \leq x < 15$	$15 \leq x < 25$	$25 \leq x < 45$	$45 \leq x < 55$
التكرار f	20	30	40	10

(٣) أوجد المدى R ، الوسط الحسابي $\bar{x}$ ، $M.D$ ، s^2 ، s للبيانات المبينة بالجدول التكراري المقابل.

الحل:

المتغير x	التكرار f	x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	$ d $	$f d $	d^2	fd^2
$5 \leq x < 15$	20							
$15 \leq x < 25$	30							
$25 \leq x < 45$	40							
$45 \leq x < 55$	10							
	$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum f d $		$\sum fd^2$

• المدى $R = \text{أكبر قيمة} - \text{أقل قيمة} = \dots - \dots = \dots$

• الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum fx_0}{\sum f} = \dots$ • الانحراف المتوسط $M.D = \frac{\sum f|d|}{\sum f} = \dots$

• التباين $s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \dots$ • الانحراف المعياري $s = \sqrt{s^2} = \dots$

الإجابة: $R = 50$ ، $\bar{x} = 27$ ، $M.D = 11$ ، $s^2 = 151$ ، $s \approx 12.29$



عناصر المحاضرة

- حل مسائل "سلي نفسك" الموجودة بالمحاضرة العاشرة
- تابع مقاييس التشتت
 - الانحراف الربيعي [نصف المدى الربيعي]
 - المدى المثني
- علاقات اعتبارية بين مقاييس التشتت
- التشتت النسبي ومقاييسه
- الدرجات المعيارية

المحاضرة الحادية عشرة

حل مسائل "سلي نفسك" الموجودة بالمحاضرة العاشرة

مبادئ الإحصاء

(١) أوجد المدى R ، الوسط الحسابي $\bar{x}$ ، الانحراف المتوسط $M.D$ ، التباين s^2 ، والانحراف المعياري s لمجموعة القيم:

5 3 8 4 7 6 12 4 3 8

الحل: عدد القيم n يساوي 10

• المدى $R = \text{أكبر قيمة} - \text{أقل قيمة} = 12 - 3 = 9$

• الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{60}{10} = 6$

• الانحراف المتوسط $M.D = \frac{\sum |d|}{n} = \frac{22}{10} = 2.2$

• التباين $s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \frac{76}{10} = 7.6$

• الانحراف المعياري $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{7.6} = 2.76$

x	d	$ d $	d^2
5	-1	1	1
3	-3	3	9
8	2	2	4
4	-2	2	4
7	1	1	1
6	0	0	0
12	6	6	36
4	-2	2	4
3	-3	3	9
8	2	2	4
60		22	76
$\sum x$		$\sum d $	$\sum d^2$

(٢) أوجدى المدى R ، الوسط الحسابي $\bar{x}$ ، الانحراف المتوسط $M.D$ ، التباين s^2 ،

والانحراف المعياري s للبيانات المبينة بالجدول التكراري المقابل .

الحل :

الجدول التكراري	المتغير x	التكرار f	fx	$d = x - \bar{x}$	$ d $	$f d $	d^2	fd^2
	8	20	160	$8 - 4.5 = 3.5$	3.5	$20 \times 3.5 = 70$	12.25	245
	2	30	60	$2 - 4.5 = -2.5$	2.5	$30 \times 2.5 = 75$	6.25	187.5
	4	35	140	$4 - 4.5 = -0.5$	0.5	$35 \times 0.5 = 17.5$	0.25	8.75
	6	15	90	$6 - 4.5 = 1.5$	1.5	$15 \times 1.5 = 22.5$	2.25	33.75
		100	450			185		475
		$\sum f$	$\sum fx$			$\sum f d $		$\sum fd^2$

• المدى $R = \text{أكبر قيمة} - \text{أقل قيمة} = 6 - 2 = 4$

• الانحراف المتوسط $M.D = \frac{\sum f|d|}{\sum f} = \frac{185}{100} = 1.85$

• الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{450}{100} = 4.5$

• الانحراف المعياري $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4.75} = 2.18$

• التباين $s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \frac{475}{100} = 4.75$

المتغير x	$5 \leq x < 15$	$15 \leq x < 25$	$25 \leq x < 45$	$45 \leq x < 55$
التكرار f	20	30	40	10

(٣) أوجدى R ، $\bar{x}$ ، $M.D$ ، s^2 ، s للبيانات المبينة بالجدول

التكراري المقابل .

الحل :

الجدول التكراري	المتغير x	التكرار f	x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	$ d $	$f d $	d^2	fd^2
	$5 \leq x < 15$	20	10	200	$10 - 27 = -17$	17	$20 \times 17 = 340$	289	5780
	$15 \leq x < 25$	30	20	600	$20 - 27 = -7$	7	$30 \times 7 = 210$	49	1470
	$25 \leq x < 45$	40	35	1400	$35 - 27 = 8$	8	$40 \times 8 = 320$	64	2560
	$45 \leq x < 55$	10	50	500	$50 - 27 = 23$	23	$10 \times 23 = 230$	529	5290
		100		2700			1100		15100
		$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum f d $		$\sum fd^2$

• المدى $R = \text{أكبر قيمة} - \text{أقل قيمة} = 55 - 5 = 50$

• الانحراف المتوسط $M.D = \frac{\sum f|d|}{\sum f} = \frac{1100}{100} = 11$

• الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum fx_0}{\sum f} = \frac{2700}{100} = 27$

• الانحراف المعياري $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{151} = 12.29$

• التباين $s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \frac{15100}{100} = 151$

رابعاً : الانحراف الربيعي [نصف المدى الربيعي]

لمجموعة من البيانات يُعرف الانحراف الربيعي [أو نصف المدى الربيعي وسنرمز له بالرمز Q] كالاتي :

$$Q \text{ [نصف المدى الربيعي]} = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

الربع الثالث

الربع الأول

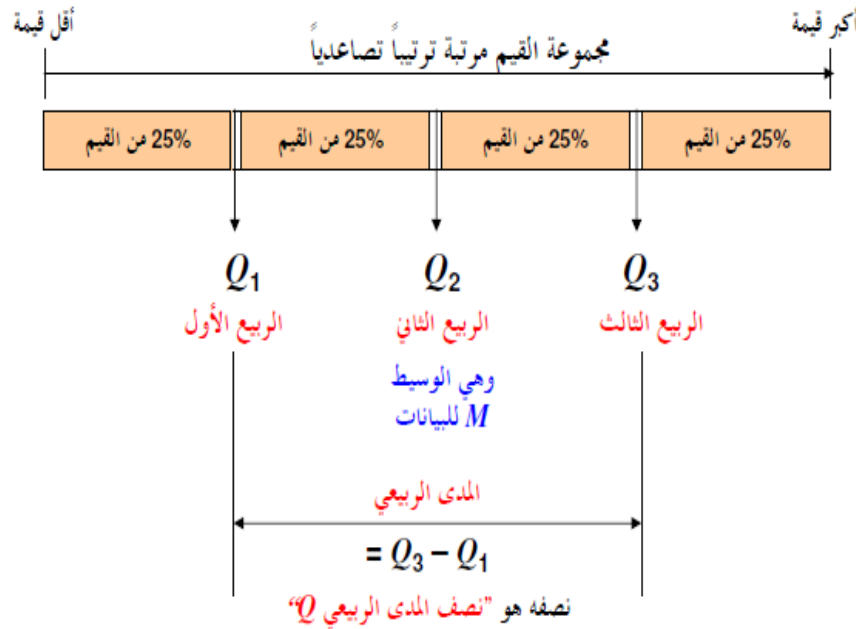
ويفضل استخدام هذا المقياس [الانحراف الربيعي] في الكثير من الحالات خاصة تلك الحالات التي يستعصي فيها حساب الانحراف المتوسط أو المعياري [مثل حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة أو حالة وجود قيم متطرفة في البيانات]

وفي بعض الأحيان يُستخدم المدى الربيعي $Q_3 - Q_1$ كمقياس للتشتت بدلاً من نصف المدى الربيعي

س : ما هي الربيعات ؟

ج : إذا رتبنا مجموعة من القيم ترتيباً تصاعدياً فإن القيمة التي تقسم المجموعة إلى مجموعتين متساويتين في العدد تُسمى بالوسيط M . بتعميم هذه الفكرة ، يمكن أن نقسم مجموعة القيم إلى أربعة أجزاء متساوية في العدد وذلك بثلاثة قيم [سنرمز لها بالرموز Q_1 ، Q_2 و Q_3]. هذه القيم تُسمى بالربيعات حيث :

Q_1 تُسمى بالربيع الأول ، Q_2 تُسمى بالربيع الثاني ، Q_3 تُسمى بالربيع الثالث



أي أن :

Q_1 [الربيع الأول] هي تلك القيمة التي يقع تحتها 25% من القيم [وبالطبع وفوقها 75% من القيم]

Q_2 [الربيع الثاني] هي تلك القيمة التي يقع تحتها 50% من القيم [وبالطبع وفوقها 50% من القيم] [أي الوسيط M]

Q_3 [الربيع الثالث] هي تلك القيمة التي يقع تحتها 75% من القيم [وبالطبع وفوقها 25% من القيم]



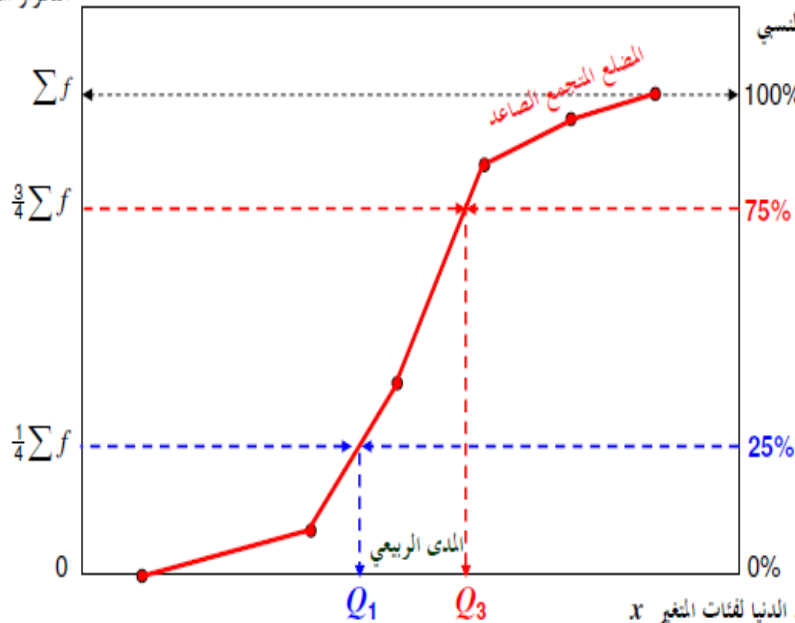
ويكن تحديد الربعين Q_1 (الأول) ، Q_3 (الثالث) بنفس الطريقة التي حددنا بها الوسيط M [الربع الثاني Q_2] ، إلا أننا سنكتفي هنا بتحديد Q_1 و Q_3 [ومن ثم تحديد نصف المدى الربيعي Q] للبيانات الكمية المتصلة كالتالي :

على المضلع التكراري المتجمع الصاعد :

حدد قيمة المتغير المناظرة لتكرار متجمع قدره $\frac{1}{4}\sum f$ أو تكرار متجمع نسبي قدره 25% فتكون تلك القيمة هي Q_1 [الربع الأول] .

حدد قيمة المتغير المناظرة لتكرار متجمع قدره $\frac{3}{4}\sum f$ أو تكرار متجمع نسبي قدره 75% فتكون تلك القيمة هي Q_3 [الربع الثالث] .

التكرار المتجمع



ويكون المدى الربيعي هو :
 $Q_3 - Q_1$
 ونصف المدى الربيعي [أو الانحراف الربيعي] هو :
 $Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$

المتغير x	$1 \leq x < 3$	$3 \leq x < 5$	$5 \leq x < 7$	$7 \leq x < 10$
التكرار f	14	29	18	9

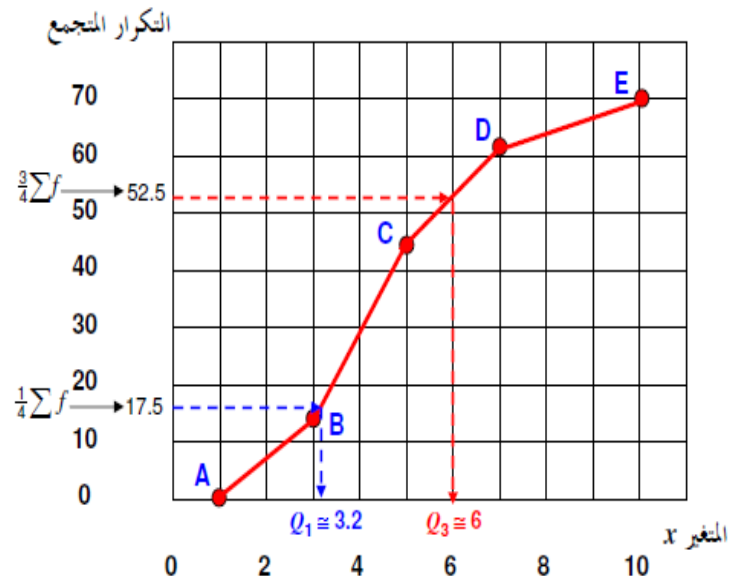
فمثلاً للتوزيع التكراري المبين :

• قم بتكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد

• قم برسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد ومنه حدد قيم الربع الأول Q_1 والربع الثالث Q_3 بالطريقة المذكورة سابقاً

الجدول التكراري المتجمع الصاعد		
المتغير x	التكرار المتجمع	النقطة على المضلع
< 1	0	A (1, 0)
< 3	14	B (3, 14)
< 5	43	C (5, 43)
< 7	61	D (7, 61)
< 10	$\sum f = 70$	E (10, 70)

ملحوظة : $\frac{1}{4}\sum f = 17.5$ ، $\frac{3}{4}\sum f = 52.5$



إذن المدى الربيعي هو : $Q_3 - Q_1 = 6 - 3.2 = 2.8$

ونصف المدى الربيعي [أو الانحراف الربيعي] هو : $Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2} \times 2.8 = 1.4$

خامساً : المدى المثيني : مجموعة من البيانات يُعرف المدى المثيني [وسنرمز له بالرمز P] كالاتي :

$$P = P_{90} - P_{10}$$

المدى المثيني : المئين التسعون المئين العاشر

ويفضل أيضاً استخدامه في الحالات التي يستعصي فيها حساب الانحراف المتوسط أو المعياري [مثل حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة أو حالة وجود قيم متطرفة في البيانات]

س : ما هي المئينات ؟

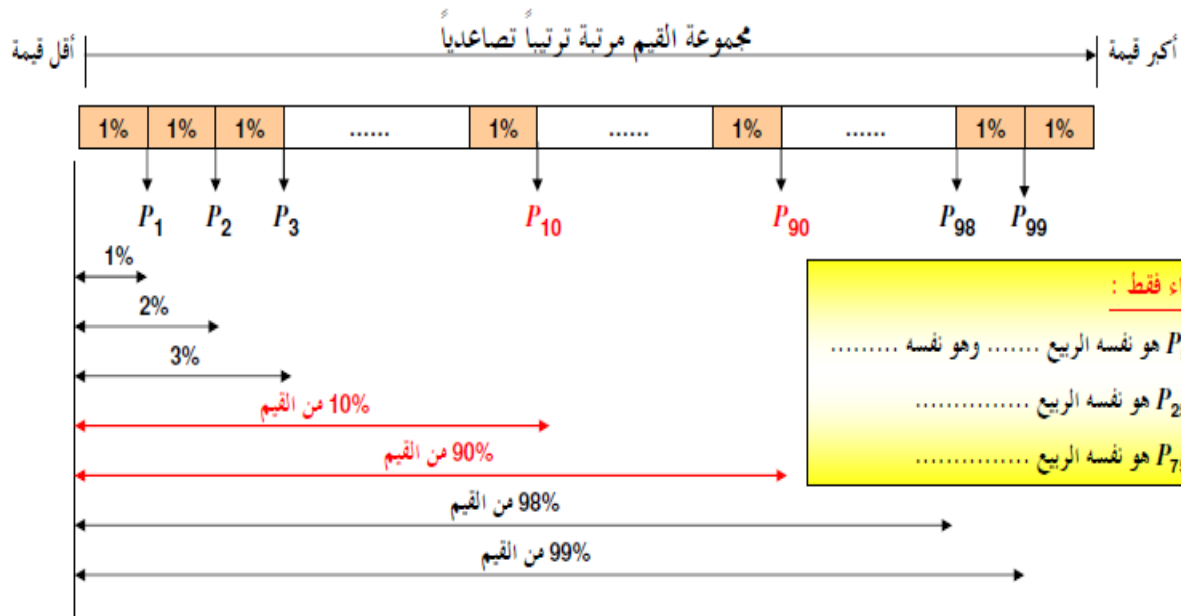
ج : بنفس الطريقة التي تم بها تقسيم مجموعة من القيم إلى مجموعتين متساويتين في العدد [عن طريق الوسيط M] أو تقسيمها إلى أربعة مجموعات متساوية في العدد [عن طريق الربيعات Q_1, Q_2, Q_3] ، يمكن تقسيم مجموعة القيم إلى 100 مجموعة متساوية في العدد عن طريق قيم عددها 99 سنرمز لها بالرموز :

$$P_1, P_2, \dots, P_{10}, \dots, P_{90}, \dots, P_{98}, P_{99}$$

تُسمى هذه القيم بـ المئينات ، حيث :

P_1 [المئين الأول] : هو قيمة يقع تحتها 1% من مجموع القيم [وبالطبع يقع فوقها 99% من القيم]

P_2 [المئين الثاني] : هو قيمة يقع تحتها 2% من مجموع القيم [وبالطبع يقع فوقها 98% من القيم]



P_{10} [المئين العاشر] : هو قيمة يقع تحتها 10% من مجموع القيم [وبالطبع يقع فوقها 90% من القيم]

P_{90} [المئين التسعون] : هو قيمة يقع تحتها 90% من مجموع القيم [وبالطبع يقع فوقها 10% من القيم]

وهكذا

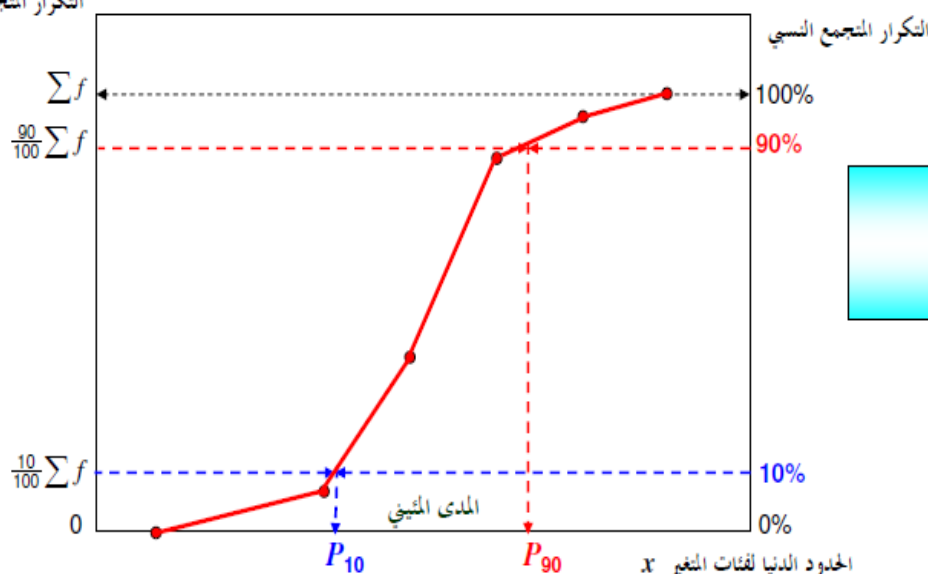
ويكن تحديد المئينات P_{10} (العاشر) ، P_{90} (التسعون) بنفس الطريقة التي حددنا بها الوسيط M والربيعات ، إلا أننا سنكتفي هنا بتحديد P_{10} و P_{90} ثم تحديد المدى المئيني P للبيانات الكمية المتصلة كالتالي :

على المضلع التكراري المتجمع الصاعد :

حدد قيمة المتغير المناظرة لتكرار متجمع قدره $\sum f \frac{10}{100}$ أو **تكرار متجمع نسبي قدره 10%** فتكون تلك القيمة هي P_{10} [المئين العاشر] .

حدد قيمة المتغير المناظرة لتكرار متجمع قدره $\sum f \frac{90}{100}$ أو **تكرار متجمع نسبي قدره 90%** فتكون تلك القيمة هي P_{90} [المئين التسعون] .

التكرار المتجمع



المتغير x	$1 \leq x < 3$	$3 \leq x < 5$	$5 \leq x < 7$	$7 \leq x < 10$
التكرار f	14	29	18	9

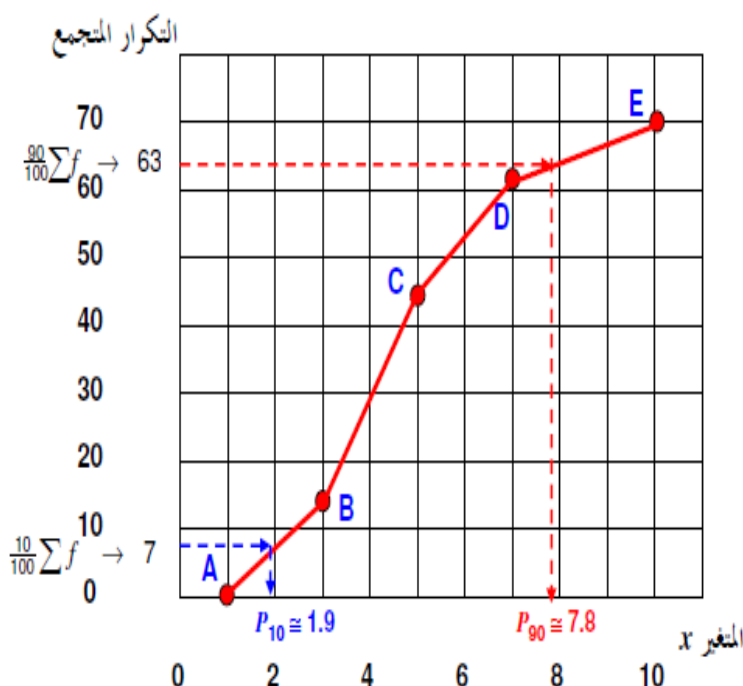
فمثلاً للتوزيع التكراري المبين :

• قم بتكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد

• قم برسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد ومنه حدد قيم المئين العاشر P_{10} والمئين التسعين P_{90} بالطريقة المذكورة سابقاً

الجدول التكراري المتجمع الصاعد		
المتغير x	التكرار المتجمع	النقطة على المضلع
< 1	0	A (1 , 0)
< 3	14	B (3 , 14)
< 5	43	C (5 , 43)
< 7	61	D (7 , 61)
< 10	$\sum f = 70$	E (10 , 70)

ملحوظة : $\frac{10}{100} \sum f = 7$ ، $\frac{90}{100} \sum f = 63$



إذن المدى المئيني هو : $P = P_{90} - P_{10} \approx 7.8 - 1.9 = 6.9$

في التوزيعات متوسطة الالتواء هناك علاقات اعتبارية (تقريبية) بين مقاييس التشتت السابقة كالآتي :

$s = \frac{5}{4} M.D$	الانحراف المعياري $\times \frac{5}{4} =$ الانحراف المتوسط	أو	$M.D = \frac{4}{5} s$	الانحراف المتوسط $\times \frac{4}{5} =$ الانحراف المعياري
$s = \frac{3}{2} Q$	الانحراف المعياري $\times \frac{3}{2} =$ الانحراف الربيعي	أو	$Q = \frac{2}{3} s$	الانحراف الربيعي $\times \frac{2}{3} =$ الانحراف المعياري
$Q = \frac{5}{6} M.D$	الانحراف الربيعي $\times \frac{6}{5} =$ الانحراف المتوسط	أو	$M.D = \frac{6}{5} Q$	الانحراف المتوسط $\times \frac{6}{5} =$ الانحراف الربيعي

هذه العلاقات الاعتبارية تمكننا من حساب قيم تقريبية لبقية مقاييس التشتت متى عُلم أحدها [وذلك في حالة صلاحيتها .. أي في حالة التوزيعات التكرارية متوسطة الالتواء]

فمثلاً : • إذا كان $s = 30$ فإن : $M.D = \frac{4}{5} s = \frac{4}{5} \times 30 = 24$ ، $Q = \frac{2}{3} s = \frac{2}{3} \times 30 = 20$

• وإذا كان $Q = 20$ فإن : $M.D = \frac{6}{5} Q = \frac{6}{5} \times 20 = 24$ ، $s = \frac{3}{2} Q = \frac{3}{2} \times 20 = 30$

• وإذا كان $M.D = 24$ فإن : $s = \frac{5}{4} M.D = \frac{5}{4} \times 24 = 30$ ، $Q = \frac{5}{6} M.D = \frac{5}{6} \times 24 = 20$



التشتت النسبي ومقاييسه

التغير الفعلي أو التشتت كما نحصل عليه من الانحراف المتوسط أو المعياري أو الربيعي أو غيره من مقاييس التشتت يُسمى بالتشتت المطلق ، ولكن تشتت قدره 10 درجات عن قيمة متوسطة 50 درجة (مثلاً) يختلف عن تشتت قدره 10 درجات عن قيمة متوسطة 200 ، لذا من المناسب تعريف ما يُسمى بـ التشتت النسبي وهو :

$$\text{التشتت النسبي (كنسبة مئوية)} = \frac{\text{التشتت المطلق}}{\text{المتوسط}} \times 100$$

وبالتالي يكون التشتت النسبي لتشتت مطلق قدره 10 لبيانات متوسطةها 50 : $\frac{10}{50} \times 100 = 20\%$

أما التشتت النسبي لتشتت مطلق قدره 10 لبيانات متوسطةها 200 فهو : $\frac{10}{200} \times 100 = 5\%$

ومن أكثر مقاييس التشتت النسبي استخداماً ما يُسمى بمعامل الاختلاف [أو معامل التشتت] و معامل الاختلاف الربيعي ، حيث :

$$100 \times \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \text{معامل الاختلاف الربيعي}$$

$$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$$

$$100 \times \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} = \text{معامل الاختلاف}$$

$$\frac{s}{\bar{x}} \times 100$$



المتغير x	التكرار f
$6 \leq x < 10$	8
$10 \leq x < 12$	20
$12 \leq x < 14$	12
$14 \leq x < 18$	10

فعلي سبيل المثال ، إذا كانت لدينا البيانات الموضحة بالجدول المقابل عن توزيع الوحدات السكنية حسب الإيجار السنوي بأحد الأحياء x يمثل الإيجار بالألف ريال ، f يمثل عدد الوحدات السكنية ، وكان مطلوباً تحديد كلٍ من معامل الاختلاف للإيجار و معامل الاختلاف الربيعي له .

أولاً : بالنسبة لمعامل الاختلاف : لابد أولاً من تحديد كلٍ من الوسط الحسابي والانحراف المعياري [فرصة للمراجعة]

المتغير x	التكرار f	x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	d^2	fd^2
$6 \leq x < 10$	8	8	64	$8 - 12 = -4$	16	128
$10 \leq x < 12$	20	11	220	$11 - 12 = -1$	1	20
$12 \leq x < 14$	12	13	156	$13 - 12 = 1$	1	12
$14 \leq x < 18$	10	16	160	$16 - 12 = 4$	16	160
	50		600			320
	$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum fd^2$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx_0}{\sum f} = \frac{600}{50} = 12 \quad s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \frac{320}{50} = 6.4 \rightarrow s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6.4} \approx 2.53$$

وبالتالي يكون معامل الاختلاف $= 100 \times \frac{s}{\bar{x}} = 100 \times \frac{2.53}{12} \approx 21.1\%$ ، أي أن الإيجار يتغير بنسبة ٢١,١ % تقريباً

ثانياً : بالنسبة لمعامل الاختلاف الربيعي : لابد أولاً من تحديد الربيعين الأول والثالث [فرصة للمراجعة]

المتغير x	التكرار f
$6 \leq x < 10$	8
$10 \leq x < 12$	20
$12 \leq x < 14$	12
$14 \leq x < 18$	10

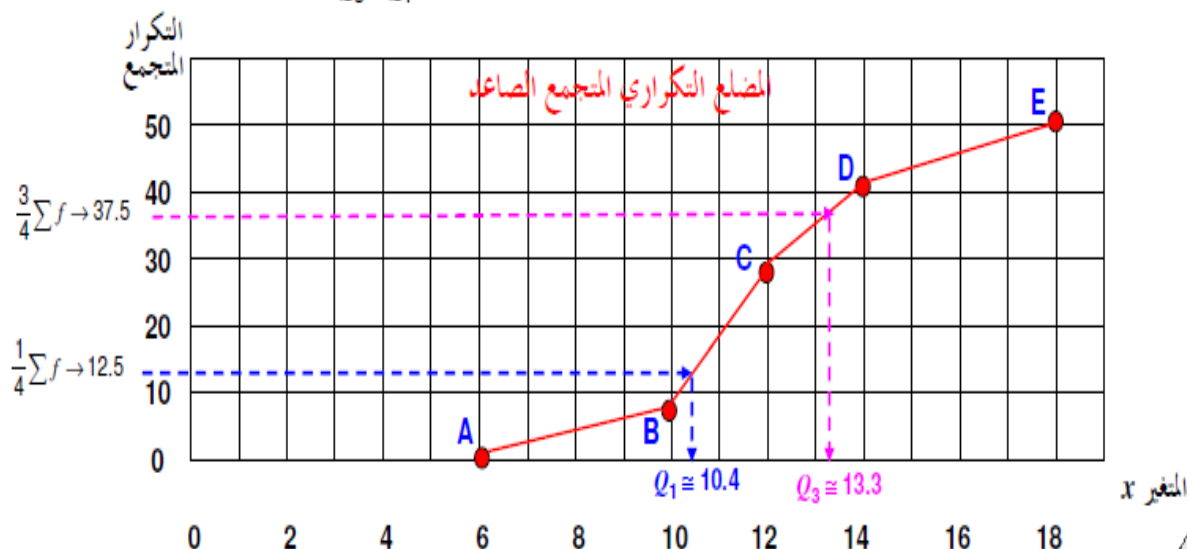
الجدول التكراري المتجمع الصاعد		
المتغير x	التكرار المتجمع	النقطة على المضلع
< 6	0	A (6, 0)
< 10	8	B (10, 8)
< 12	28	C (12, 28)
< 14	40	D (14, 40)
< 18	$\sum f = 50$	E (18, 50)

• قم بتكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد

• قم برسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد

ومنه حدد قيم الربيع الأول Q_1 والربيع الثالث Q_3

$$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100 = \frac{13.3 - 10.4}{13.3 + 10.4} \times 100 = \frac{2.9}{23.7} \times 100 \approx 12.2\%$$



للمجموعة من القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ وسطها الحسابي $\bar{x}$ وانحرافها المعياري s تسمى :

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

بـ **الدرجة المعيارية للقيمة x** .

فمثلاً للمجموعة القيم 5 3 8 4 7 6 12 4 3 8 [سؤال سلمي نفسك/الخاصة ١٠/شريحة ١٦] والذي قمنا بحله في بداية هذه المحاضرة/شريحة ٤] ، كان الوسط الحسابي 6 والانحراف المعياري 2.76 . إذن الدرجات المعيارية لهذه القيم هي :

5	3	8	4	7	6	12	4	3	8	القيم
---	---	---	---	---	---	----	---	---	---	-------

-0.36	-1.09	0.72	-0.72	0.36	0	2.17	-0.72	-1.09	0.72	الدرجات المعيارية للقيم
$\frac{5-6}{2.76}$	$\frac{3-6}{2.76}$	$\frac{8-6}{2.76}$	$\frac{4-6}{2.76}$	$\frac{7-6}{2.76}$	$\frac{6-6}{2.76}$	$\frac{12-6}{2.76}$	$\frac{4-6}{2.76}$	$\frac{3-6}{2.76}$	$\frac{8-6}{2.76}$	

وللدرجات المعيارية للقيم أهمية كبيرة في مقارنة نتائج بيانات مختلفة بعضها حيث قد يؤدي الاعتماد على القيم الحقيقية إلى استنتاجات غير سليمة أو مضللة . لتوضيح ذلك دعنا نعتبر المثال التالي :

في الاختبار النهائي لمقرر الإحصاء حصل طالب على 82 درجة [حيث كان الوسط الحسابي للدرجات 76 بانحراف معياري 10] وحصل في مقرر الصحة واللياقة على 90 درجة [حيث كان الوسط الحسابي للدرجات 82 بانحراف معياري 16] . هل يمكن القول أن الطالب درجة استيعابه لمقرر الصحة واللياقة كانت أعلى من درجة استيعابه لمقرر الإحصاء ؟

الاعتماد على درجات الطالب في المقررين [82 في الإحصاء ، 90 في الصحة واللياقة] تجعل الإجابة : **نعم** درجة استيعاب الطالب لمقرر الصحة واللياقة أعلى من درجة استيعابه لمقرر الإحصاء .

ولكن الإجابة الصحيحة تعتمد على **الدرجة المعيارية** للطالب في كل من المقررين :

في مقرر الصحة واللياقة	في مقرر الإحصاء
$x = 90$, $\bar{x} = 82$, $s = 16$	$x = 84$, $\bar{x} = 76$, $s = 10$
$\therefore z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{90 - 82}{16} = \frac{8}{16} = 0.5$	$\therefore z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{84 - 76}{10} = \frac{8}{10} = 0.8$

أي أن الدرجة المعيارية للطالب في مقرر الإحصاء أعلى من نظيرتها في مقرر الصحة واللياقة ، مما يعني أن درجة استيعاب الطالب لمقرر الإحصاء أعلى من درجة استيعابه لمقرر الصحة واللياقة .

الوزن x	$x < 50$	$50 \leq x < 60$	$60 \leq x < 70$	$70 \leq x < 80$	$x \geq 80$
العدد f	14	29	18	9	9

سلي نفسك لغاية ما تقابل بإذن الله

(١) البيانات الموضحة بالجدول المقابل تعبر عن أوزان مجموعة من

الطلبة (بالكيلوجرام) في المرحلة الجامعية . المطلوب حساب مقياس مناسب للترعة المركزية وآخر للتشتت ، ثم أوجد مقياساً لمعامل الاختلاف .

(٢) حصل أحد الطلاب في مقرر الخاسبة على درجة ٨٠ في الاختبار النهائي وعلى درجة ٧٠ في مقرر الرياضيات . هل يمكن القول بأن درجة

استيعاب الطالب لمادة الخاسبة أفضل من درجة استيعابه لمادة الرياضيات علماً بأن الوسط الحسابي لدرجات الطلاب في المادتين هو ٨٣ [في الخاسبة] ، ٦٥ [في الرياضيات] بانحراف معياري قدره ٥ في المادتين .

المحاضرة الثانية عشرة

الباب الخامس الالتواء والتفرطح

King Faisal University [٢]

د. سعيد سيف الدين



المحاضرة الثانية عشرة

{قالوا سبحانك لا علم لنا إلا ما علمتنا ، إنك أنت العليم الحكيم}

مبادئ الإحصاء

عناصر المحاضرة

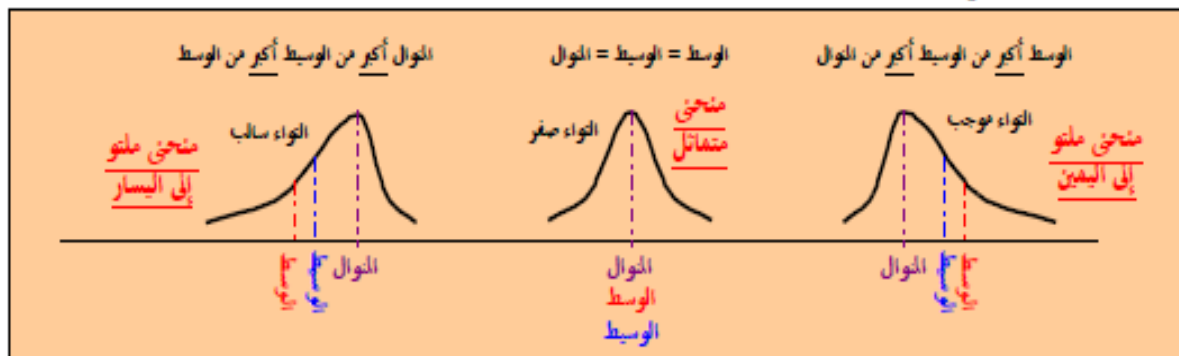
• الالتواء

• التفرطح

تنويه

تم عمل تعديل بسيط في محتوى المقرر المذكور سابقاً حيث سيتم تدريس هذا الباب بدلاً من الباب السادس [أساسيات نظرية الاحتمالات] وسيكون الباب السادس الجديد هو الباب الخامس المذكور في محتوى المقرر [نظرية الارتباط]

ذكرنا سابقاً [في الباب الثالث/المحاضرة التاسعة] أن المنحنيات التكرارية التي تظهر في الناحية العملية تأخذ أشكالاً مميزة منها الآتي :



تعريف الالتواء : على أنه درجة تماثل أو البعد عن التماثل لتوزيع ما .

- فإذا كان المنحنى له ذيل أكبر إلى يمين النهاية العظمى للمنحنى عنه إلى يسارها يُسمى التوزيع **ملتوي إلى اليمين** [أو موجب الالتواء] وعندئذ يقع الوسط الحسابي يمين المتوال [أي الوسط يكون أكبر من المتوال] .
- وإذا كان المنحنى له ذيل أكبر إلى يسار النهاية العظمى للمنحنى عنه إلى يمينها يُسمى التوزيع **ملتوي إلى اليسار** [أو سالب الالتواء] وعندئذ يقع الوسط الحسابي يسار المتوال [أي المتوال يكون أكبر من الوسط] .

ويُقاس الالتواء بعدة مقاييس [كل منها يُسمى بـ **معامل الالتواء**] منها :

ويُستخدم المعامل المناسب طبقاً للمعلومات المتوفرة عن التوزيع	$\text{معامل بيرسون الأول للالتواء} = \frac{\text{الوسط} - \text{المتوال}}{\text{الانحراف المعياري}}$
تُستخدم إذا علمنا الوسط الحسابي والمتوال (ويكون وحيداً) وكذلك الانحراف المعياري	$\text{معامل بيرسون الثاني للالتواء} = \frac{3(\text{الوسط} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}}$
تُستخدم إذا علمنا الوسط الحسابي والوسيط وكذلك الانحراف المعياري	$\text{معامل الالتواء الربيعي} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$
تُستخدم إذا علمنا الربيعات الأول والثالث وأيضاً الربيع الثاني (الوسيط)	$\text{معامل الالتواء المئيني} = \frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}}$
تُستخدم إذا علمنا المئينات العاشر والتسعين وأيضاً المئين الخمسين (الوسيط)	$P_{50} = M = Q_2$

كما يتضح من المثال التالي

تذكر أن : المئين الخمسون الوسيط الربيع الثاني



مثال : في كل حالة من الحالات التالية احسب معامل الالتواء المناسب للتوزيع المعطى بياناته مع توضيح نوع الالتواء (الليمين/اليسار) : (أ) الوسط الحسابي $\bar{x} = 80$ ، المتوال $\hat{x} = 82$ ، الانحراف المعياري $s = 20$

(ب) الوسط الحسابي $\bar{x} = 80$ ، الوسيط $M = 79$ ، الانحراف المعياري $s = 10$

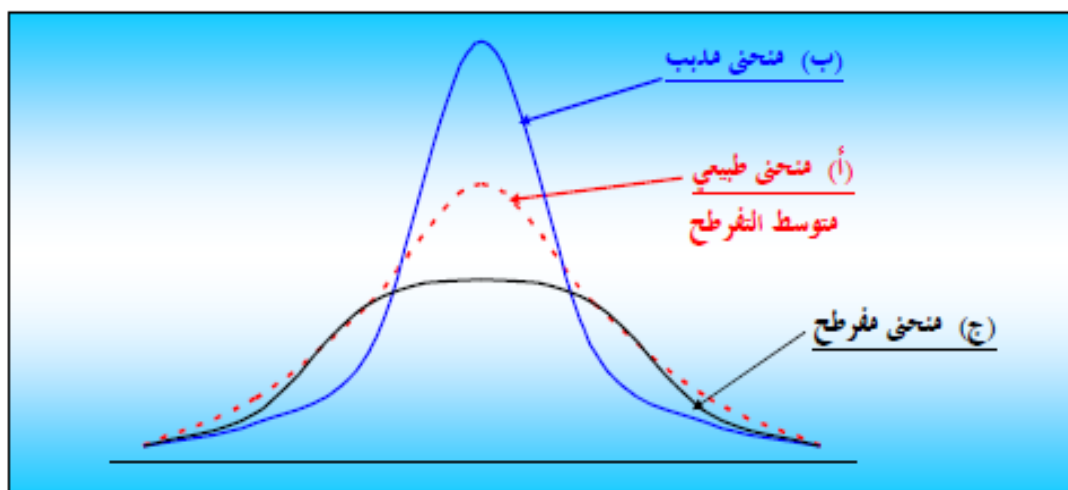
(ج) الربع الأول $Q_1 = 68$ ، الوسيط $M = 79$ ، الربع الثالث $Q_3 = 91$

(د) المئين العاشر $P_{10} = 58$ ، الوسيط $M = 79$ ، المئين التسعون $P_{90} = 99$

(د) هنا نستخدم معامل الالتواء المئيني نظراً لمعرفتنا لكل من المئينات العاشر والخمسين (الوسيط) والتسعين $P_{10} = 58$ ، $P_{90} = 99$ $P_{50} = M = 79$ إذن معامل الالتواء يساوي $\frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}} = \frac{99 - 2 \times 79 + 58}{99 - 58} = \frac{-1}{41} = -0.02$ التواء سالب (ملتو لليسار)	(ج) هنا نستخدم معامل الالتواء الربيعي نظراً لمعرفتنا لكل من الربيعات الأول والثاني (الوسيط) والثالث $Q_1 = 68$ ، $Q_3 = 91$ $Q_2 = M = 79$ إذن معامل الالتواء يساوي $\frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \frac{91 - 2 \times 79 + 68}{91 - 68} = \frac{1}{23} = 0.04$ التواء موجب (ملتو لليمين)	(ب) هنا نستخدم معامل بيرسون الثاني للالتواء نظراً لمعرفتنا لكل من الوسط والوسيط والانحراف المعياري $\bar{x} = 80$ ، $M = 79$ $s = 10$ إذن معامل الالتواء يساوي $\frac{3(\bar{x} - M)}{s} = \frac{3(80 - 79)}{10} = \frac{3}{10} = 0.3$ التواء موجب (ملتو لليمين)	(أ) هنا نستخدم معامل بيرسون الأول للالتواء نظراً لمعرفتنا لكل من الوسط والمتوال والانحراف المعياري $\bar{x} = 80$ ، $\hat{x} = 82$ $s = 20$ إذن معامل الالتواء يساوي $\frac{\bar{x} - \hat{x}}{s} = \frac{80 - 82}{20} = \frac{-2}{20} = -0.1$ التواء سالب (ملتو لليسار)
---	--	--	--



تعريف التفرطح : يُقصد بالتفرطح درجة تدبب (الارتفاع أو الانخفاض) في قمة المنحنى مقارنةً بقمة منحنى التوزيع الطبيعي الذي يُعد متوسط التفرطح



- فإذا كانت قمة المنحنى أعلى من مثيلتها في التوزيع الطبيعي يُسمى المنحنى **مدبب**
- وإذا كانت قمة المنحنى أدنى من مثيلتها في التوزيع الطبيعي يُسمى المنحنى **مفرطح** [تكون قمته مسطحة لحد ما]
- أما إذا كانت القمة ليست مدببة أو مسطحة [أي قريبة من المنحنى الطبيعي] يُسمى المنحنى **متوسط التفرطح**

ويُقاس تفرطح أي توزيع بعدة مقاييس ، أحد هذه المقاييس يعتمد على الربيعات والمئينات ويُسمى بـ **معامل التفرطح المئيني** ويُعطى بـ :

$$\text{معامل التفرطح المئيني} = \frac{\text{نصف المدى الربيعي}}{\text{الانحراف الربيعي}} = \frac{\text{المدى المئيني}}{\text{المدى المئيني}}$$

وهذا المعامل يساوي (تقريباً) **0.26** في حالة التوزيع الطبيعي ، وبالتالي إذا كان معامل التفرطح لأي توزيع :

- أكبر من 0.26 كان التوزيع **مدبباً**
- أقل من 0.26 كان التوزيع **مفرطحاً**

وإذا كان للتوزيع البيانات التالية : $Q_1 = 69$, $Q_3 = 91$, $P_{10} = 59$, $P_{90} = 94$

$$\text{المدى المئيني} : P_{90} - P_{10} = 94 - 59 = 35$$

$$\text{المدى الربيعي} : Q_3 - Q_1 = 91 - 69 = 22$$

$$\text{الانحراف الربيعي} = \text{نصف المدى الربيعي} = 11$$

$$\text{إذن معامل التفرطح المئيني} = \frac{\text{الانحراف الربيعي}}{\text{المدى المئيني}} = \frac{11}{35} = 0.31$$

أي أكبر من 0.26 وبالتالي يكون التوزيع **مدبباً**

فمثلاً إذا كان الانحراف الربيعي لتوزيع ما = 20 ، والمدى المئيني لهذا التوزيع = 100 فإن :

$$\text{معامل التفرطح المئيني} = \frac{\text{الانحراف الربيعي}}{\text{المدى المئيني}} = \frac{20}{100} = 0.2$$

أي أقل من 0.26 وبالتالي يكون التوزيع **مفرطحاً**



المحاضرة الثالثة عشرة

الباب السادس تحليل الارتباط

ز

عناصر المحاضرة

- مقدمة
- الارتباط الخطي وشكل الانتشار
- معامل الارتباط

المحاضرة الثالثة عشرة

مقدمة

مبادئ الإحصاء

في دراستنا للأبواب السابقة كنا نتعامل مع بيانات ذات متغير واحد [كنا نرمز له بالرمز x] ورأينا كيف نتعامل مع هذه البيانات من حيث :

استخراج مقاييس خاصة بها	تنظيمها وعرضها	جمع البيانات
• مقاييس تركة مركزية - الوسط الحسابي - الوسط - المتوسط • مقاييس تشتت - المدى - الانحراف المتوسط - الانحراف المعياري - الانحراف الربيعي - الانحراف الكثبي • مقاييس التواء - معامل بيرسون الأول للالتواء - معامل بيرسون الثاني للالتواء - معامل الالتواء الربيعي - معامل الالتواء الكثبي • مقاييس تفرطح - معامل التفرطح الكثبي	عن طريق الجداول أو بالرسم	

كل ذلك من خلال القسم الأول من علم الإحصاء وهو "علم الإحصاء الوصفي"

أما استخراج نتائج مما سبق أو توقع تنبؤات واتخاذ قرارات فيختص به الجزء الثاني من علم الإحصاء وهو "علم الإحصاء الاستقرائي" أو "علم الاستدلال الإحصائي" وهو ما لم ندرسه

أما في هذا الباب فسنعامل مع بيانات يمثلها متغير [ليكن x] وبيانات أخرى يمثلها متغير آخر [ليكن y] ونبحث في الآتي :

(١) هل هناك علاقة بين هاتين المجموعتين من البيانات أم لا :

فإذا كانت هناك علاقة نقول أن المتغيرين x, y مرتبطان وإلا فهما غير مرتبطين

(٢) مدى قوة هذه العلاقة [إن وُجدت] : هل هي قوية جداً أم متوسطة أم ضعيفة أم ضعيفة جداً

(٣) نوع هذه العلاقة [إن وُجدت] : هل هي طردية أم عكسية

العلاقة العكسية

كلما زادت قيمة x نقصت قيمة y

مثال : كلما زادت الكمية المعروضة في السوق من منتج معين قل سعر المنتج

العلاقة الطردية

كلما زادت قيمة x زادت أيضاً قيمة y

مثال : كلما زادت الإعلانات عن منتج معين زاد حجم المبيعات

وكأمثلة لهذا النوع من الدراسة إيجاد العلاقة بين :

• البيانات عن الكمية المعروضة في السوق من منتج معين وسعر هذه السلعة

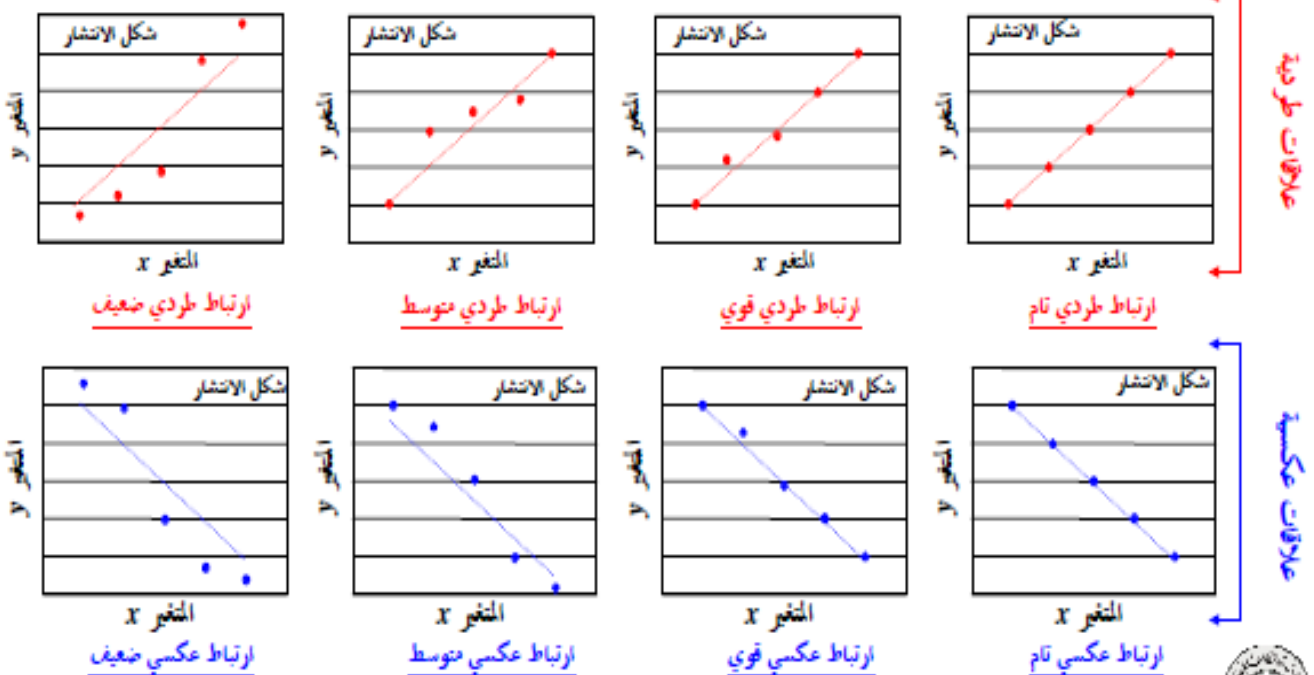
• البيانات عن حجم الإعلانات عن منتج معين وحجم المبيعات



King Faisal University [٥]

د. سعيد سيف الدين

نفرض أن لدينا بيانات $x_1, x_2, x_3, \dots$ عن متغير x وبياناتها $y_1, y_2, y_3, \dots$ عن متغير آخر y ، وعلى ورقة رسم بياني اخترنا محورين : الأفقي (ويخصص للمتغير x) والرأسي (ويخصص للمتغير y) وقمنا بتوقيع النقاط $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$ فإننا نحصل بذلك على ما يُسمى بـ "شكل الانتشار" لبيانات المتغيرين . ومن شكل الانتشار يمكن بمجرد النظر تحديد ما إذا كان هناك ارتباط بين المتغيرين x, y وتحديد نوع هذه العلاقة (إن وُجدت) وأيضاً (وإلى حد ما) مدى قوة هذا الارتباط .

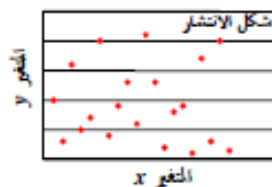


King Faisal University [٦]

د. سعيد سيف الدين



- فإذا أمكن رسم خط مستقيم يمر بجميع نقاط شكل الانتشار سُمي الارتباط "**ارتباط تام**" [طردي أو عكسي]
- وإذا أمكن رسم خط مستقيم بحيث تكون الانحرافات النقاط عنه ضعيفة جداً ، سُمي الارتباط "**ارتباط قوي**" [طردي أو عكسي]
- أما إذا زادت الانحرافات عن الخط المستقيم ولكن بشكل معقول ، سُمي الارتباط "**ارتباط متوسط**" [طردي أو عكسي]
- وإذا زادت الانحرافات عن الخط المستقيم بشكل كبير إلى حد ما ، سُمي الارتباط "**ارتباط ضعيف**" [طردي أو عكسي]



- أما إذا لم يكن هناك ما يشير إلى وجود علاقة بين المتغيرين ، فإننا نقول إنه لا يوجد ارتباط بينهما أو أنهم **غير مرتبطين**

ويُقاس الارتباط بين متغيرين x, y بما يُسمى بـ "**معامل الارتباط**" [وسنرمز له بالرمز r] وقيمته تكون محصورة بين -1 ، $+1$:

- فإذا كانت قيمته **موجبه** دل ذلك على أن الارتباط **طردي**
- وإذا كانت قيمته **سالبة** دل ذلك على أن الارتباط **عكسي**
- وإذا كانت قيمته **صفرًا** دل ذلك على عدم وجود ارتباط

هذا بخصوص نوع الارتباط
[طردي أم عكسي أم معدوم]



أما بخصوص قوة الارتباط فتحدده القيمة المطلقة لمعامل الارتباط كما يوضحه الجدول التالي :

قوة الارتباط	القيمة المطلقة لمعامل الارتباط
لا يوجد ارتباط	0
ارتباط ضعيف	$0 < r \leq 0.4$
ارتباط متوسط	$0.4 < r \leq 0.6$
ارتباط قوي	$0.6 < r < 1$
ارتباط تام	1
كلام فارغ	> 1

التسمي الوحيد أن هناك خطأ في الحسابات

ونعود ونذكر أن الإشارة **الموجبة** لمعامل الارتباط تعني أن الارتباط **طردي** ، والإشارة **السالبة** تعني أنه **عكسي** فمثلاً ، إذا كان :

- $r = 0.45$ ← فهذا يعني ارتباط طردي متوسط
- $r = 0.84$ ← فهذا يعني ارتباط طردي قوي
- $r = -0.9$ ← فهذا يعني ارتباط عكسي قوي
- $r = -0.22$ ← فهذا يعني ارتباط عكسي ضعيف
- $r = 1.3$ ← فهذا يعني خطأ في الحسابات
- $r = -1$ ← فهذا يعني ارتباط عكسي تام

كما سبق وذكرنا أنه يمكن قياس نوع وقوة الارتباط بما يُسمى بمعامل الارتباط ، وهناك أكثر من معامل للارتباط ولكننا سنكتفي بدراسة ما يُسمى بـ **"معامل سبيرمان للارتباط"** والذي يُسمى أيضاً بـ **"معامل ارتباط الرتب"** والذي يتحدد من خلال الخطوات التالية :

نفرض أن لدينا مجموعة من n من أزواج القيم $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$

1. قم بترتيب قيم x ترتيباً تصاعدياً ، ثم أعط لكل قيمة من القيم رتبة تبدأ من الرتبة 1 (للقيمة الصغرى) ، ثم 2 (لتي تليها) ، ... وهكذا حتى تصل إلى القيمة الأخيرة والتي تكون رتبها n [عدد القيم] .
2. بنفس الأسلوب ، قم بترتيب قيم y ترتيباً تصاعدياً ، ثم أعط لكل قيمة من القيم رتبة تبدأ من الرتبة 1 (للقيمة الصغرى) ، ثم 2 (لتي تليها) ، ... وهكذا حتى تصل إلى القيمة الأخيرة والتي تكون رتبها n [عدد القيم] .
3. احسب الفروقات D بين رتبة كل زوج من أزواج x, y .
4. احسب معامل الارتباط من العلاقة :

$$r = 1 - \frac{6 \times \sum D^2}{n \times (n^2 - 1)} = \text{معامل سبيرمان للارتباط أو معامل ارتباط الرتب}$$



مثال : الجدول التالي يوضح أداء ٦ طلاب في الاختبار النهائي لكل من مقرري مهارات التعليم والإحصاء ، المطلوب حساب معامل ارتباط الرتب بين درجات الطلاب الست في المقررين

مهارات التعليم	82	35	90	23	72	100
الإحصاء	91	54	100	17	81	76

عمود 1 قيم x	عمود 2 قيم y	عمود 3 رتب x	عمود 4 رتب y	عمود 5 فرق الرتب D	عمود 6 D^2
82	91	4	5	$4 - 5 = -1$	1
35	54	2	2	$2 - 2 = 0$	0
90	100	5	6	$5 - 6 = -1$	1
23	17	1	1	$1 - 1 = 0$	0
72	81	3	4	$3 - 4 = -1$	1
100	76	6	3	$6 - 3 = 3$	9
$n = 6$					$\sum D^2 = 12$

$$r = 1 - \frac{6 \times \sum D^2}{n \times (n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 12}{6 \times (36 - 1)} = 1 - \frac{72}{6 \times 35} = 1 - \frac{72}{210} = 1 - 0.34 = 0.66$$

وهذا يعني أن هناك ارتباط طردي قوي بين درجات الطلاب في المقررين

ليكن المتغير x هو درجات الطلاب في مقرر مهارات التعليم ، وليكن المتغير y هو درجات الطلاب في مقرر الإحصاء ، قم بتدوين درجات الطلاب في العمودين 1 ، 2 من الجدول المقابل :

• قم بترتيب قيم x تصاعدياً ثم أعط كل قيمة رتبها .

قيم x	23	35	72	82	90	100
---------	----	----	----	----	----	-----

x رتب 1 2 3 4 5 6

ثم دون هذه الرتب أمام القيم المناظرة لها [عمود 3] .

• قم بترتيب قيم y تصاعدياً ثم أعط كل قيمة رتبها .

قيم y	17	54	76	81	91	100
---------	----	----	----	----	----	-----

y رتب 1 2 3 4 5 6

ثم دون هذه الرتب أمام القيم المناظرة لها [عمود 4] .

• قم بحساب الفروقات بين رتب x, y [عمود 5]

• قم بحساب مربعات هذه الفروقات [عمود 6] ثم مجموعها

ثم احسب معامل الارتباط



بهذا نكون قد أنهينا المقرر [كمادة علمية] **”حمداً لله“** ويتبقى لنا أن ننبه لبعض الإرشادات الخاصة بالاختبار النهائي ، وهذا ما سنتناوله بإذن الله في المحاضرة المباشرة القادمة [المحاضرة المباشرة الثانية]

كما أود أن أنه أنه خلال أسبوع من هذه المحاضرة سيكون هناك تجميع للتعريف والقوانين [ملخص] لما تناولناه في هذا المقرر أرجو أن يكون معينا مفيدا للمراجعة ليلة الاختبار النهائي ، ويمكن أن تجده في مجلد فرعي من مجلد **”المحتوي“** للمقرر تحت عنوان **”المراجعة النهائية“**

لكنه سيكون مفيداً لمن اطلع على جميع المحاضرات أول بأول ولا يصلح لمذاكرة المقرر لأول مرة

كما سيكون هناك أيضاً [في نفس مجلد المراجعة النهائية] تدريبات على كل الأبواب التي تناولناها بأسلوب مشابه لمسائل الاختبار النهائي

وأرجو ألا يسألني أحد (من فضلكم) السؤال **”هل الاختبار حاجي من هذه التدريبات ؟“**

بالتوفيق والنجاح بإذن الله د. سعيد سيف الدين

