ملتقى جامعة الملك فيصل و جامعة الدمام

# ملزمة مقرر مبادئ الرياضيات

---

## المستوى الأول – عن بعد

**...أنا...**

**1437**

الملزمة تشمل :. المحتوى النصي + المحاضرات المباشرة + الواجبات + الاختبار الفصلي

مبادىء الرياضيات

## تلخيص المحاضرة الاولى

الباب الأول: مفاهيم اساسية في الجبر

### مجموعات الاعداد

يرمز للمجموعات عادة بالأحرف الكبيرة مثل : $X,Y,A,B$

والأشياء التي تتألف منها المجموعة تُسمى عناصر ويرمز للعناصر بالأحرف الصغيرة

مثل: $x,y,a,b$

إذا كان العنصر $x$ هو أحد عناصر المجموعة $A$ يقال: $x$ ينتمي إلى $A$

ونكتب : $x\in A$

أما إذا كان العنصر $y$ لا ينتمي للمجموعة $A$ فإننا نكتب: $x\notin A$

المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا يوجد بها أي عنصر ويرمز لها بالرمز : $\emptyset$أو{ }

يعبر عن المجموعة بإحدى الطريقتين التاليتين :

طريقة السرد ( الحصر )

مثال : 1- مجموعة الحروف المكونة لكلمة car هي : $X=\{c,a,r\}$

طريقة الوصف

مثال : 1- مجموعة الحروف المكونة لكلمة car هي حرف من حروف كلمة car {حرف من حروف كلمة

$X=\{x{:}x$ car

( المجموعة المنتهية وغير منتهية )

مثال: 1- $X=\{1,2,3,4\}$ مجموعة منتهية 2- $Y=\{1,3,5,7,\dots\}$ مجموعة غير منتهية

( المجموعة الجزئية )

مثال : إذا كانت: $X=\{a,b,c\},\ \ Y=\{a,b,c,d\},\ \ Z=\{a,c,f\ \}$ فإن : $X\subset Y,Z\not\subset Y$

ملاحظة (1) : المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من أي مجموعة .

( رتبة المجموعة )

رتبة المجموعة $X$ يرمز لها بالرمز $|x|$ ، وتعني عدد عناصر المجموعة .

مثال : إذا كانت $X= \{a,b,c,d,e\}$ فإن : $|X|=5$

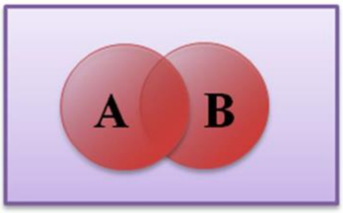
ملاحظة (2) : رتبة المجموعة الخالية تساوي صفر لخلوها من العناصر و بالتالي عدد عناصرها يساوي الصفر .

## العمليات على المجموعات

1- عملية اتحاد مجموعتين (Union)

اتحاد مجموعتين A وَ B هي أخذ جميع عناصر المجموعتين

ويرمز لها بالرمز A ∪ B وتعرف بـ $A \cup B= \{x:x \in A \text{ or } x \in B\}$



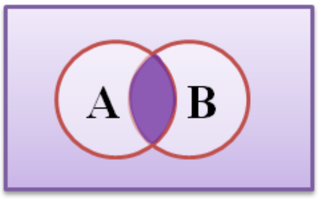
مثال (8) :

إذا كانت : $A = \{2,3,4,5\}$ و $B = \{3,5,7\}$

فإن $A \cup B= \{2,3,4,5\} \cup \{3,5,7\} = \{2,3,4,5,7\}$

1-عملية تقاطع مجموعتين (Intersection)

تقاطع مجموعتين A وَ B هي إيجاد العناصر المشتركة بينهما , ويرمز لها بالرمز A ∩ B وتعرف بـ $A \cap B = \{x:x \in A , x \in B\}$



مثال (13) :

إذا كانت : $A = \{a,b,c,d\}$ , $B = \{b,d,e,f\}$ , $C = \{e,f,g,h\}$

$A \cap C= \{a,b,c,d\} \cap \{e,f,g,h\} =\emptyset$

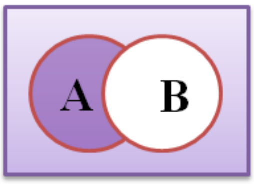
$A\cap B = \{a,b,c,d\} \cap \{b,d,e,f\} =\{ b,d \}$

$B\cap C = \{b,d,e,f\} \cap \{e,f,g,h\} =\{e,f\}$

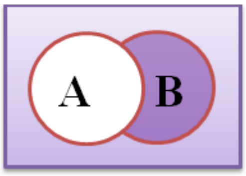
3-عملية طرح مجموعة من أخرى ( Difference)

( الفرق بين مجموعتين A وَ B )

1 ) - $A - B =\{x:x \in A , x\notin B\}$



2) -  $B - A = \{x : x \in B \ , \ x \notin A\}$



ملاحظة (4): $A - B \neq B - A$

مثال :

إذا كانت $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{1,3,5,7\}$

فإن : $A - B = \{1,2,3,4,5,6\} - \{1,3,5,7\} = \{2,4,6\}$

$B - A = \{1,3,5,7\} - \{1,2,3,4,5,6\} = \{7\}$

عملية الإتمام (Universal)

(المجموعة الشاملة ) :تحتوي على جميع العناصر , ويرمز لها بالرمز U

مثال (16): إذا كانت

A مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية .

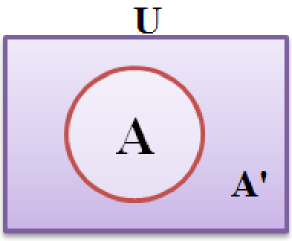
B مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية .

فإن المجموعة الشاملة U هي مجموعة الأعداد الطبيعية.

(عملية الإتمام ):

'A هي المجموعة المتممة للمجموعة A :

$A' = U - A = \{x : x \in U \ , \ x \notin A\}$



مثال (17) : بالعودة للمثال (16) فإن

مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية $U - A = A' = B$

وأيضاً مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية $U - B = B' = A$

**ملاحظة (5):**

١) $A \cup A' = U$

٢) $A \cap A' = \phi$

٣) $A \cup U = U$

٤) $A \cap U = A$

مثال ( 18 ) :

إذا كانت $A = \{3,4,5,6\}$ , $U = \{1,2,3,\dots 10\}$. فإن $A'$.

$A' = U - A = \{1,2,7,8,9,10\}$

## المجموعات العددية

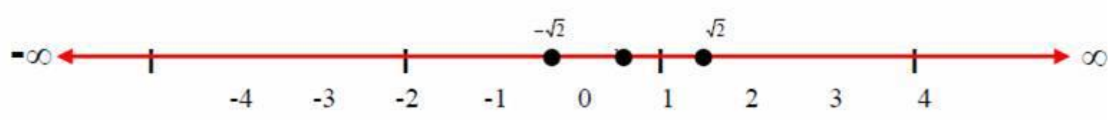
1. مجموعة الأعداد الطبيعية: $N = \{1,2,3,4,\dots.\}$
2. مجموعة الأعداد الكلية: $W = \{0,1,2,3,4,\dots\}$ أي أن $W = N \cup \{0\}$
3. مجموعة الأعداد الصحيحة : $Z = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\} = \{0,\pm\ ,1\pm,2,\pm 3,\dots.\}$
4. مجموعة الأعداد القياسية ( النسبية أو الكسرية ):

يمكن كتابتها على صورة كسر : $Q = \{x:x = \frac{a}{b}\ a , b\in Z ,\ b\neq 0\}$

التمثيل العشري للأعداد القياسية إما أن يكون منتهي أو أن يكون غير منتهي ومتكرراً.

5. مجموعة الأعداد غير القياسية ( غير النسبية ـ غير الكسرية ) $\overline{Q}$ :
   لا يمكن كتابتها على صورة كسر مثل :
   $$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \frac{1}{\sqrt{7}}, e, \pi$$
   التمثيل العشري للأعداد غير القياسية غير منتهي وغير متكرر.
6. مجموعة الأعداد الحقيقية R: وهي مجموعة جميع الأعداد الكسرية وغير الكسرية.

## خط الأعداد الحقيقية

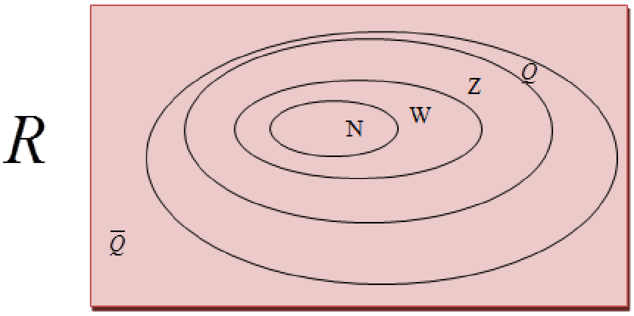


**ملاحظة (8):**

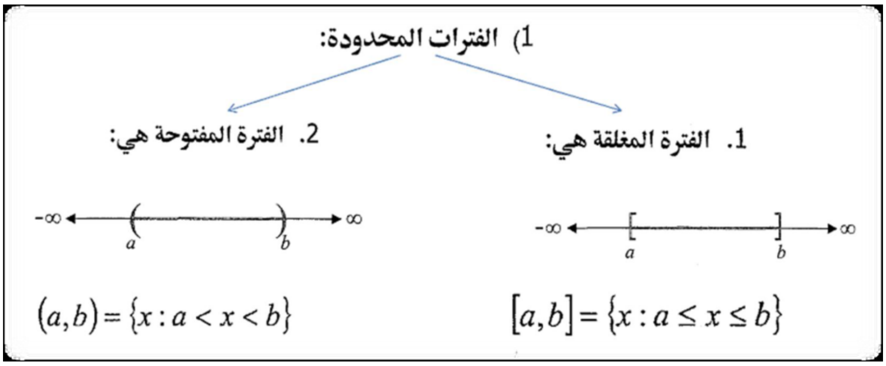
١) $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$ .

٢) $Q \cup \overline{Q} = R$ .

٣) $Q \cap \overline{Q} = \phi$ .



## الفترات العددية : 1) الفترات المحدودة



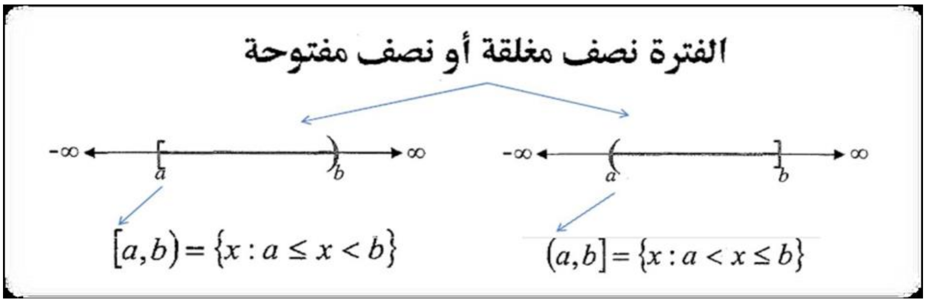
1) الفترات المحدودة:

1. الفترة المغلقة هي:

$[a,b]=\{x : a \le x \le b\}$

2. الفترة المفتوحة هي:

$(a,b)=\{x : a < x < b\}$



**الفترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة**

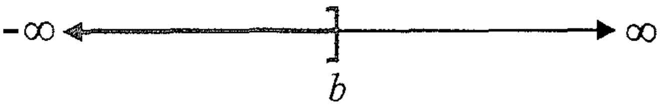
$(a,b]=\{x : a < x \le b\}$

$[a,b)=\{x : a \le x < b\}$

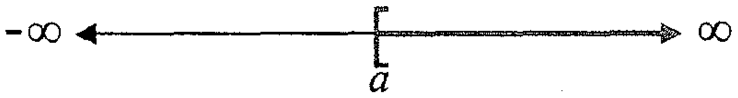
2) الفترات العددية غير المحدودة :

1-الفترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة

$$(-\infty,b]=\{x : x \le b\}$$

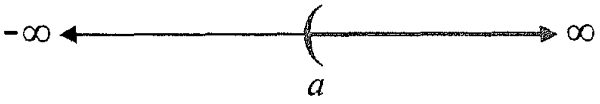


$$[a,\infty)=\{x : x \ge a\}$$

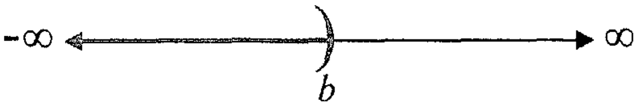


2- الفترة المفتوحة

$$(a,\infty)=\{x:x>a\}$$



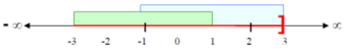
$$(-\infty,b)=\{x:x<b\}$$



**فترة جميع الأعداد الحقيقة $R=(-\infty,\infty)$ وهي فترة مفتوحة.**

مثال : عبر عن التالي :على خط الأعداد وصورة فترة وصور مجموعة

$(-1,3)\cup[-3,1]$



1) على خط الأعداد الحقيقية :

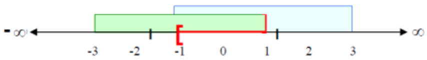
$(-1,3)\cup[-3,1]=[-3,3)$

$\{x:-3\le x<3\}$

2) على صورة فترة :

3) على صورة مجموعة :

$(-1,3)\cap[-3,1]$



$(-1,3)\cap[-3,1]=(-1,1]$

$\{x:-1<x\le1\}$

## القيمة المطلقة

$$y = | x | = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

مثال (24):

$$|4| = 4, \qquad |-6| = 6$$

## المسافة بين عددين على خط الأعداد:

$$d(x, y) = |x - y|$$

ملاحظة (9):

المسافة بين $x$ وَ $y$ هي نفس المسافة بين $y$ وَ $x$ أي أن:

$$|x - y| = |y - x| \quad \text{أو} \quad d(x, y) = d(y, x)$$

مثال(25): أوجد المسافة بين $-1$ ، $2$ .

$$d(-1, 2) = |-1 - 2| = |-3| = 3$$

## خصائص القيمة المطلقة

ليكن $x$ وَ $y$ عددين حقيقيين فإن :

1) $|x| \geq 0$

2) $|-x| = |x|$

3) $|xy| = |x| \ |y|$

4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ ، $y \neq 0$

5) $|x + y| \leq |x| + |y|$

بالتوفيق لكم جميعاً ( أرجو التنبيه إذا رأيتم أخطاء هنا )...

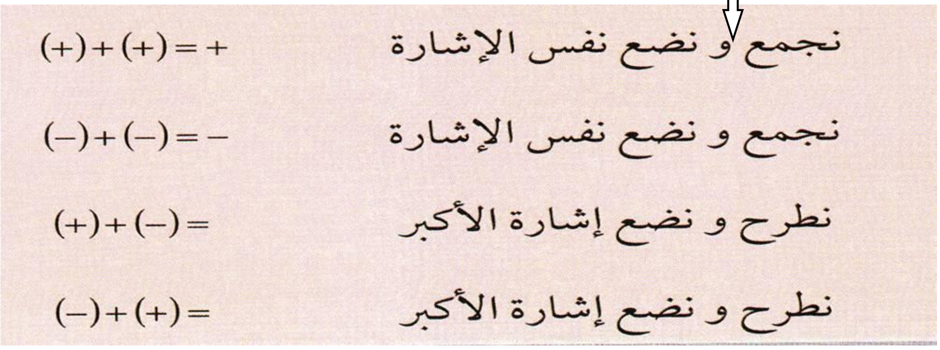
... أنا ...

## الفصل الثاني : العمليات الجبرية

### العمليات الجبرية

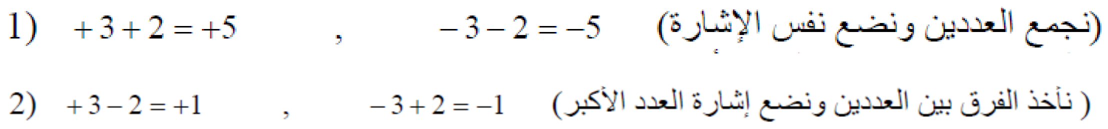
الجمع والطرح الجبري

قاعدة الإشارات



| | |
|---|---|
| نجمع و نضع نفس الإشارة | $(+)+(+)=+$ |
| نجمع و نضع نفس الإشارة | $(-)+(-)=-$ |
| نطرح و نضع إشارة الأكبر | $(+)+(-)=$ |
| نطرح و نضع إشارة الأكبر | $(-)+(+)=$ |

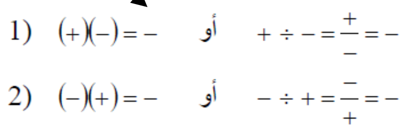
مثال :



(نجمع العددين ونضع نفس الإشارة) $-3-2=-5$ , 1) $+3+2=+5$

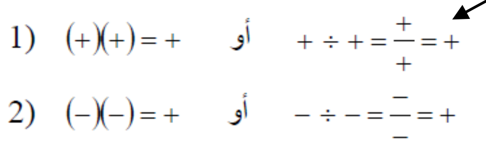
( نأخذ الفرق بين العددين ونضع إشارة العدد الأكبر) $-3+2=-1$ , 2) $+3-2=+1$

الضرب الجبري قاعدة الإشارات القسمة الجبرية



1) $(+)(-)=-$ أو $+\div-=\frac{+}{-}=-$

2) $(-)(+)=-$ أو $-\div+=\frac{-}{+}=-$



1) $(+)(+)=+$ أو $+\div+=\frac{+}{+}=+$

2) $(-)(-)=+$ أو $-\div-=\frac{-}{-}=+$

مثال : $(-3)(4)= -12$ , $(3)(-4)=-12$ , $(-3)(-4)=12$ , $(3)(4)=12$

$\frac{-20}{5}=-4$ $\frac{20}{-5}=-4$ $\frac{-20}{-5}=4$ $\frac{20}{5}=4$

### ترتيب إجراء العمليات الجبرية

1- إذا احتوت العملية الجبرية على الجمع الجبري فقط :
فإننا نبدأ من اليسار إلى اليمين .

اتجاه التنفيذ

$$\overbrace{12-3}+4-2=\overbrace{9+4}-2=\underbrace{13-2}=11$$

أو نجمع الأعداد الموجبة معاً بإشارة موجبة, ونجمع الأعداد السالبة معاً بإشارة سالبة .

$$12-3+4-2=16-5=11$$

2 – إذا احتوت العملية الجبرية على الضرب الجبري فقط :
نجري العملية بالترتيب حسب ظهورها من اليسار إلى اليمين .

$$15 \div 5 \times 4 \div 6 = 3 \times 4 \div 6 = 12 \div 6 = 2$$

3 – إذا احتوت العملية الجبرية على عمليتي الضرب الجبري و الجمع الجبري فإننا نجري عملية الضرب اولا ثم الجمع .

$$6+2x4-15+5=6+8-3=14-3=11$$

4 – إذا احتوت العملية الجبرية على أقواس فإننا نجري العملية داخل الأقواس الصغيرة ( )اولا,ثم الأقواس المتوسطة { }, ثم الأقواس الكبيرة [ ] ابتداء من الداخل إلى الخارج .

$$[-40 \div \{ (12 \div 4)x\ 10 +10\} \div (5 \div -5)] + 4 = [-40 \div \{ (3)\ x\ 10 +10\} \div (-1)] + 4$$

$$= [-40 \div \{ 3\ x\ 10 +10\} \div (-1)] + 4 = = [-40 \div \{30 +10\} \div (-1)] + 4$$

$$= [-40 \div \{ 40\} \div (-1)] + 4 = [-1 \div (-1)] + 4=1 + 4 = 5$$

## الكســـور

الكسر عبارة عن مقدار مكون من بسط ومقام مثلاً

$$\frac{5}{7} , \frac{1}{2} , \frac{3}{4} .$$

**تمثل الأجزاء الملونة ثلاثة أخماس الشكل**

وتكتب رياضياً $\frac{3}{5} = \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}} = \frac{\text{عدد الأجزاء الملونة}}{\text{عدد جميع الأجزاء}}$

## تكافؤ الكسور

نقول عن كسرين أنهما متكافئان عندما يمثلان الجزء نفسه من الشكل.

$\frac{8}{16}$

$\frac{4}{8}$

إيجاد الكسور المتكافئة:

١) لإيجاد كسور مكافئة لكسر ما نضرب بسطه ومقامه بأي عدد غير الصفر.

### مثال (10):

الكسور المكافئة للكسر $\frac{2}{3}$ يمكن إيجادها كالتالي:

$$\frac{2}{3}=\frac{(2)(3)}{(3)(3)}=\frac{6}{9} \qquad \frac{2}{3}=\frac{(2)(2)}{(3)(2)}=\frac{4}{6}$$

2) لإيجاد كسور مكافئة لكسر ما نقسم بسطه ومقامه على عدد يقبلان القسمة عليه غير الصفر.

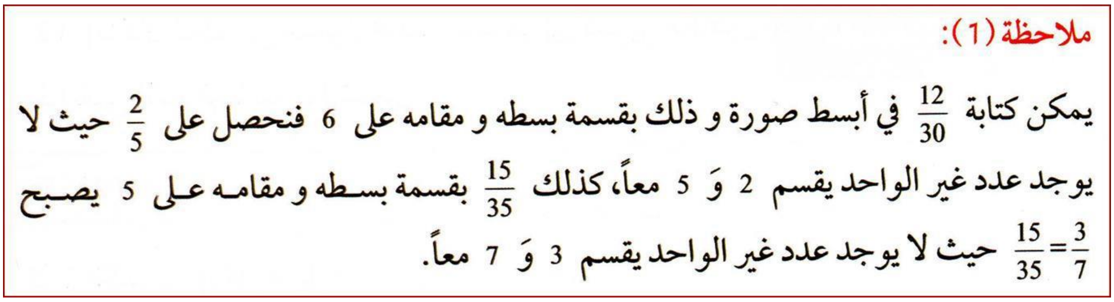
$$\frac{4}{8}=\frac{4\div 2}{8\div 2}=\frac{2}{4} \quad \text{و} \quad \frac{4}{8}=\frac{4\div 4}{8\div 4}=\frac{1}{2}$$

**تبسيط الكسور**

**يكون الكسر مكتوباً بأبسط شكل (صورة )عندما لا يوجد عدد غير الواحد يقسم بسطه ومقامه معاً .**

1) الكسر $\frac{1}{2}$ مكتوب بأبسط شكل لأنه لا يوجد عدد غير الواحد يقسم 1 و 2 معاً.

2) الكسر $\frac{4}{6}$ ليس مكتوباً بأبسط شكل لأن العدد 2 يقسم العدد 4 و العدد 6 أيضاً.

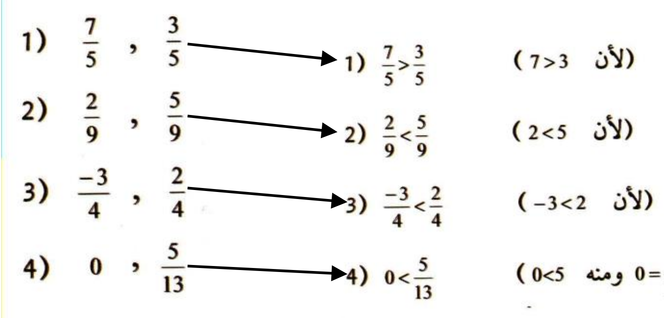


**ملاحظة (1):**

يمكن كتابة $\frac{12}{30}$ في أبسط صورة و ذلك بقسمة بسطه و مقامه على 6 فنحصل على $\frac{2}{5}$ حيث لا يوجد عدد غير الواحد يقسم 2 وَ 5 معاً، كذلك $\frac{15}{35}$ بقسمة بسطه و مقامه على 5 يصبح $\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$ حيث لا يوجد عدد غير الواحد يقسم 3 وَ 7 معاً.

## مقارنة الكسور

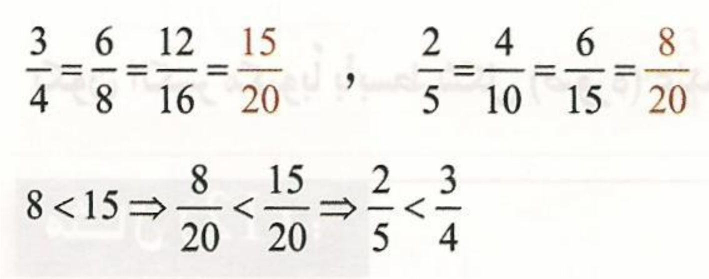
1) للمقارنة بين كسرين لهما المقام نفسه نقارن بين بسطيهما ويكون الكسر الأكبر هو الكسر ذو البسط الأكبر.



1) $\frac{7}{5}$ , $\frac{3}{5}$ → 1) $\frac{7}{5}>\frac{3}{5}$ (لأن $7>3$)
2) $\frac{2}{9}$ , $\frac{5}{9}$ → 2) $\frac{2}{9}<\frac{5}{9}$ (لأن $2<5$)
3) $\frac{-3}{4}$ , $\frac{2}{4}$ → 3) $\frac{-3}{4}<\frac{2}{4}$ (لأن $-3<2$)
4) $0$ , $\frac{5}{13}$ → 4) $0<\frac{5}{13}$ (لأن $0=\frac{0}{13}$ ومنه $0<5$)

أيهما أكبر

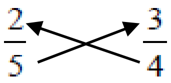
$\frac{3}{4}$ أو $\frac{2}{5}$



$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20} \quad , \quad \frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}=\frac{8}{20}$$

$$8<15 \Rightarrow \frac{8}{20}<\frac{15}{20} \Rightarrow \frac{2}{5}<\frac{3}{4}$$

طريقة سهلة سريعة

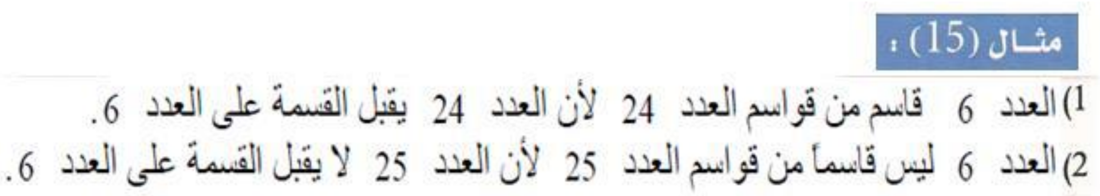


⇒ 8 ‹ 15

## قواسم العدد

عندما نكتب عدد كحاصل ضرب عدة أعداد نقول إننا حللنا هذا العدد إلى عوامل.

عوامل العدد: هي الأعداد التي تقسمه دون باق وتسمى قواسم العدد.



مثال (15) :

1) العدد 6 قاسم من قواسم العدد 24 لأن العدد 24 يقبل القسمة على العدد 6.

2) العدد 6 ليس قاسماً من قواسم العدد 25 لأن العدد 25 لا يقبل القسمة على العدد 6.

## القاسم المشترك الأكبر لعددين

القواسم المشتركة لعددين هي الإعداد التي يقسم كل واحد منها هذين العددين، وأكبرها يسمى القاسم المشترك الاكبر ( ق.م.ك)

مثال : أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 8 و12

قواسم العدد 8 هي 1 ، 2 ، 4 ،8

وقواسم العدد 12 هي 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ،12

القواسم المشتركة بينهما هي 1 ، 2 ، 4 اما القاسم المشترك الأكبر فهو 4

المشتركة الأولية العوامل قوى ضرب حاصل هو لعددين الأكبر المشترك القاسم فقط والتي لها الأس الأصغر.

مثال : اوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و 30

18=2×3×3=(2) $(3^2)$ و 30=(2) (3) (5) إذا ق . م .ك.=(2) (3) = 6

ملاحظة :

1) لتبسيط كسر نقسم كلا من بسطه ومقامه على قاسم مشترك لهما.
2) لتبسيط كسر لأبسط شكل( صورة )نقسم كلا من بسطه ومقامه على القاسم المشترك الأكبر لهما.

مثال : بسط الكسر $\frac{55}{100}$ إلى أبسط صورة . $\frac{55}{100}=\frac{55\div5}{100\div5}=\frac{11}{20}$

ق . م . ك . للعددين55 و *100* هو *5*:

مضاعفات العدد هو ناتج ضرب عدد في احد عناصر الأعداد الطبيعية 1 ،2 ، 3 ، ...

مثال :المضاعفات الأربعة الأولى للعدد 5 هي :

5×1 = 5 ، 5×2 = 10 ، 5×4 = 20 .

ملاحظه :لكل عددين مضاعفات مشتركه كثيرة

مثال : مضاعفات العددين

2 هي 2 ، 4، 6 ، 8 ، 10 ، 12 ، 14 ، 16 ، 18 ، ..

3 هي 3 ، 6 ، 9 ، 12 ، 15 ، 18 ، ...

المضاعفات المشتركة للعددين 2 و 3 هي 6 و 12 و 18 و ...

**المضاعف المشترك الأصغر** لعددين هو اصغر مضاعف مشترك لهما ويرمز له م.م.ص.

ملاحظه :للحصول على م .م .ص. لعددين، نكتب سلسلة مضاعفات كل منهما

ثم نعين المضاعف المشترك الأصغر م .م .ص.

مثال : اوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 2 و 3

من المثال السابق، المضاعفات المشتركة للعددين 2 و 3 هي 6 و 12 و 18 و...

إذا فان المضاعف المشترك الأصغر هو أصغرهم وهو 6

ملاحظه :المضاعف المشترك الأصغر لعددين هو حاصل ضرب قوى العوامل الأولية للعددين التي لها الاس الأكبر .

مثال : اوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 14 و 36

$7 \times 2 = 14$

$(^{2}3) \times (^{2}2) = 36$

المضاعف المشترك الأصغر هو $7 \times (^{2}2) \times (^{2}3) = 252$

ملاحظة : المضاعف المشترك الأصغر لعددين أوليين هو حاصل ضربهما.

مثال :اوجد المضاعف المشترك الأصغر بين العددين5, 7 ؟

لاحظ أن العددين أولين بالتالي م .م .أ. = 7 × 5 = 35

**جمع الكسور**: عند جمع كسرين لهما المقام نفسه، فان الناتج هو كسر مقامه يساوي مقام الكسرين وبسطه يساوي **مجموع** بسطيهما .

مثال:

$$\frac{3}{5} + \frac{6}{5} = \frac{3+6}{5} = \frac{9}{5}$$

**طرح الكسور**: عند جمع كسرين لهما المقام نفسه، فان الناتج هو كسر مقامه يساوي مقام الكسرين وبسطه يساوي **الفرق بين** بسطيهما.

مثال: $\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5-3}{7} = \frac{2}{7}$

ملاحظه:

1) عند جمع( طرح )كسرين مختلفي المقام، نقوم بتحويلهما إلى كسرين مكافئين لهما، على أن يكون مقامهما مشتركا، ثم نجمع (نطرح ) الكسرين الناتجين

2) لإيجاد ناتج جمع الكسرين (او طرحهما )نوحد المقامات بإيجاد المضاعف المشترك الأصغر لهما واتخاذه مقاما مشتركا للكسرين .

مثال:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{(3)(2)}{(2)(2)}=\frac{1}{4}+\frac{6}{4}=\frac{1+6}{4}=\frac{7}{4}$$

مثال:

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right)-\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{2}{4}-\frac{3}{4}=\frac{2-3}{4}=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}$$

## قوانين جبريه لجمع وطرح الكسور

$$1)\ \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \Longrightarrow 1)\ \frac{7}{3}-\frac{1}{2}=\frac{(7)(2)-(1)(3)}{(3)(2)}=\frac{14-3}{6}=\frac{11}{6}$$

$$2)\ \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd} \Longrightarrow 2)\ \frac{5}{7}+\frac{3}{2}=\frac{(5)(2)+(3)(7)}{(7)(2)}=\frac{10+21}{14}=\frac{31}{14}$$

## ضرب وقسمة الكسور

1) حاصل ضرب كسرين هو كسر بسطه عبارة عن ضرب البسطين ومقامه عبارة عن ضرب المقامين

2) لقسمة كسرين فإننا نقوم بوضع الكسر الأول كما هو ونضربه في الكسر الثاني بعد ان نقلب الكسر الثاني( نضع البسط مقاما والمقام بسطا)

## قوانين جبريه لضرب وقسمة الكسور

ليكن a,b,c,d اعداد حقيقية غير صفرية فان:

$$1)\ \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \longrightarrow \frac{3}{5}\times\frac{-2}{7}=\frac{(3)(-2)}{(5)(7)}=-\frac{6}{35}$$

$$2)\ \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc} \longrightarrow 3\div\frac{2}{5}=\frac{3}{1}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{1}\times\frac{5}{2}=\frac{3\times5}{1\times2}=\frac{15}{2}$$

$$3)\ c\times\frac{a}{b}=\frac{ca}{b} \longrightarrow 5\times\frac{3}{7}=\frac{5}{1}\times\frac{3}{7}=\frac{5\times3}{1\times7}=\frac{15}{7}$$

ملاحظه ( أرجو التنبيه إذا كان فيه خطأ )

بالتوفيق لكم جميعاً ... أنا ...

## مبادىء الرياضيات : المحاضرة الثالثة

### الفصل الثاني : العمليات الجبرية

سنتعرف في هذه المحاضرة على كل من المفاهيم التالية :

1 – الأسس والجذور . 2 – اللوغاريتمات .

1) – مفهوم الأسس :

تعريف : اذا كان x عدد حقيقي مرفوع للقوة n (عدد صحيح ) فأن

$$x^{n}= \underbrace{x.x.x.....x}_{\text{من المرات } n}$$

فمثلاً نقول بأن : $5^{3}=5\times5\times5.$ $x^{4}= x .x.x.x.$

و نلاحظ دائماً بأن أي عدد مرفوع للأسس صفر يساوي 1 .

نقول بأن : $x^{o}= 1$

و كذلك في حال وجود أس سالب , فأنه يمكن تحويله إلى أس موجب حسب القاعدة التالية : $x^{-1} = \frac{1}{x}$ .

و بشكل عام : $x^{-n} = \frac{1}{x^{n}}$ أما إذا كان $\frac{x^{-n}}{x^{-M}} = \frac{y^{M}}{x^{n}}$

أمثلة : بسط المقادير التالية: .

1)- $3^{-4} = ⅓^{4} = {}^{1}/_{3\times3\times3\times3} = {}^{1}/_{81}$

2)- $( {}^{2}/_{3})^{-2} = {}^{2^{-2}}/_{3^{-2}} = {}^{3^{2}}/_{2^{2}} = {}^{9}/_{4}$ .

خواص الأسس : إذا كان $x , y \in R$, و كان $n, m \in Z$ فإن

1)- $x^{n} * x^{m} = x^{n+m}$

مثال :

$x^{3} * x^{4} = x^{3+4} = x^{7}$

2)- $x^{-5} * x^{-2} = x^{-5+-2} = x^{-7} = \frac{1}{x\ 7}$

3)- $x^{2} * y^{-2} = x^{2} * \frac{1}{y^{2}} = \frac{x^{2}}{y^{2}}$

2- إذا كان $\frac{x^n}{x^M} = x^{n-M}$

فمثلاً : $\frac{x^3}{x\,5} = x^{3-5} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

إعادة كتابة هذا المقدار على شكل حاصل ضرب . $\longrightarrow \frac{x^3}{x\,5} = \frac{x*x*x}{x*x*x*x*x} = \frac{1}{x*x} = \frac{1}{x^2}$

مثال : بسط المقدار التالي :

1)- $x^{-3}/x^{-5} = x^{-3-(-5)} = x^{-3+5} = x^2$ .

2)- $x^{-3}/x5 = X^{-3-5} = x^{-8} = \frac{1}{x\,8}$ .

3 – إن قيمة المقدار : . $(x^n)^m = x^{nm}$

مثال / اوجد قيمة : 1)- $(x^2)^3 = x^{2*3} = x^6$ .

2)- $(x^{-2})^3 = x^{-2*3} = X^{-6} = \frac{1}{x\,6}$ .

3)- $(x^{-2})^{-3} = x^{-2*-3} = x^6$ .

4 – قيمة المقدار : . $(x \times y)^n = x^n \times y^n$

مثال : اوجد قيمة ما يلي بأبسط صوره :

1)- $(5x)^2 = 5^2 \times x^2 = 25x^2$ .

2)- $(16/15)^{-2} = \frac{16^{-2}}{15^{-2}} = \frac{15^2}{16^2} = \frac{225}{256}$ .

أو يمكن الحل بصوره أخرى . $\longrightarrow (\frac{15}{16})^2 = \frac{15^2}{16^2} = \frac{225}{256}$

5 – قيمة المقدار : $(x/y)^n = x^n/y^n$

و بالتالي مثال على الخاصية الخامسة :

1 )- $(2/3)^{-3} = 2^{-3}/3^{-3} = 3^3/2^3 = 27/8$ .

2 )- $(2^3/x^2)^{-2} = (2^3)^{-2}/(x^2)^{-2} = 2^{-6}/x^{-4} = x^4/2\,6 = x^4/6\,4$ .

- الجذور :

تعريف : إذا كان كل من $x,y \in R$ فإن العدد x يسمى جذر n للعدد y إذا كان :

حيث n عدد صحيح , $x^n = y$

فمثلاً نقول بأن العدد 5 هو الجذر التربيعي للعدد 25

أما العدد 5 فهو الجذر التكعيبي ( الثالث ) للعدد 125

ونقول أن العدد 2 هو الجذر السادس للعدد 64 ⟵ 2×2×2×2×2×2 ⟶ 6 مرات

ونلاحظ في مفهوم الجذور على الأعداد الحقيقية الخواص التالية :

1- كل عدد موجب له جذران تربيعيان , احدهما موجب و الأخر سالب فمثلاً : $\sqrt{25} = \pm 5$ .

اما إذا كان العدد سالب , فليس له جذر تربيعي . ليس له جذر حقيقي ⟵ $\sqrt{-25}$

2- في حالة الجذر التكعيبي , فإن للعدد الموجب وكذلك السالب جذر واحد فقط يشبه إشارة العدد تحت الجذر التكعيبي .

فمثلاً : $\sqrt[3]{27} = 3$ أما $\sqrt[3]{27} = {}^-3$ ( ${}^-27 = {}^-3 \times {}^-3 \times {}^-3$ ) لأن

تعريف : الأسس الكسرية : إذا كان $n \geq 2$ , حيث n عدد صحيح , فإنه يمكن تعريف المقدار التالي :

(n )الجذر النوني للمتغير(x) ⟶ $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ ⟵ ألأس الكسرية

مثال : بسط كل من المقادير التالية بعد كتابتها على الصورة الجذرية :

1 – $(16)^{1/2} = \sqrt{16} = 2 \text{ or } {}^-2$ .

2 – $(27)^{-1/3} = \frac{1}{27^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = {}^1\!/_3$ .

3 – $(27)^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$ .

4 – $({}^1\!/_{25})^{1/2} = \sqrt[1]{25} = {}^1\!/_5 \text{ or } {}^1\!/_{-5}$ .

5 - $({}^-64)^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{-64}} = {}^1\!/_{-4}$ .

بعض من القواعد الخاصة بالأسس : إذا كان كل من $x,y \in R^+$ , ويفرض إن $n,m \in Z$

فأن :

1)- $\sqrt[n]{x^{n}} = x^{n/n} = x$ .

2)- $\sqrt[n]{x^{M}} = X^{m/n} \longrightarrow (x^m)^{1/n} = x^{m/n}$

3)- $\sqrt[n]{x\,y} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = X^{1/n} \times y^{1/n}$

4)- $\sqrt[n]{x/y} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \frac{x^{1/n}}{y^{1/n}} = \quad , y \neq 0$ .

مثال : اكتب كلاً من المقادير التالية على الصورة الجذرية بأبسط صورة :

1)- $\sqrt[5]{x\ 5} = x^{5/5} = x$ .

2)- $\sqrt[4]{x^{2}} = x^{2/4} = x^{1/2}$ . $\sqrt{x}$ .

3)- $\sqrt[3]{x\ 6\ y\ 6} = (x^{6})^{1/3} \times (y^{6})^{1/3}$ .

$= x\ 6/3 \times y\ 6/3 = x^2\, y^2$ .

4)- $\sqrt[3]{-8/27x^3} = \sqrt[3]{-8/27} \times \sqrt[3]{x^{3}} = {}^{-2}\!/_3 \times X^{3/3} = {}^{-2}\!/_3\ X$ .

تمرين : اوجد قيمة كل مما يلي بأبسط صورة :

1)- $({}^{1}/_{2})^{-3} \times ({}^{1}/_{3})^{-2} = ({}^{2}/_{1})^{3} \times ({}^{3}/_{1})^{2} = 2^{3} \times 3^{2} = 8\times9= 72$ .

2)- $\sqrt[3]{\frac{125}{y^{3}}} \times \sqrt[4]{\frac{16}{x\,4}} = (\frac{125}{y^{3}})^{1/3} \times (\frac{16}{x\,4})^{1/4}$ .

$=\frac{(125)^{1/3}}{(y^{3})^{1/3}} \times \frac{(16)^{1/4}}{(x4)^{1/4}}$

$=\frac{\sqrt[3]{125}}{y} \times \frac{\sqrt[4]{16}}{x}$

$= {}^{5}/_{y} \times {}^{2}/_{x} = {}^{10}/_{x\,y}$

3)- $(x)^{o}+(9)^{1/2} - (8)^{-1/3} = 1+\sqrt{9} - {}^{1}/_{\sqrt[3]{8}}$

$= 1\pm 3 - {}^{1}/_{2}$

في حالة الموجب

$=4 - {}^{1}/_{2} = {}^{4}/_{1} - {}^{1}/_{2} = {}^{8}/_{2} - {}^{1}/_{2} = {}^{7}/_{2}$

في حالة السالب

$= {}^{-2}/_{1} - {}^{1}/_{2} = {}^{-4}/_{2} - {}^{1}/_{2} = {}^{-5}/_{2}$

مسائل وتمارين : ( على مفهوم الأسس و الجذور ) :

- اوجد قيمة كل مما يلي أبسط صورة :

1)- $\sqrt[3]{-81} =$

2)- ${}^{x^{-5}}/_{x^{-1/5}} =$

3)- $\sqrt[4]{x\,{}^{8}/_{16}} =$

4)- $\sqrt[9]{({}^{x}/_{y})^{o}} =$

ملاحظة ( جميع الملخصات مطابقة للمحتوى على لبلاك بورد )...

( أرجو التنبيه إذا كان هناك خطأ )

.. بالتوفيق والنجاح لكم جميعاً ..

... انا ...

### الفصل الثاني

# العمليات الجبرية

---

## تلخيص المحاضرة الرابعة

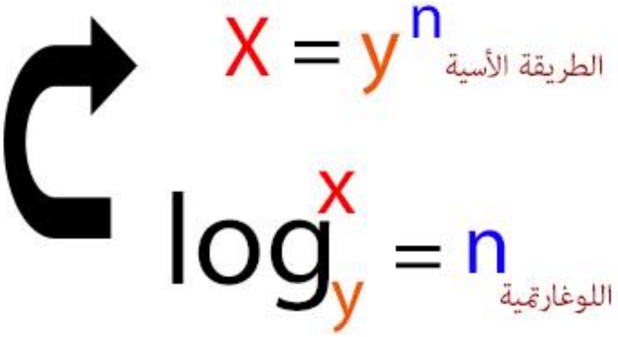
### اللوغاريتمات :

نشأت فكرة اللوغاريتمات عند المحاولة للإيجاد مجهول $X=y^n$ بالنسبة لمجهول n .

فإذا كانت كل من $x , y$ عدد موجب بحيث $y \neq 1$ فأنه يوجد عدد حقيقي وهو n بحيث $X=y^n$ ويسمى العدد nباللوغاريتم و العدد X للأس Y ويكتب على الصورة :

$$\log_{y}^{x} = n$$

وباختصار يمكن تسهيلها بالمعادلة التالية لتحصل ع الجواب ولفهمها ابسط :



$$X = y^{n}$$

$$\log_{y}^{x} = n$$

بشرط

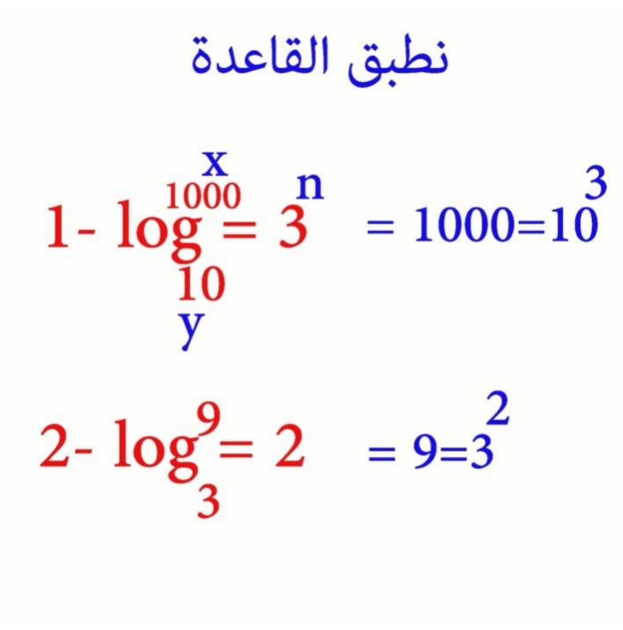
$$X , y > 0$$

$$y \neq 1$$

# امثلة

---

س/ اكتب كل من المقادير التالية على الصورة الأسية .:



نطبق القاعدة

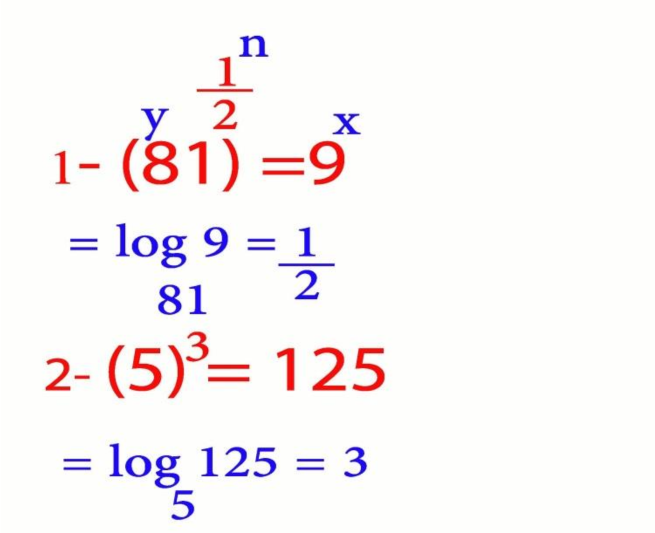
$1-\ \log_{\underset{y}{10}}^{\overset{x}{1000}} = \overset{n}{3} \quad = 1000=10^{3}$

$2-\ \log_{3}^{9} = 2 \quad = 9=3^{2}$

3- $\log_{25} 5 = {}^{1}/_{2} = 25^{1/2} = 5 = \sqrt{25}$

$5=5$

والعكس صحيح لتحويل من الطريقة الأسية الى الطريقة اللوغاريتمية :



$1- \overset{y}{(81)}^{\overset{n}{\frac{1}{2}}} = 9^{x}$

$= \log_{81} 9 = \frac{1}{2}$

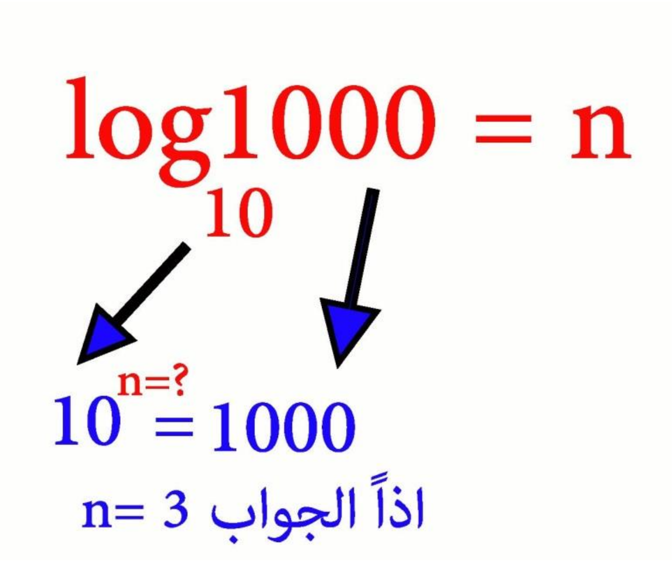
$2- (5)^{3} = 125$

$= \log_{5} 125 = 3$

3- $({}^{1}/_{4})^{2} = {}^{1}/_{16} = \log_{4} {}^{1}/_{16} = 2$ .

طريقة ايجاد قيمة n في المسائل اللوغاريتمية . !

الطريقة هي تحويل المعادلة اللوغاريتمية الى الطريقة الأسية .



---

- بشكل عام يوجد اساسان لهما الأهمية الكبرى في التطبيقات المختلفة :.

- الأساس للعدد 10 ويسمى اللوغاريتم العشري وعادة في هذا اللوغاريتم لا يكتب الاساس 10 اسفل اللوغاريتم .

- الأساس للعدد e ( e : عدد ثابت مقداره 2.718 ) ويسمى باللوغاريتم الطبيعي ويرمز له برمز ( ln ) log e

# خواص اللوغاريتمات

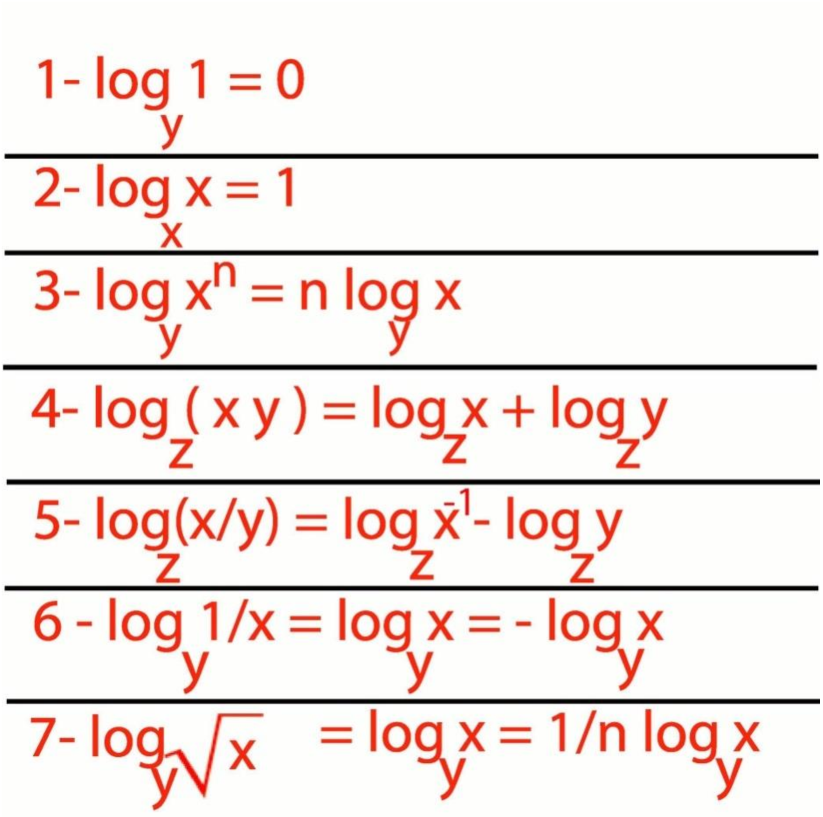
---

- لوغاريتم 1 لأي اساس دائما يساوي صفر (قاعدة ثابته ) .
- دائما اذا تساوى اللوغاريتم مع الاساس دائما يساوي واحد (قاعدة ثابته )

---

## قواعد لمسائل اللوغاريتمات

يجب حفضها و فهما لمعرفة حل المسائل وتطبيق بعض المسائل عليها



1- $\log_y 1 = 0$

2- $\log_x x = 1$

3- $\log_y x^n = n \log_y x$

4- $\log_z ( x y ) = \log_z x + \log_z y$

5- $\log_z(x/y) = \log_z x^{-1} - \log_z y$

6 - $\log_y 1/x = \log_y x = - \log_y x$

7- $\log_y \sqrt{x} \quad = \log_y x = 1/n \log_y x$

$\log_5 1 = 0,\log_e 1 = \ln 1 = 0$ - 1 :أمثله

$\log_{10} 10 = 1$ -2

$\log_{25} 25 = 1$

$\log_5 5^x = x \log_5 5 = x . 1 = x .$ -3

$= \log_{10} 10^3 = 3 \log_{10} 10 = 3\times1 = 3$

$\log_{10} 1000$

$\log_5(125 \times 10) = \log_5 125 + \log_5 10$ -4

$= \log_5 5^3 + \log_5(5 \times 2)$

$= 3\log_5 5 + \log_5 5 + \log_5 2$

$= 3 + 1 + \log_5 2$

$= 4 + \log_5 2$

5 - $\log {}^{100}/_{200} = \log 100 - \log 200$

$= \log 10^2 - \log( 2 \times 100)$

$= 2\log 10 - [\log 2 + \log 10^2]$

$= 2-[\log 2 + 2]$

$= 2 - \log 2 - 2 = \log 2$

الحل بطريقة أخرى : $\log {}^{100}/_{200} = \log {}^{1}/_{2}$

$= \log 2^{-1}$

$= -\log 2$

6 - $\log {}^{1}/_{1000} = \log(1000)^{-1}$

$= - \log 10^3 = - 3\log 10$

$= -3\times 1 = -3$

أيضا : $\log_5 {}^{1}/_{5} = \log_5 5^{-1} =-\log_5 5 = -1\times 1 = -1$

7 - $\log 3\sqrt[3]{27} = \log_3 (27)^{1/3} = 1/3 \log_3 27$

$= 1/3\log_3 3$

$= 1/3 \times 3 \log_3 3$

$$= 1 \times 1 = 1$$

$$\log_3 \sqrt{27}$$

$$= \log_3 (27)^{1/2} = 1/2 \log_3 27$$

$$= 1/2 \ \log_3 3$$

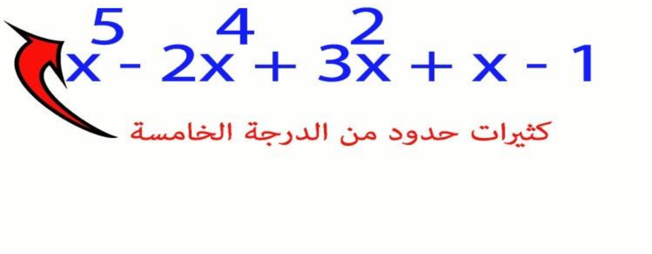
$$= 3/2 \log_3 3$$

$$= 3/2$$

# كثيرات الحدود

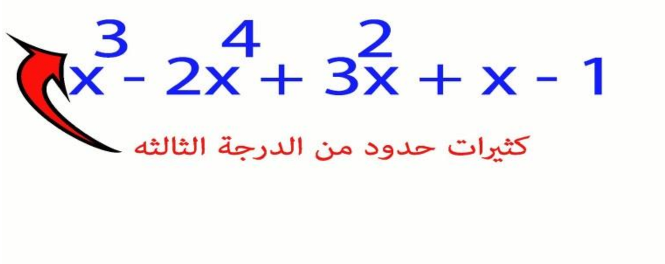
---

- مثال على كثيرات الحدود .:



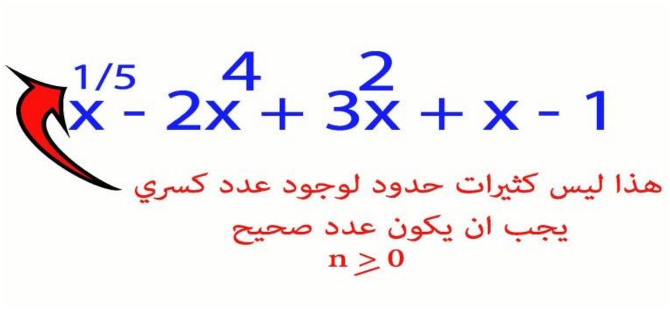
$$x^5 - 2x^4 + 3x^2 + x - 1$$

كثيرات حدود من الدرجة الخامسة



$$x^3 - 2x^4 + 3x^2 + x - 1$$

كثيرات حدود من الدرجة الثالثه



$$x^{1/5} - 2x^4 + 3x^2 + x - 1$$

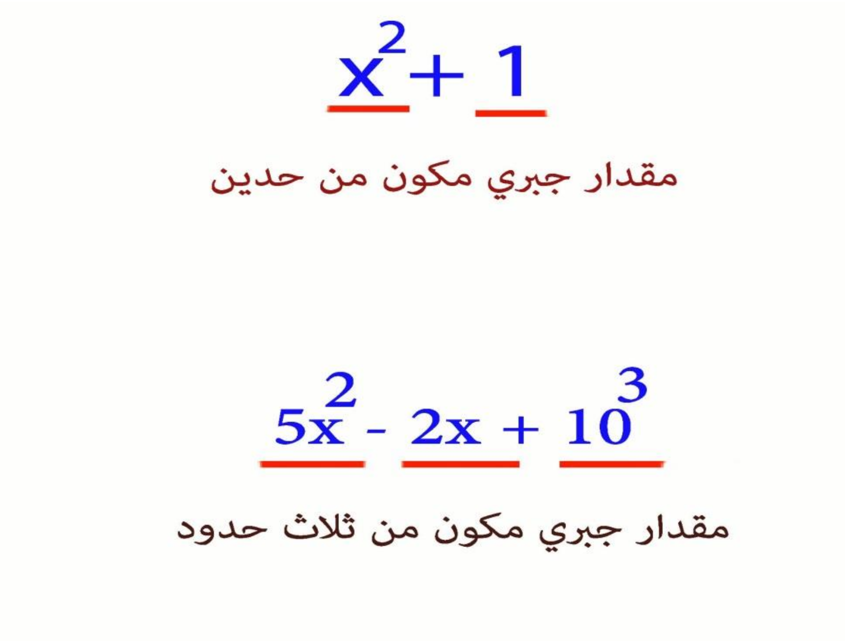
هذا ليس كثيرات حدود لوجود عدد كسري
يجب ان يكون عدد صحيح
$n \geq 0$

# العمليات الجبرية على المقادير الجبرية

---

**تعريف** : المقدار الجبري هو عبارة عن تركيبة من الرموز و الأعداد المرتبطة في ما بينها عن طريق العمليات الجبرية الأساسية ( + - * / ).

- امثلة على بعض العمليات .:



$$\underline{x^2} + \underline{1}$$

مقدار جبري مكون من حدين

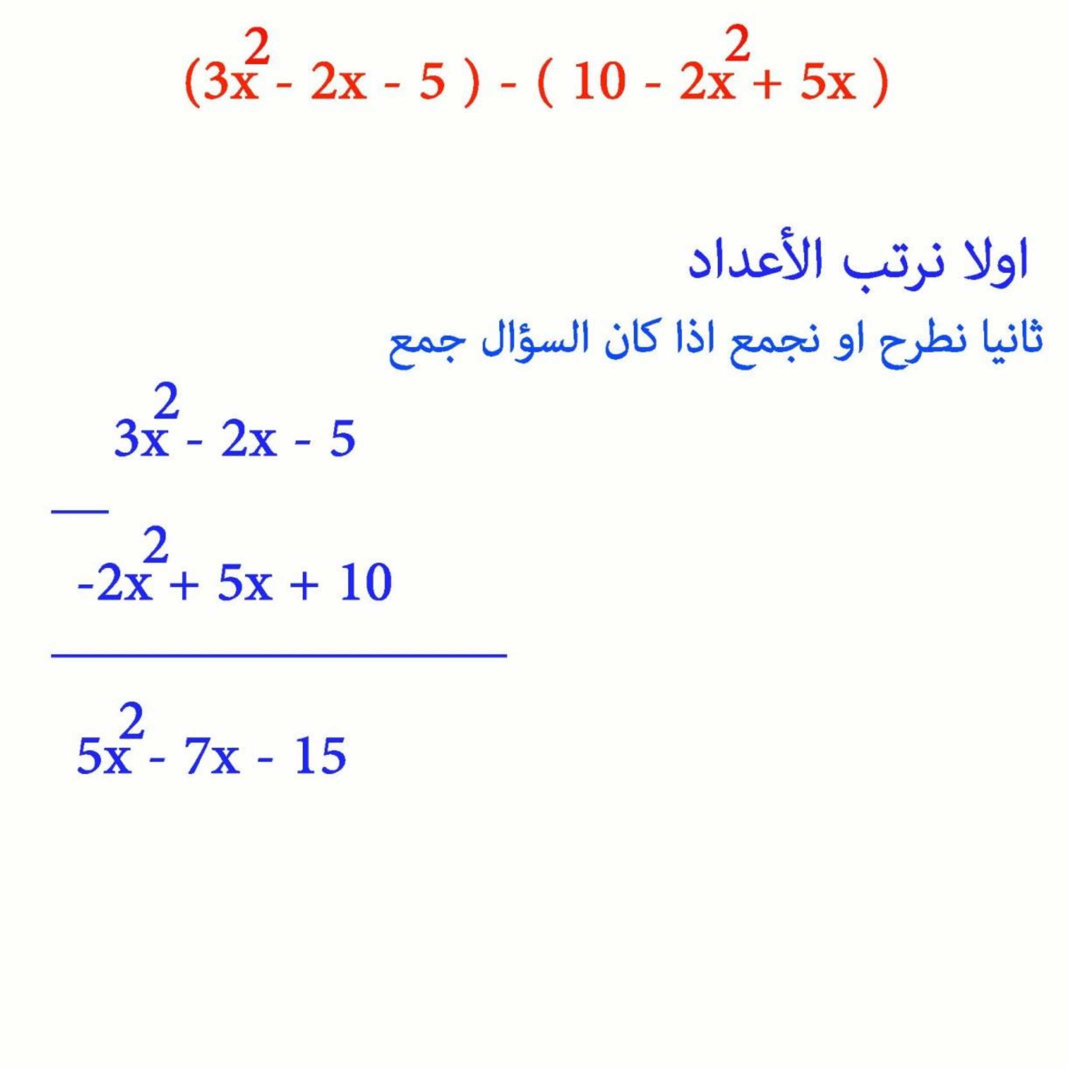
$$\underline{5x^2} - \underline{2x} + \underline{10^3}$$

مقدار جبري مكون من ثلاث حدود

## العمليات الجبرية على المقادير الجبرية

- في حالة الجمع او الطرح : فأننا نجمع او نطرح المعاملات العددية للمتغيرات المتشابهة بعد ترتيبها اما بالطريقة الأفقية او العمودية .

❖مثال .: اوجد ناتج الطرح بين المقدارين :



$$(3x^2 - 2x - 5) - (10 - 2x^2 + 5x)$$

اولا نرتب الأعداد

ثانيا نطرح او نجمع اذا كان السؤال جمع

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2x - 5 \\ - \qquad -2x^2 + 5x + 10 \\ \hline 5x^2 - 7x - 15 \end{array}$$

اوجد ناتج جمع المقدارين :

$(3x^2 - 2x – 5 ) + (10 – 2x^2 + 5x)$.

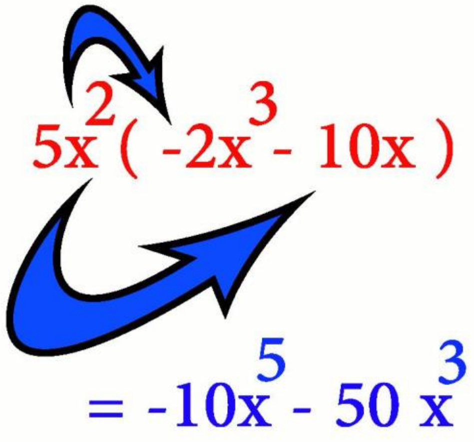
الحل : نعيد ترتيب المقدار الثاني ونجمع المعاملات المتشابهة :.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2x - 5 \\ + \quad -2x^2 + 5x + 10 \\ \hline x^2 + 3x + 5 \end{array}$$

# العمليات الجبرية على المقادير الجبرية

- **في حالة الضرب** : للإيجاد حاصل ضرب مقدار جبري في اخر فأننا نستخدم عملية التوزيع و قوانين الأسس مع قاعدة الإشارات ثم نجمع الحدود المتشابهة ان وجدت .

❖ مثال .: اوجد ناتج ما يلي :



$$5x^2(-2x^3 - 10x)$$

$$= -10x^5 - 50\,x^3$$

$$(x - 1)(x^2 + 2x)$$

هنا نفس الخطوات الأول في الاول و الثاني _ والعدد الثاني في الاول و الثاني

$$= x^3 + 2x^2 - x^2 - 2x$$

$$= x^3 + x^2 - 2x$$

# العمليات الجبرية على المقادير الجبرية

- في حالة القسمة :لإيجاد حاصل القسمة سنستخدم ( قوانين الأسس , قوانين الكسور , قاعدة الإشارات ) وهناك نوعين من قسمة المقادير الجبرية هما :

- قسمة مقدار جبري مكون من حد واحد على مقدار جبري اخر مكون من حد واحد .

❖مثال :.

$$\frac{27x}{9x^{2}}$$

$$= 3x$$

$$2 - \frac{24x^{3}y^{2}}{6x\ y^{-2}} = 4x^{2}\ y^{2}\ y^{2}$$

$$=4x^{2}\ y^{4}$$

# العمليات الجبرية على المقادير الجبرية

- قسمة مقدار جبري مكون من اكثر من حد على مقدار جبري مكون من حد واحد

❖ مثال .: اوجد ناتج ما يلي :

$$\frac{25x^3 + 5x^2 - 15x}{5x}$$

$$= \frac{25x^3}{5x} + \frac{5x^2}{5x} - \frac{15x}{5x}$$

$$= 5x^2 + x - 3$$

يفضل ترتيب الحدود البسط ثم توزيع المقام

تمارين ومسائل : اوجد ناتج مايلي :

1 ) $\log_5 \sqrt{125}$ 2) $\log_3 (\frac{1}{3})^3$ .

2 ) $(x^2 y - xy - 5x) - (xy - 3x^2 y - 10x)$ .

3 ) $(6 x y)(2x^2 y - 3 xy^2)$ .

4 ) $\frac{-24x^2y^2-8x^3y^3}{-4x^3y^2}$ .

مجهود شخصي من اخوكم / lostx7x

مراجعة

وتدقيق : .... انا ....

ملاحظة ( ارجو التنبيه إذا كان هناك خطأ )

بالتوفيق لكم جميعاً

# مبادىء الرياضيات : المحاضرة الخامسة

## الفصل الثالث : تحليل المقادير الجبرية

مقدمة : الهدف من عملية تحلبل المقادير الجبرية هي إعادة كتابتها على صورتها الاساسيه مثل عملية الضرب .

و بداية سنتعرف على حاصل ضرب بعض المقادير الجبرية الخاصة و التي نستخدمها في تسهيل عملية فهم طرق التحليل

أولاً : حاصل ضرب بعض المقادير الجبرية الخاصة :

a ) $x(y + z) = xy + xz$ .

b) $(x - y)(x + y) = x^2 + xy - xy - y^2$

$= x^2 - y^2$ .

c) $(x + y)(x - y) = (x - y)^2$

$= x^2 - xy - xy + y^2$

$= x^2 - 2xy + y^2$ .

d) $(x + y)(x + y) = (x + y)^2$

$= x^2 + xy + xy + y^2$

$= x^2 + 2xy + y^2$ .

مثال : اوجد ناتج ما يلي بأبسط صوره :

1) $5 \times (3y - 5z) = 15 \times y - 25 \times z$ .

2) $(3x - 4y)^2 = (3x - 4y)(3x - 4y)$

$= 9x^2 - 12xy - 12xy + 16y^2$

$= 9x^2 - 24xy + 16y^2$

3) $(3x - 4yx\ 3x + 4y) = 9x^2 + 12xy - 12xy - 16y^2$

$= 9x^2 - 16y^2$

4) $-3x(x - y)(-3x^2 + 3xy)$

$= (-3x^2 + 3xy)(-3x^2 + 3xy)$

قاعدة : مربع الحد الأول + الحد الأول × الحد الثاني × الأس + مربع الحد الثاني $\longrightarrow = (-3x^2 + 3xy)^2$

$= 9x^4 - 9x^3y - 9x^3y + 9x^2y^2$

$= 9x^4 - 18x^3y + 9x^2y^2$

و ) ( س + ص ) ( س + ص ) ( س + ص ) = ( س + ص ) $^3$

(س$^2$ + 2س ص + ص$^2$) ( س + ص ) = س$^3$ + 2س$^2$ص + س ص $^2$

+ س$^{2}$ص + 2س ص$^{2}$ + ص$^{3}$

= س$^{3}$ + 3س$^{2}$ص + 3س ص$^{2}$ + ص$^{3}$

أمثلة : اوجد ناتج المقادير التالية بأبسط صورة :

أ ) 5 س ( 3 ص – ع ) = 15 س ص – 5 س ع .

ب) ( 3 س $^{2}$ – 4 ص )$^{2}$ =( 3 س $^{2}$ - 4 ص ) ( 3 س $_{2}$ – 4 ص )

= 9 س $^{4}$ – 24 س $^{2}$ ص + 16 ص $^{2}$

ج ) ( 2 – س )$^{3}$ = ( 2 – س ) ( 2 – س ) ( 2 – س )

= ( 4 – 4 س + س $^{2}$ ) ( 2 – س )

= 8 – 8 س + 2 س $^{2}$ – 4 س + 4 س $^{2}$ – س $^{3}$

= 8 – 12 س + 6 س $^{2}$ – س $^{3}$

ثانياً : التحليل , و من الطرق التي سنتعرف عليها في تحليل المقادير الجبرية :

1) اخراج العامل المشترك

ملاحظة : التحليل هو عملية عكسية لعملية حاصل ضرب مقادير جبرية .

والمقصود بتحليل المقدار الجبري إلى عوامله الأولية ( أي لا يمكن تحليل عوامله الى حاصل ضرب عوامل جبرية أخرى ) .

ثانياً : طرق التحليل .

ومن الطرق التي سنتعرف عليها في تحليل المقادير الجبرية

1 – اخراج العامل المشترك :

تعريف : اذا كان لدينا المقدار الجبري $xy + xz$

فإنه يمكن اخراج العامل المشترك بين الحدين الأول والثاني بحيث يكتب هذا المقدار على الصورة التالية :

$Xy + xz = x ( y + z )$ .

مثال : حلل كل من المقادير الجبرية التالية إلى عواملها الأولية :

a) $5x + 15xy = 5x ( 1 + 3y )$ .
b) $5x – 30yz = 5 ( x – 6yz )$
c) $7x^3 5x^2 y^3 = x^2 ( 7x – 5y^3 )$
d) $2x^3y^2 - 8x^2y^3 + 16xy = 2xy ( x^2 y – 4xy ^2 + 8 )$

2 – الفرق بين مربعين :

الصيغة العامة لهذه الطريقة تكتب على النحو الآتي :

$( x^2 - y^2 ) = ( x - y ) ( x + y )$ .

مثال : حلل المقادير التالية إلى عواملها الأولية :

a)$(x^2 - 9 ) = (x^2 - 3^2 )$

$= ( x - 3 ) ( x + 3 )$

b) $( 49x^2 - 64y^2 ) = (7^2 x^2 - 8^2 y^2 )$

$= ((7x)^2 - (8y)^2 )$

$=( 7x - 8y) (7x + 8y )$

c) $(x^4 - 1) =( (x^2)^2 - 1^2 )$

$= ( x^2 - 1 ) ( \overline{x^2 + 1} )$ ← يمكن تحليله مرة أخرى

$= ( x - 1 ) ( x + 1 ) ( x^2 + 1 )$

d) $( 16 - z^4 ) = ( 4^2 - (z^2)^2)$

$= ( 4 - z^2) ( 4 + z^2 )$ ← $2^2 - z^2$

$= ( 2 - z ) ( 2 + z ) ( 4 + z^2 )$

للتأكد من صحة الحل : نجد ناتج ضرب المقادير الثلاث ويكون الجواب عبارة عن $( 16 - z^4 )$ .

التمارين والمسائل :

حلل المقادير التالية :

a) $3xz^3 - 9xz - \frac{27}{5} x^2 z^2$ .

b) $81x^2 - \frac{36}{25} y^2$ .

ملاحظة ..( ارجو التنبيه إذا كان هناك خطأ )...

بالتوفيق لكم جميعاً

.... انا ....

## مبادىء الرياضيات : المحاضرة السادسة

### تابع الفصل الثالث : تحليل المقادير الجبرية

طرق التحليل :

1 – اخراج العامل المشترك .

2 – الفرق بين مربعين .

ملاحظة : في حال وجود اشارة + بين حدين مربعين فإنه لا يمكن اجراء التحليل في هذه الحالة .

مثال : حلل المقدار التالي :

( لا يمكن تحليله $\xleftarrow{\qquad\qquad} ( x^2 + 25 )$

3 – الفرق بين مكعبين :

و الصيغة العامة لقانون الفرق بين مكعبين هي :

$$( x^3 - y^3 ) = ( x- y ) ( x^2 + xy + y^2 )$$

مربع الحد الحد الأول مضروب مربع الحد الحد الحد (الحد الثاني)$^3$ ( الحد الأول )$^3$

الثاني في الحد الثاني الأول الثاني الأول y x

مثال : حلل كل من المقادير الجبرية التالية :

1 ) $27x^3 - 8y^3 = 3^3 x^3 - 2^3 y^3$

$= (( 3x )^3 - ( 2y )^3 )$

$= ( 3x – 2y )( 9x^2 + 6xy + 4y^2 )$

2 ) $8 x^6 – 125 y^9 = 2^3 ( x^2 )^3 - 5^3 ( y^3 )^3$

$= ( 2 x^2 )^3 - ( 5 y^3 )^3$

و بتطبيق قانون الفرق بين مكعبين , نحصل على :

$= ( 2 x^2 - 5 y^2 ) ( 4 x^4 + 10 x^2 y^3 + 25 y^6 )$

3 ) ${}^{1}/_{8} - z^3 = ({}^{1}/_{2})^3 - z^3$

$= ({}^{1}/_{2} - z ) ( {}^{1}/_{4} + {}^{1}/_{2} z + z^2 )$

4 – مجموع مكعبين :

و الصيغة العامة لمجموع مكعبين تكتب كما يلي :

$( x^3 + y^3 ) = ( x + y ) ( x^2 - xy +y^2 )$ .

مثال : حلل كل مما يلي إلى عوامله الأولية :

a ) $( 27 x^3 + 1 ) = (( 3 x)^3 + 1^3 )$

$= ( 3x + 1 )( 9 x^2 - 3 x + 1 )$ .

b ) $( {}^{1}/_{125} + {}^{8}/_{x^3} ) = (( {}^{1}/_{5} )^3 + ( {}^{2}/_{x} )^3 )$

$= ( \underset{\downarrow}{{}^{1}/_{5}} + \underset{\downarrow}{{}^{2}/_{x}} ) ( {}^{1}/_{25} - {}^{2}/_{5x} + {}^{4}/_{x^2} )$

الحد الثاني     الحد الأول

## 5 – تحليل المقدار الثلاثي :

سنتعرف في هذا البند على كيفية تحليل كثيرة حدود من الدرجة الثانية على الصيغة التالية :

$$a x^2 + b x + c$$

حيث   a , b , c  :  أعداد ثابتة .

وسنحاول اعادة كتابة المقدار السابق على الشكل التالي :

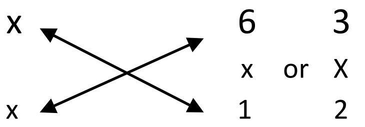
$$( a x^2 + b x +c ) = ( d1 x + e1 ) ( d2 x + e2 )$$

وسنقوم بتطبيق طريقة المقص او التحليل المباشر
على مثل هذا النوع من المقادير الجبرية :

مثال : حلل المقدار التالي إلى عوامله الأولية :

الحد الأوسط

$$x^2 + x – 6 = ( x + 3 ) ( x – 2 )$$



( نتيجة 1 : إذا كانت اشارة الطرف سالبه , تكون إشارة كل عدد في الطرفين مختلفة و العدد الأكبر يأخذ إشارة الوسط ) .

مثال : حلل المقدار التالي :

$$x^2 + 5 x \boxed{+} 6 = ( x + 3) ( x + 2 )$$

( نتيجة 2 )

( نتيجة 2 : إذا اشارة الطرف موجبة , تكون إشارة كل عدد في الطرفين متشابهة و مساوية لإشارة الوسط ) .

مثال : حلل المقدار التالي :

. ( نتيجة 2 )   $x^2 - 2 x \boxed{+} 1 = ( x – 1 ) ( x – 1 )$

مثال : حلل المقدار التالي :

2 x

( نتيجة 1 )   $X^2 \boxed{-} 2 x \boxed{-} 8 = ( x + 2 ) ( x – 4 )$

سيأخذها العدد الأكبر   -4 x

مثال : حلل المقادير التالية :

1 )  $7 x^2 - 49 x = 7 x ( x – 7 )$ .

2 )  $81 – 9 z^2 = ( 9^2 - ( 3 z )^2 ) = ( 9 – 3 z ) ( 9 + 3 z )$ .

3 )  $27/125 + y^3/z^3 = (3/5)^3 + (y/z)^3 = ( 3/5 + y/z )$

$( {}^{9}/_{25} - {}^{3y}/_{5z} + {}^{y^2}/_{z^2} )$

4 ) $x^2 - 8x + 15 = (x - 5)(x - 3)$

مسائل و تمارين :

حلل كل من المقادير التالية إلى عواملها الأولية :

a ) ${}^{25}/_{x^2} - {}^{x^2}/_{16}$

b ) ${}^{1}/_{64} + {}^{1}/_{y^3}$

c ) $x^2 - 9x - 10$

d ) $-81z^3 - 9z^2 + 27z$

ملاحظة ..( أرجو التنبيه إذا كان هناك خطأ )...

بالتوفيق لكم جميعاً

.... انا ....

## المحاضرة المباشرة الأولى ...

## الفصل الأول : مفاهيم أساسيه في الجبر

- مفاهيم المجموعة
- العمليات عل المجموعات
- التمثيل الهندسي للأعداد
- مجموعات الأعداد
- الفترات
- القيمة المطلقة

## الفصل الثاني : العمليات الجبرية

- العمليات الجبرية
- الأسس و الجذور
- اللوغاريتمات
- كثيرات الحدود
- المقادير الجبرية

## الفصل الثالث : تحليل المقادير الجبرية

- العامل المشترك
- الفرق بين مربعين
- الفرق بين مكعبين
- مجموع مكعبين
- المقدار الثلاثي

حول التمارين التي تم طرحها في المحاضرات السابقة :

1 ) $\sqrt[3]{-81} = \sqrt[3]{-27 \times 3} = \sqrt[3]{-27} \times \sqrt[3]{3}$

$= 3\sqrt[3]{3}$

2 ) $^{\bar{x}5}/_{\bar{x}1/5} = x^{-5(-1/5)} = x^{-5+1/5}$

$= x^{-24/5+ 1/5}$

$= x^{-24/5} = \frac{1}{x\ 24/5}$

3 ) $\sqrt[4]{\frac{x8}{16}} = \frac{\sqrt[4]{x8}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{x\ 8/4}{2} = \frac{x^2}{2}$

4 ) $\sqrt[9]{\left(\frac{x}{y}\right)}\ ^5 = \sqrt[9]{1} = 1$

5 ) $\log_5 \sqrt{125} = \log_5 (125)^{1/2} = 1/2 \log_5 125$

$= 1/2 \log_5 5^3 \; = 3/2 \log_5 5$

$= \; 3/2$

6 ) $\log_3(\frac{1}{3})^3 \; = 3 \log_3 1/3 \;\; = 3 \log_3 3^{-1}$

$= -3 \log_3 3 \; = -3 \times 1 = -3$

7 ) $(x^2 y - x y + 5 x) - (x y - 3 x^2 y - 10 x) =$ ??

نعيد كتابة المقادير على الصورة العمودية بعد الترتيب

$$\begin{array}{rr} & x^2 y - x\, y + 5\, x \\ - & -3\, x^2\, y + x\, y - 10\, x \\ \hline & 4\, x^{\,2}\, y - 2\, x\, y + 15\, x \end{array}$$

8 ) $(6 x y)(2 x^2 y - 3 x y^2)$

$= 12 x^3 y^2 - 18 x^2 y^3$

9 ) $\dfrac{-24\, x\, 5\, y^{\,2} - 8\, x^{\,3}\, y^{\,3}}{-4\, x^{\,3}\, y^{\,2}} = \dfrac{-24\, x5\, y^2}{-4\, x^{\,3}\, y^{\,2}} - \dfrac{8\, x^{\,3}\, y^{\,3}}{-4\, x^{\,3}\, y^{\,2}}$

$= 6 x^2 + 2 y$

10 ) $3 x z^3 - 9 x z - 27/5\, x^2 z^2$

$3 x z ( z^2 - 3 - 9/5\, x z )$

11 ) $81 x^2 - \frac{36}{25} y^2 = ( 9 x - 6/5\, y ) ( 9 x + 6/5\, y )$

12 ) $\frac{25}{x^2} - \frac{x^2}{16} = ( {}^{5}/_{x} \; - {}^{x}/_{4} \; ) ({}^{5}/_{x} \; + {}^{x}/_{4})$

13 ) ${}^{1}/_{64} + {}^{1}/_{y^3} \; = (\frac{1}{4} + \frac{1}{y}) ( \frac{1}{16} \; - \frac{1}{4\, y} \; + \frac{1}{y^{\,2}} \; )$

14 ) $x^2 - 9 x - 10 = ( x + 1 ) ( x - 10 )$

15 ) $-81 z^3 - 9 z^2 + 27 z = 9 z ( -9 z^2 - z + 3 )$

ملاحظة ( أرجو التنبيه إذا كان هناك خطأ )...

بالتوفيق لكم جميعاً

... انا ...

# ملخص مقرر مبادئ الرياضيات

## المحاضرة السابعة - الفصل الرابع : المقادير الكسرية

***ما هو المقدار الكسري ؟**

**هو عبارة عن ناتج قسمة كثيرتي حدود بحيث يسمى المقسوم بالبسط و المقسوم عليه بالمقام .**

**- ومن الأمثلة على المقادير الكسرية :**

$$1.\quad \frac{5x-4 \leftarrow \text{بسط}}{2x+1 \leftarrow \text{مقام}}$$

$$2.\quad \frac{3x^2+x-1 \ \leftarrow \text{بسط}}{2x^2+2 \qquad \leftarrow \text{مقام}}$$

$$3.\quad x^4-\frac{1}{x^2}=\frac{x^4}{1}-\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{x^4}{1}\cdot\left(\frac{x^2}{x^2}\right)-\frac{1}{x^2} \qquad \leftarrow \left(\frac{x^2}{x^2}\right)\text{بضرب المقدار الاول بـ}$$

$$=\frac{x^6}{x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^6-1}{x^2}$$

***العمليات الجبرية على المقادير الكسرية :**

**1. جمع و طرح المقادير الكسرية :- عند جمع أو طرح المقادير الكسرية يجب ملاحظة ما يلي :**

**أ ) إذا كانت المقادير الكسرية لها المقام نفسه فيكون المجموع النهائي لها نفس المقام و بسطه يتكون من ناتج البسط الأول مع بسط المقدار الثاني .**

**بصورة رموز←**

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{y}=\frac{x+z}{y} \quad , \quad y\neq 0$$

$$\frac{x}{y}-\frac{z}{y}=\frac{x-z}{y} \quad , \quad y\neq 0$$

**مثال / اوجد ناتج مايلي بأبسط صورة :-**

$$1.\quad \frac{x+3}{x-2}-\frac{3x}{x-2}=\frac{x+3-3x}{x-2}=\frac{-2x+3}{x-2}$$

$$2.\quad \frac{4x-3}{5x}-\frac{2+2x}{5x}=\frac{4x-3-(2+2x)}{5x}=\frac{4x-3-2-2x}{5x}=\frac{2x-5}{5x}$$

**ب ) إذا كانت المقادير الكسريه لها مقامات مختلفه ففي هذه الحاله نقوم بتحويلها الى كسور مكافئة لها نفس المقام و ذلك عن طريق ضربها في كثيرة حدود مناسبة ثم نطبق الطريقة في ( أ ) .**

**و بصورة رمزيه يمكن التعبير عن الفقرة في الاعلى كما يلي :**

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{w}=\frac{x\cdot w}{y\cdot w}+\frac{z\cdot y}{w\cdot y}=\frac{xw}{yw}+\frac{zy}{wy}=\frac{xw\pm zy}{yw}$$

**مثال :**

**أوجد ناتج مايلي :-**

$$1.\ \frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}=\frac{5\cdot(x)}{x\cdot(x)}+\frac{3}{x^2}=\frac{5x}{x^2}+\frac{3}{x^2}=\frac{5x+3}{x^2}$$

$$2.\ \frac{2}{x}-\frac{3}{x-1}=\frac{2\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)}-\frac{3\cdot(x)}{x-1\cdot(x)}=\frac{2x-2-3x}{x(x-1)}=\frac{-x-2}{x(x-1)}$$

أوجد ناتج عملية طرح المقادير الكسريه التاليه :-

$$1.\ \frac{7}{x^2-1}-\frac{x}{x-1}=\frac{7}{(x-1)(x+1)}-\frac{x\cdot(x+1)}{x-1(x+1)}=\frac{7-x(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{7-x^2-x}{x^2-1}$$

ملاحظة : عند توحيد المقامات بالمقادير الكسرية , فإنه يجب تحليل مقامات الكسور إلى عواملها الأولي هان أمكن .

أوجد ناتج الجمع فيما يلي :

$$1.\ \frac{x^3-1}{x^2}+\frac{x^2-1}{5x}=\frac{x^3-1\cdot(5)}{x^2\cdot(5)}+\frac{x^2-1\cdot(x)}{5x\cdot(x)}=\frac{5(x^3-1)+x(x^2-1)}{5x^2}$$

$$=\frac{5x^3-5+x^3-x}{5x^2}=\frac{6x^3-x-5}{5x^2}$$

2 . عملية ضرب المقادير الكسرية :

عند ضرب مقدار كسري مع آخر , فإننا نقوم بضرب البسط مع البسط مقسوما على المقام ضرب المقام .

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{w}=\frac{xz}{yw}$$

أوجد ناتج مايلي :-

$$1.\ \frac{3x}{x-1}\cdot\frac{5}{x}=\frac{15x}{x(x-1)}=\frac{15}{x-1}$$

$$2.\ \frac{5x}{x-1}\cdot\frac{-3x}{x+1}=\frac{-15x^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{-15x^2}{x^2-1}$$

$$3.\ x\cdot\frac{x^3}{x-2}=\frac{x^4}{x-2}$$

$$4.\ \frac{1}{x}\cdot\frac{2x^3}{x^{-1}}=\frac{1\cdot(x^{-1})}{x\cdot(x^{-1})}\cdot\frac{2x^3}{x^{-1}}=\frac{2x^3}{x^0}=\frac{2x^3}{1}=2x^3$$

طريقة أخرى $=\frac{1}{x}\cdot\frac{2x^3x^1}{1}=\frac{1}{x}\cdot\frac{2x^4}{1}=\frac{2x^4}{x}=2x^3$

3 . قسمة المقادير الجبرية :

لقسمة مقدار كسري على آخر فإننا نحول إشارة القسمة إلى ضرب و نأخذ مقلوب الكسر الثاني .

$$\frac{x}{y}\div\frac{z}{w}=\frac{x}{y}\times\frac{w}{z}=\frac{xw}{yz}$$

بسط مايلي :-

$$1.\ \frac{3}{x}\div\frac{x}{3}=\frac{3}{x}\times\frac{3}{x}=\frac{9}{x^2}$$

$$2.\ \frac{x^2+1}{x-1}\div\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{x^2+1}{x-1}\times\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{x^2+1\cancel{(x-1)(x+1)}}{\cancel{(x-1)(x+1)}}=x^2+1$$

3. $\frac{5}{x} \cdot \frac{x^2}{5} \div \frac{x-1}{x} = \frac{5x^2}{5x} \div \frac{x-1}{x} = \frac{5x^2}{5x} \div \frac{x-1}{x} = x \div \frac{x-1}{x} = x \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$

4. $\frac{x}{5} \div \frac{x-1}{x} \cdot \frac{2}{x^2} = \frac{x}{5} \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \frac{2}{x^2} = \frac{x^2}{5x-1} \cdot \frac{2}{x^2} = \frac{2}{5x-1}$

تمارين و مسائل :

أوجد ناتج مايلي بأبسط صورة :-

1. $\frac{3x}{x-3} + \frac{1}{x^2-9} =$

2. $\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{x-1}{x} =$

3. $\frac{1}{x^2-4} \div \frac{5}{x+2} =$

4. $\frac{7-x}{x} - \frac{x^2-2x+1}{5} =$

* أرجو التنبيه عند وجود أي خطأ .. و بالتوفيق للجميع .

**Zeko**

## الباب الخامس : المعادلات ..

**تعريف المعادلة :** هي عباره عن تعبير رياضي تحتوي على متغير واحد او اكثر مع اشاره التساوي , بحيث يكون لهذا التعبير طرفان ايمن وايسر تفصل بينهما اشاره المساواه بحيث تدعى هذه المتغيرات بالمجاهيل . وعملية حل مثل هذا النوع من المعادلات معناه ايجاد قيمه عدديه تجعل طرفي المعادله متساوٍ , مثل هذه الحلول تسمى حل المعادله .

وبدايةً سنتعرف على بعض من اشكال المعادلات وكيفيه حلها :

### أ) المعادلات الخطيه بمتغير واحد x.

والصوره العامه لمثل هذا النوع من المعادلات هي :

aX=c .

اعداد ثابته : a,c          a,c€R

ومن الامثله على هذا النوع من المعادلات :

X=2 $\frac{1}{3!}$ , 5x=1          معامل متغير x

$\frac{-2}{3}=\frac{3}{2}x$          -2=3x.

ولحل مثل هذا النوع من المعادلات فإننا نقوم بالتخلص (حذف) العدد الذي يرافق المتغير من خلال عمليتي الضرب او القسمه .

مثال : اوجد حل كل من المعادلات التي في الاعلى :

-1  5x=1 بقسمه طرفي المعادله لعدد 5

$$\frac{5}{5}x=\frac{1}{5} \rightarrow x=\frac{1}{5}$$

وللتحقق من صحة الحل : نعوض قيمه xفي المعادله الاصليه .

$$5\left(\frac{1}{5}\right)=1$$

$$\frac{5}{5}=1$$

نتيجه : للمعادلات الخطيه بمتغير واحد حل وحيد فقط ..

-2  *-2=3x.* قيمه طرفي المعادله على معامل *x*للعدد *3*.

$$\frac{-2}{3}=\frac{3}{3}x \rightarrow x=\frac{-2}{3}$$

2.-3 $\frac{1}{3}x=$ لضرب طرفي المعادله بمقلوب معامل x ينتج ان :

$$\frac{3}{1}\times\frac{1}{3}x=2\times\frac{3}{1} \rightarrow x=6$$

*_4* $\frac{-2}{3}=\frac{3}{2}x.$ بضرب طرفي المعادله بمقلوب معامل *x*وينتج ان :

$$\frac{2}{3}\times\frac{-2}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}x\rightarrow x=\frac{-4}{9}$$

وللتحقق :

$$\frac{-2}{3}=\frac{3}{2}(\frac{-4}{9})$$

$$\frac{-2}{3}=\frac{1}{1}(\frac{-2}{3})$$

**بعض من خواص الاعداد الحقيقيه والمستخدمه في حل المعادلات :**

1- $a+b=a+c\rightarrow b=c$

(من خلال حذف $a$ من طرفي المعادله )

2- $ab=ac\rightarrow b=c$

(من خلال حذف $a$ من طرفي المعادله )

3- $\frac{b}{a}=\frac{c}{a}\rightarrow b=c$

(من خلال حذف $a$ من المقام في طرفي المعادله )

4- $B-a=c-a\rightarrow b=c$

مثال : اوجد ناتج مايلي :

$$x-7=10.$$
$$\rightarrow x=17$$

Or بأضافه +7 الى طرفي المعادله

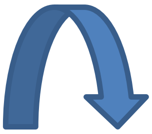
$$\rightarrow x-7+7=10+7$$

$$x=17$$

or نقل العدد -7 الى الطرف الآخر مع تغيير الاشاره .

$$\rightarrow x=10+7=17$$

مثال : اوجد حل المعادله التاليه



$$\frac{1}{2}x-6=2$$

$$\frac{1}{2}x=2+6$$

$\frac{1}{2}x = 8$ يجب التخلص من المعامل $x$

بضرب طرفي المعادله بالعدد $\frac{2}{1}$:

$$\frac{2}{1}\times\frac{1}{2}x = 8\frac{2}{1}$$

$$x = 16$$

ويمكن التأكد من صحه الحل من خلال تعويض $x = 16$

في المعادله الاصليه $(\frac{1}{2}x - 6 = 2)$ فيتحقق طرفيها .

**ب) المعادلات الخطيه بمجهولين :**

**ت) تعريف المعادلات الخطيه في مجهولين $y,x$ هي عباره عن معادله تكتب على الصوره التاليه :**

$a, b, c$€ $R$ $Ax + by = c$⟶حيث

$a,b\neq c$

**إن حل مثل هذا النوع من المعادلات ليس وحيداً**
**بل انه سيكون هنالك عدد لانهائي من الحلول**

**بمعنى : اذا اوجدنا حل المعادله بالنسبه للمتغير $x$ سنحصل على $x\frac{c-by}{a}$**

**وبالتالي قيمة $x$ تعتمد على قيمة $y$ .**

**اما اذا اوجدنا حل المعادله بالنسبه للمتغير $y$ سنحصل على $y\frac{c-ax}{b}$**

**وبالتالي قيمة $y$ تعتمد على قيمة $x$ .**

**مثال : اوجد حل كل من المعادله التاليه بالنسبه للمتغير $x$ .**

(1 $2x-3y=-10$

$2x=3y-10$

الحل العام⟶ $x= \frac{3y-10}{2}$

(2 $5x-4y=24$

عندما $y=-1$

$5x=4y+24$

الحل العام $x\frac{4y+24}{5}$

بالنسبه للمتغير **x**

وعندما ***y=-1***: $x = 4(-1) + 24$

$=\frac{-4+24}{5} = \frac{20}{5} = 4.$

**النتيجه :احدا حلول هذه المعادله هي (*x=4,y=-1*).**

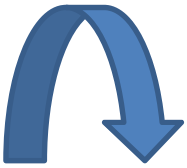
**وللتحقق من صحة الحل , نعوض هذه القيم في المعادله الاصليه .**

***5x=4y+24***

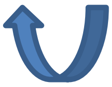
***5(4)-4(1-)=24***

***20+4=20***

**مثال اوجد حل المعادله :**



$$\frac{1}{3}y - 5x = 7.$$



**اذا علمت ان *y=9* ؟**

$$\frac{1}{3}y - 7 = 5x.$$

$$\frac{\frac{1}{3} - 7}{5} = x$$

**عندما *y=9* وينتج ان :**

$$x = \frac{\frac{1}{3}(9) - 7}{5} = \frac{3 - 7}{5} = \frac{-9}{5}$$

**تمارين ومسائل :**

**اوجد حل كل من المعادلا التاليه بالنسبه للمتغير *x*.**

**1) *-6x-3=9.***

**2) *2x*$-\frac{1}{2}y = 1$**

3) $(y = 1)$ $-3y+\frac{1}{2}x = 1$.

## مبادىء الرياضيات : المحاضرة التاسعة

تابع الفصل الخامس : المعادلات

- أنواع المعادلات :

1 – معادلة خطية بمتغير واحد x :

$ax = c ,a ,c \in R$

مثال : اوجد حل المعادلة

$4x – 5= -2x + 7$

الحل : $4x + 2x = 7 + 5$

$6x = 12 \longrightarrow x=2$

2 – معادلة خطية بمتغيرين :

$ax+by = c,a,c,b\in R$

$a \quad b\neq 0$

مثال : $-3x – 9y = 15$

ولإيجاد حل هذه المعادلة للمتغير x , نحصل على :

$$-3x = 9y + 15$$

$$X = \frac{9y+15}{-3} \longrightarrow x = 3y - 5$$

### 3 – معادلات خطية آتية في مجهولين :

الصورة العامة لمثل هذا النوع من المعادلات تكتب كما يلي :

$$a_1,x,+b_1,y=c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

حيث . $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$

وحل هذا النظام الآتي من المعادلات الخطية هو عبارة عن زوج من الأعداد x , y الذي يحققه كلا المعادلتين في آن واحد .

ولحل مثل هذا النوع من المعادلات , سنتعرف على الطرق التالية :

### 1 – طريقة الحذف :

خطوات هذه الطريقة تتلخص كما يلي :

1 – إذا لم تكن المعادلات الحسابية لأحد المتغيرين y أو x , فإننا نضرب المعادلتين أو احدهما بعدد معين حتى تصبح المعادلات في كلا المعادلتين لأحد المتغيرين متساوية .

2 – إذا كانت الإشارات للمعادلات المتساوية غير متشابهة فإننا نقوم بعملية الجمع إما إذا كانت متشابهة فإننا نقوم بعملية الطرح لكلا المعادلتين .

3 – نجد قيمة أحد المتغيرين ثم نعوض القيمة التي حصلت عليها في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة المتغير الآخر .

مثال : أوجد حل النظام التالي من المعادلات :

$$\begin{array}{r} 5x+y=3 \\ x-y=9 \\ \hline 6x \quad =12 \end{array} \longrightarrow X = 2$$

لاحظ أن معامل المتغير y في كلا المعادلتين متساو ومختلف في الإشارة

وبتعويض قيمة x = 2 في المعادلة الثانية , نحصل على

$$2 - y = 9 \longrightarrow -y = 7 \longrightarrow y = -7$$

و للتأكد من صحة الحل , نقوم بتعويض قيمة x = 2,y = -7 في كلا المعادلتين :

$$5\,(2) + -7 = 10 - 7 = 3$$

$2 - ( - 7 ) = 2 + 7 = 9$

( فالحل صحيح ) .

مثال : أوجد حل المعادلات التالية :

$5x + 2y = 3$

$2x + 3y = -1$

نلاحظ أن معاملات المتغيرين xأوy في كلا المعادلتين غير متساوية

الحل : من خلال ضرب المعادلة الأولى بالعدد 3 والمعادلة الثانية بالعدد 2 ثم نقوم بعملية الطرح , فنحصل على :

$$\begin{array}{c} 15x+6y=9 \\ 4x+6y=-2 \\ \hline 11x \;=\; 11 \rightarrow x=1 \end{array}$$

وبتعويض قيمة $x=1$ في المعادلة الأولى ,نحصل على :

$5 ( 1 ) + 2 y = 3$

$\longrightarrow 2y = 3 - 5$

$\longrightarrow 2y = -2 \rightarrow y = -1$

وللتحقق من صحة الحل , نعوض قيمة $x = 1 , y = -1$ في كلا المعادلتين :

$5 ( 1 ) + 2 ( -1 ) = 3$ الأولى

$5 - 2 = 3$

$2 ( 1 ) + 3 ( -1 ) = - 1$ الثانية

$2 - 3 = - 1$

2 – طريقة التعويض :

تتلخص هذه الطريقة في إيجاد قيمة احد المتغيرين بدلالة الآخر ومن ثم تعويض هذه القيمة في المعادلة الأخرى وبذلك نحصل على معادلة بمجهول واحد فقط لنجد قيمته كما تعلمنا سابقا ثم نستخدم هذه القيمة لإيجاد قيمة المجهول الآخر من خلال التعويض بأحد المعادلتين .

مثال : أوجد قيمة $x , y$ التي تحقق النظام التالي من المعادلات :

$2x - y = 4$

$X + 2y = - 3$

الحل : من خلال كتابة المتغير $x$ في المعادلة الثانية بدلالة $y$ , نحصل على :

$X = -2y -3$

وبتعويض قيمة $x$ من المعادلة الثالثة في المعادلة الأولى , نحصل على :

$2 ( -2y -3 ) – y = 4$

$-4y – 6 – y = 4$

$-5y = 6 + 4 \rightarrow -5y = 10$

$Y = - 2$

ولإيجاد قيمة $x$ نعوض قيمة $y$ إما في معادلة (1) أو ( 2)

$X + 2 ( -2 ) = - 3$

$X – 4 = -3 \rightarrow x = 4 + - 3$

$X = 1$

مجموعة الحل هي : $x = 1 , y = -2$

وللتأكد من صحة الحل :

$2 ( 1) + 2 = 4$

$1 + 2 ( -2 ) = -3$

مثال : بالرجوع إلى المثال الأول من طريقة الحذف

$5x +y = 3$

$X – y = 9$

$X=2$

$Y =-7$

الحل من خلال الطريقة السابقة

الحل : يمكن كتابة $x$ بدلالة $y$ من المعادلة الثانية لنحصل على :

$X = y + 9$

وبتعويض قيمة $x$ من المعادلة (3) في المعادلة (1) فنحصل على :

$5( y + 9 ) + y = 3$

$5y + 45 + y = 3$

$\rightarrow 6y = 3 – 45$

$\rightarrow 6y = -42 \rightarrow y =- 7$

ولإيجاد قيمة المتغير x , نعوض y = -7 إما في المعادلة (1) أو (2 ) :

$X – ( -7 ) = 9$

$X + 7 = 9 \rightarrow x = 2$

سؤال : أوجد حل النظام التالي من المعادلات :

1 – بطريقة الحذف . 2 - بطريقة التعويض .

$-2x + y = - 1$

$3 x – y = 0$

ملاحظة ..( أرجو التنبيه إذا كان هناك خطأ )...

بالتوفيق لكم جميعاً

.... انا ....

## مبادىء الرياضيات : ملخص المحاضرة العاشرة

تابع الفصل الخامس : المعادلات الرياضية :

4 – معادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد :

ويكتب مثل هذا النوع من المعادلات على الصورة التالية :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حيث $a,b,c \in R$

$$a \neq 0$$

بعض الحالات المختلفة لهذه الصيغة :

1 – في حالة $b = 0$ :

يصبح شكل المعادلة التربيعية على الصورة :

$$ax^2 + c = 0$$

وحل مثل هذا النوع من المعادلة هو :

$$ax^2 = - c$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

مثال : اوجد حل المعادلة التالية :

$$x^2 - 49 = 0$$

الحل : $x^2 = 49$

$\longrightarrow X = \sqrt{49} = \pm 7$

مثال : اوجد قيمة $x$ التي تحقق المعادلة

$5x^2 + 125 = 0$

الحل : $5x^2 = - 125$

$x^2 = \frac{-125}{5}$

$x^2 = -25$

عدد غير حقيقي (غير معروف ) =

$x = \sqrt{-25}$

ب ) إذا كان قيمة $c = 0$ :

فتصبح المعادلة على الصورة التالية :

$ax^2 + b x = 0$

حيث يتم حل مثل هذا النوع من المعادلات من خلال اخراج العامل المشترك بين الحد والثاني فتصبح المعادلة على الصورة :

$X ( a x + b ) = 0$

$X = 0$ or $a x + b = 0$

$A x = - b$

$X= -b/a$

مثال : اوجد حل المعادلة التالية :

$3x^2 - 27 x = 0$ إخراج $3 x$ كعامل مشترك بين الحد الأول و الحد الثاني .

$3x ( x – 9 ) = 0$

$3x = 0$ or $x – 9 = 0$

$X = 0$ $x = 9$

ج ) إذا كانت $a\neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

فبالتالي تصبح المعادلة على صورتها الأصلية كاملة وهي :

$ax^2 + b x + c = 0$

ويمكن حل هذا النوع من المعادلات بأحد الطرق التالية :

1 – طريقة التحليل :

حيث يتم تحليل المعادلة التربيعية إلى مقدارين جبريين ويتم استخدام قاعدة " حاصل ضرب مقدارين يساوي صفراً , فإما المقدار الأول = صفر أو المقدار الثاني = صفر .

مثال : اوجد حل المعادلة :

$x^2 - 2x + 1 = 0$ لهذه المعادلة حل وحيد فقط

الحل : $( x - 1 ) ( x - 1 ) = 0$

ومنه : $x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$

مثال : اوجد حل المعادلة :

$x^2 - 8 x + 15 = 0$

الحل : من خلال التحليل المباشر ( المقص )

$( x - 3 ) ( x - 5 ) = 0$

ومنه : $x - 3 = 0 \longrightarrow x = 3$

Or $x - 5 = 0 \longrightarrow x = 5$

( للتأكد : عندما $x = 3$ :

$9 - 8 ( 3 ) + 15 = 0$

$24 - 24 = 0$

عندما $x = 5$ :

$25 - 8 ( 5 ) + 15 = 0$

$40 - 40 = 0$

ب ) طريقة القانون العام : والصيغة العامة لهذه الطريقة هي :

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث $a$: معامل $x^2$ , $b$ : معامل $x$ , $c$ : الحد الثابت

ملاحظة : المقدار $b^2 - 4\ ac$ = المميز .

وهنالك ثلاث حالات مختلفة للمميز :

1 ) اذا كان المميز > 0 صفر :

فيكون للمعادلة التربيعية حلان مختلفان

2 ) إذا كان المميز = صفراً .

فيكون للمعادلة التربيعية حل واحد فقط وهو . $x = -b/2a$

3 ) إذا كان المميز < صفر .

فإنه لا يوجد أي حل حقيقي للمعادلة التربيعية

مثال : اوجد حل كل من المعادلات التالية باستخدام القانون العام :

1 ) $2x^2 + x - 15 = 0$

الحل : $a=2 , b = 1 , c = -15$

وبتعويض هذه القيمة في القانون العام نحصل على :

$$X = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(2)(-15)}}{2\,(2)}$$

$$= \frac{-1\pm\sqrt{1+120}}{4}$$

$= \frac{-1\pm\sqrt{121}}{4}$ ⟵ المميز >0 وبالتالي سيكون لدي جذران (حلان ) لهذه المعادلة :

$$= \frac{-1\pm 11}{4}$$

$X = \frac{-1+11}{4}$ or $x = \frac{-1-11}{4}$

=10/4 2.5 = -12/4= -3

2) $x^2 - 2x + 3 = 0$

الحل : $a = 1 , b = -2 , c = 3$

$$X = \frac{(b)\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2\,(a)}$$

$$= \frac{2\pm\sqrt{4-4(1)(3)}}{2}$$

$$= \frac{2\pm\sqrt{-8}}{2}$$

نلاحظ أن المميز سالبا وبالتالي لايوجد لدينا أي حل حقيقي .

3 ) $2x^2 - 2x = -1/2$

يجب إعادة كتابة هذه المعادلة على الصورة العامة :

$$2x^2 - 2x + 1/2 = 0$$

$a=2 , b = -2 , c = 1/2$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2 4ac}}{2a}$$

$= \frac{2\pm\sqrt{4-4(2)(\frac{1}{2})}}{2(2)} = \frac{2\pm\sqrt{0}}{4}$

قيمة المميز = 0 حل وحيد فقط

= 2/4= 1/2

مسائل وتمارين :

b=0 $1 )\ 5x^2 - 1/5 = 0$

c = 0 $2 )\ -3x^2 - 12x = 0$

a=2 $3 )\ 2x^2 - 3x - 1 = 0$

b=-3

c=-1 من الصعوبة استخدام التحليل المباشر لحل مثل هذا النوع من المعادلات فإننا سنلجأ إلى القانون العام

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

المميز

سالباً (لا يوجد حل ) صفر ( حل وحيد ) موجباً ( يوجد حلين للمعادلة )

ملاحظة ..( أرجو التنبيه إذا كان هناك خطأ )...

بالتوفيق لكم جميعاً

.... انا ....

## مبادئ الرياضيات : ملخص المحاضرة المباشرة الثانية (2) .

الفصل الرابع : المقادير الكسرية

جمع , طرح , ضرب و قسمة المقادير الكسرية :

حل تمارين ومسائل خاصة بهذا الفصل :

السؤال : اوجد ناتج ما يلي بأبسط صورة :

$$1 - \quad \frac{3x}{x-3} + \frac{1}{x^2-9} = \frac{3x}{(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

وبضرب الحد الأول للمقدار الكسري بـ (x+3)

لتوحيد المقامات :

$$= \frac{(x+3)}{(x+3)} \times \frac{3x}{x-3} + \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{3x^2+9x+1}{x^2-9}$$

$$2 - \quad {}^{2}/_{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{x-1}{x}$$

نلاحظ أن لضرب أولوية أولاً قبل عملية الجمع , ونتج أن :

مقامات متساوية نجمع البسط مع البسط مقسوما على المقام نفسه

$$= {}^{2}/_{x^2} + \frac{x-1}{x^2}$$

$$= \frac{x+1}{x^2}$$

$$3 - \quad \frac{1}{x^2-4} \div \frac{5}{x+2}$$

نحول عملية القسمة إلى ضرب مع اخذ مقلوب المقدار الكسري الثاني .

$$= \frac{1}{(x-2)(x+2)} \times \frac{(x+2)}{5} = \frac{1}{5(x-2)} = \frac{1}{5x-10}$$

$$4 - \frac{7-x}{x} - \frac{x^2-2x+1}{5}$$

توحيد المقامات أولا : حيث نضرب مقام الأول ( x) في المقدار الثاني والمقام الثاني (5) في المقدار الأول .

$$= {}^{5}\!/_{5} \times \frac{7-x}{x} - \frac{x^2-2x+1}{5} \times {}^{x}\!/_{x} \qquad = \frac{35-5x}{5x} - \frac{x^3-2x^2+x}{5x}$$

$$= \frac{35-5x-x^3+2x^2-x}{5x}$$

لاحظ عملية توزيع اشارة الطرح على جميع حدود بسط المقدار الثاني .

$$= \quad \frac{-x^3+2x^2-6x+35}{5x}$$

الباب الخامس : المعادلات

المسائل والتمارين الخاصة لهذا الباب :

1 ) $-6x-3=9$

$\longrightarrow -6x=9+3$

$\longrightarrow -6x=12 \longrightarrow x= \frac{12}{-6} = -2$

2 ) $2x- 1/2y = 1$

$\longrightarrow 2x = 1/2\ y +1$

$\longrightarrow X = \frac{\frac{1}{2}y+1}{2}$

$\longrightarrow X= 1/4\ y + 1/2$

3 ) $-3y + 1/2\ x= 1$ where $y= 1$ :

$\longrightarrow -3\ (1) + 1/2\ x = 1$

$\longrightarrow -3 + 1/2\ x = 1$

$\longrightarrow 1/2\ x = 1+3$

$\longrightarrow 1/2\ x = 4$

$\longrightarrow X = 4 \times 2 = 8$

اوجد حل النظام التالي من المعادلات :

$-2x + y = - 1$

$3x-y = 0$

1 – بطريقة الحذف :

نلاحظ تشابه معامل المتغير y مع اختلاف الإشارة فنقوم بعملية الجمع , وينتج أن :

$$\begin{array}{c} -2x+y=-1 \\ \underline{3x-y=0} \\ x=-1 \end{array}$$

وبتعويض قيمة x= -1 في المعادلة الثانية , ينتج أن :

$\longrightarrow 3(-1) - y = 0$

$\longrightarrow -3-y=0 \longrightarrow -3 = y$

وفي حال التأكد من صحة الحل , نعوض الناتج في النظام المعطى في السؤال .

2 – طريقة التعويض :

من خلال المعادلة الثانية , نجد أن :

$3x = y$ ——— (3)

وبتعويض هذه النتيجة في المعادلة (1) , نحصل على :

$-2x + 3x =- 1$

$\longrightarrow X = -1$

وبتعويض نتيجة x في معادلة 1 أو 2 :

نحصل على قيمة y :

$-2(-1) + y = -1$

$\longrightarrow -2 + y = -1$

$\longrightarrow Y = -1 -2$

$Y = -3$

5 ) $5x^2 - 1/5 = 0$

$5x^2 = 1/5$

ضرب طرفي المعادلة بالعدد 1/5 لتخلص من معامل x

$\longrightarrow x^2 = 1/5 \times 5$

$\longrightarrow x^2 = 1/25$

$x = \sqrt{\frac{1}{25}} \rightarrow x = 1/5$

6 ) $-3x^2 - 12x = 0$

من خلال إخراج العامل المشترك - 3x :

$-3x(x + 4) = 0$

$\longrightarrow$ $-3x = 0$

$\longrightarrow$ $X = \frac{0}{-3} = 0$

Or $x + 4 = 0$

$\longrightarrow$ $X = -4$

7 ) $2x^2 - 3x - 1 = 0$

$\downarrow \quad \nearrow \quad \downarrow$

A b c

يمكن حل هذه المعادلة من خلال استخدام القانون العام , حيث نجد أولا المميز :

$$\text{المميز} = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 - 4\,(2)(-1)}$$

$$= \sqrt{9+8} \quad = \sqrt{17}$$

وبالتالي جذور المعادلة هي :

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{\text{المميز}}}{2a}$$

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{17}}{2(2)}$$

$\nearrow$

$\frac{3+\sqrt{17}}{4}$ or $\frac{3-\sqrt{17}}{4}$

ملاحظة ..( أرجو التنبيه إذا كان هناك خطأ )...

بالتوفيق لكم جميعاً

.... انا ....

## مبادىء الرياضيات : المحاضرة 11

5 ) المتراجحات الخطية بمجهول واحد :

تعريف : المتراجحة هي عبارة عن معادلة ولكن تأخذ أحد الاشارات التالية :

$>$ , $\geq$ , $\leq$ , $<$ بدلا من إشارة =

ومن الأمثلة على ذلك :

$$5x-4 \geq 1$$

$$3x - 2 < 5x + 6$$

وهي عبارة عن امثله على المتراجحات الخطية .

- عملية حل المتراجحات الخطية بمجهول واحد ( x ) تتم من خلال ايجاد قيمة المتغير x الذي يحقق طرفي المتراجحه . ويجب ملاحظة أن اشارة المتراجحة سوف تتغير عند الضرب أو القسمة بعدد سالب , أما بقية العمليات الجبرية كالجمع أو الطرح من عدد موجب أو سالب أو الضرب والقسمة بعدد موجب فتبقى اشارة المتراجحة كما هي .

مثال : اوجد حل المتراجحة التالية :

$$3x + 11 \geq 5x - 1$$

الحل : لحل هذه المتراجحة نطبق الاسلوب المتبع في حل المعادلات الخطية بمجهول واحد حيث نقوم بتجميع المتغيرات في طرف والاعداد الثابتة في الطرف الاخر , بحيث نحصل في النهاية على قيمة المتغير x لوحدة .

$$3x - 5x \geq -1 - 11$$

$$\frac{-2x}{-2} \geq \frac{-12}{-2}$$ بقسمة طرفي المتراجحة على العدد -2

$$X \leq 6$$

مجموعة الحل لهذه المتراجحة هي : $x = \{x : x \leq 6\}$ or $(-\infty , 6]$

مثال : اوجد حل المتراجحة :

$4x + 3 \leq 1$

$4x \leq 1 - 3$

$\frac{4x}{4} \leq \frac{-2}{4}$ بقسمة طرفي المتراجحة على العدد 4 تحصل على

$X \leq -1/2$

مجموعة الحل هي :

$X = \{x : x \leq -\frac{1}{2}\}$ or $(-\infty , -1/2]$

مثال : اوجد حل المتراجحة :

$7x - 3 > 2x - 18$

الحل :

$7x - 2x > -18 + 3$

$\frac{5x}{5} > \frac{-15}{5}$

مجموعة الحل هي :

$X > -3$ or $(-3 , \infty)$

## نهاية الفصل الخامس

مسائل وتمارين :

أوجد حل كل من المتراجحات الخطية التالية :

1 ) $-1/2 x \geq 4$

2 ) $3x - 1 < x + 1$

3 ) $3 \leq 2x - 5 \leq 5$

## الفصل السادس : المتواليات

تعريف : المتوالية هي عبارة عن متتابعة لمجموعة من الاعداد مرتبة حسب قاعدة معينة أو صيغة معينة ويسمى كل عنصر من عناصرها حداً . ومن الأمثلة عليها :

1 ) $\{2 , 4 , 6 , 8 , ......\}$

2 ) $\{1 , 1/2 , 1/4 , 1/8 , ...\}$

وتقسم المتواليات الى قسمين :

1 ) المتواليات الحسابية .

2 ) المتواليات الهندسية .

أولا : المتواليات الحسابية :

تعريف : المتوالية الحسابية هي عبارة عن متتابعة من الأعداد كل حد من حدودها يزيد أو ينقص عن الحد الذي يسبقه بمقدار ثابت ( باستثناء الحد الأول ) .

إذا كان كل من :

$a$ : يرمز للحد الأول

$d$: أساس المتوالية وهو عبارة عن الفرق بين أي حد والحد الذي يسبقه ( ماعدا الحد الأول ) .

فيمكن كتابة المتوالية الحسابية على الشكل التالي :

$a, a+d , a + 2d , a + 3d ,......$

حيث يسمى :

$a$ : الحد الأول .

$a+ d$ : الحد الثاني .

وهكذا .... وبالاستمرار بهذه الطريقة يمكن إيجاد قيمة الحد $n$ ( $t n$ ) $\leftarrow$ الحد الذي موقعه العدد $n$

من خلال الصيغة التالية : $tn = a + ( n – 1 ) d$

حيث $n \in N$ ( الأعداد الطبيعية )

أما لإيجاد مجموع $n$ من حدود متوالية حسابية فيمكن تطبيق صيغة القانون التالية :

$T n = n/2 [ 2a + ( n – 1 ) d ]$ $\longleftarrow$ Total

حيث $a$ : الحد الأول .

$d$ : أساس المتوالية .

$n$ :عدد الحدود المطلوب إيجاد مجموعها .

وأيضا يمكن إيجاد مجموع $n$ من حدود متوالية حسابية علم فيها الحد الأول $a$ والحد الأخير $b$ من خلال الصيغة التالية : $t n = n/2 [ a + b ]$

مثال : اوجد قيمة الحد السادس عشر من المتوالية :

$4 , 7 , 10 , 13 , .............$

ثم اوجد مجموع أول ستة حدود ؟

المطلوب : $t16?$ $T 6 ?$

الحل : $a = 4$ , $d = 7 – 4 = 3$

$T 16 =??$

$T 16 = a + ( n – 1 ) d$

$= 4 + ( 16 – 1 ) . 3$

$= 4 + 15 (3 )$

$= 4 + 45 = 49 .$

( للتأكد : $4 , 7 , 10 , 13 , 16 , 19 , 22 , 25 , 28 , 31 , 34 , 37 , 40 , 43 , 46 , \underline{49} , 52 , ..........$

الحد السادس

$T 6 = ??$

$T 6 = n/2 [ 2 a + ( n – 1 ) d ]$

$= 6/2 [ 2 (4) + ( 6 – 1 ) . 3 ]$

$= 3 [ 8 + 15 ]$

$= 3 (23 ) = 69$

( للتأكد : $t 6 = 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 = 69$ )

مثال : اوجد مجموع أول 12 حدا من المتوالية الحسابية $3 , 8 , 13 , ........$

الحل : $d = 8 – 3 = 5$ , $9 = 3$

$T 12 = n/2 [ 2a + ( n – 1 ) d ]$

$= 12/2 [ 2 ( 3 ) + ( 12 – 1 ) . 5 ]$

$= 6 [ 6 + 55 ] = 6 ( 61 ) = 366$

مثال : أوجد مجموع أول عشرة حدود في متوالية حسابية فيها الحد الأول =5 , والحد الأخير = 100 ؟

الحل : $t\ 10 = n/2 [ 5 + 100 ]$

$= 10/2 [ 105 ] = 5 (105 )$

$= 525$

سؤال : متوالية حسابية حدها الأول = 1 وأساسها = -5 , اوجد :

قيمة الحد العاشر 1 ) $t\ 10$

مجموع أول عشرة حدود 2 ) $T\ 10$

ملاحظة ..( أرجو التنبيه إذا كان هناك خطأ )...

بالتوفيق لكم جميعاً

## مبادىء الرياضيات : المحاضرة 12

تابع الفصل السادس : المتواليات

تقسم المتواليات إلى قسمين :

1 ) المتواليات الحسابية .

الصيغة العامة لها . $a,a+d,a+2d,\ldots\ldots$ ⟵ الحد الأول

↓

اساس المتوالية والذي يساوي الفرق بين أي حد والحد الذي يسبقه باستثناء الحد الأول .

يمكن قيمة إيجاد أي حد من خلال الصيغة :

$tn = a + ( n - 1 ) d$

وكذلك يمكن إيجاد مجموع n من الحدود من خلال الصيغة :

$T\ n = n/2 [ 2a + ( n - 1 ) d ]$

وكذلك إذا علم الحد الأول والحد الأخير في متوالية حسابية فيمكن إيجاد مجموع n من الحدود من خلال الصيغة

$T\ n = n/2 [ a + b ]$

مثال : اوجد قيمة الحد الخامس عشر ومجموع أول عشرة حدود من المتوالية $2 , -3 , -8 , -13 , \ldots\ldots$

الحل : $a = 2$

$d= -3 -2$

$= - 5$

المطلوب :

$t\ 15 = a + ( n - 1 ) d$

$= 2 + ( 15 - 1 ) . - 5$

$= 2 + 14 ( -5)$

$= 2 – 70 = - 68$

$T10 = n/2 [ 2a + ( n – 1 ) d]$

$= 10/n [ 2 (2) + ( 10 – 1 ) ( -5) ]$

$$\begin{array}{r} 2 \\ -3 \\ -8 \\ -13 \\ -18 \\ -23 \\ -28 \\ -33 \\ -38 \\ \underline{-43} \\ -205 \end{array}$$

$= 5 [ 4 – 45 ]$

$= 5 ( - 41 ) = - 205$

ثانياً : المتواليات الهندسية :

تعريف : المتوالية الهندسية هي عبارة عن متتابعة من الأعداد كل حد من حدودها يمكن إيجاده من خلال ضرب الحد الذي يسبقه بعدد معين ( باستثناء الحد الأول ) .

فإذا كان a هي قيمة الحد الأول و r هي أساس المتوالية فيمكن الرمز لمتوالية هندسية على الصورة التالية :

$a, ar , ar^2,ar^3, ………$

حيث يمكن إيجاد قيمة أساس المتوالية r من خلال قيمة أي حد على العدد الذي يسبقه .

وبالاستمرار بهذه الطريقة , يمكن أن نجد قيمة أي حد في متوالية هندسية وليكن tn بالصيغة التالية :

$tn = ar^{n-1}$

حيث $n \in \underset{\text{الأعداد الطبيعية}}{\underset{\downarrow}{N}}$

وكذلك يمكن إيجاد مجموع n من حدود متوالية هندسية حدها الأول a و أساسها r حسب الصيغة التالية :

$$T\,n = \frac{a\,(\,r^{\,n}-1)}{r-1}\ , \quad r \neq 1$$

وأيضا يمكن إيجاد مجموع عدد لا نهائي من حدود متوالية هندسية من خلال الصيغة التالية :

$$T\infty\ = \frac{a}{1-r}\ , \quad \mathrm{I}\,r\,\mathrm{I} < \ 1$$

ويسمى هذا النوع من المتواليات بالمتوالية الهندسية اللانهائية .

مثال : متوالية هندسية فيها الحد الأول = 3 وأساسها = 3 , اوجد :

1 ) قيمة الحد السادس ؟

2 ) مجموع أول خمسة حدود ؟

المطلوب : 1) t6 ? 2) T 5?

بمكن كتابة عن حد هذه المتوالية كما يلي :

الحد السادس
↓

3 , 9 , 27 , 81 , 243 , .....729

1 ) $t6 = a\, r^{n-1}$

$= 3 ( 3 )^{6-1}$

=3 (3) 5 = 3 (243 ) = 729

2 ) $T\,5 = \frac{a\,( r^{n}-1 )}{r-1}$ , $r \neq 1$

$= \frac{3 ( 3^{5} - 1 )}{3 - 1}$

$= \frac{3 ( 243-1 )}{2}$

$= \frac{3 ( 242 )}{2} = 3 ( 121 ) = 363$

للتأكد من صحة القانون :

T 5 = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 363

مثال : متوالية مكتوبة على الصورة التالية :

متوالية متناقضة 1 , 1/2 , 1/4 , 1/8 , ........

اوجد: 1 ) نوع المتوالية ؟

2 ) قيمة الحد السادس ؟

3 ) مجموع أول أربعة حدود ؟

الحل :

1 ) متوالية هندسية حيث أن

-1 $\frac{a2}{a1} = \frac{a3}{a2} = \frac{a4}{a3} = r$

$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1/8}{1/4} = 1/2$
↓
أساس المتوالية

وبالتالي *a = 1* , *r = 1/2*

-2

$t\,6 = a\, r^{n-1}$

$= 1 ( 1/2 )^{6-1} = ( 1/2 )^{5} = 1/2 . 1/2 . 1/2 . 1/2 . 1/2$

$= 1/32$

3 –

$$T\,4 = \frac{a\,(r^{\mathrm{n}}-1}{r-1} = \frac{1\,(\,1/2^{\,4} - 1\,)}{1/2 - 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{16} - \frac{1.16}{1.16}}{\frac{1}{2} - \frac{1.2}{1.2}} = \frac{\frac{1}{16} - \frac{16}{16}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{2}}$$

$$= \frac{-15/16}{-1/2} = \frac{15}{16} * \frac{2}{1} = 15/8$$

( التأكد من صحة الحل : $8.1/8.1 + 4.1/4.2 + 2.1/2.4 + 1/8 = 8/8 + 4/8+ 2/8 +1/8 = 15/8$

مثال : متوالية هندسية لانهائية فيها الحد الأول =$2$ وأساسها = $1/4$ , اوجد $T\,\infty$ ؟

الحل : ( المجموع اللانهائي )

$$T\,\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3/4} = 2\,.\,4/3 = 8/3 \qquad |r| < 1$$

$$|\,1/4\,| < 1$$

$2\ ,\ 1/2\ ,1/8\ ,\ 1/16\ ,\ ............$

↙ ↓

$a\,1 \quad a2$

$$r = \frac{a2}{a1} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

مسائل وتمارين :

1 ) متوالية هندسية فيها $a = -1$ , $r = 2$

اوجد : 1 ) $t10$ ?

2 ) $T\,7$ ?

2 ) إذا كان لديك المتوالية

$1\ ,\ 5\ ,\ 25\ ,\ 125\ ,\ ........$

اوجد :

1 ) نوع المتوالية ؟

2 ) أساسها ؟

3 ) قيمة الحد الخامس ؟

4 ) مجموع أول أربعة حدود ؟

5 ) المجموع اللانهائي لحدود المتوالية في هذا السؤال إذا أمكن ذلك ؟

ملاحظة ..( أرجو التنبيه إذا كان هناك خطأ )...

بالتوفيق لكم جميعاً

.... انا ....

## **الفصل الخامس : المتراجحات الخطيه ..**

**1)** $\frac{-1}{2}\times\geq 4 \to x \leq -8$

**بضرب طرفي المتراجحه بالعدد→** $\frac{-2}{1}$

**مجموعة الحل هي** $\{-\infty,-8\}$

**2)**$3x-1<x+1=3x-x<1+1$

$$\frac{2}{2}\times<\frac{2}{2}$$

**=x21**

**مجموعة الحل هي** $(-\infty, 1\,\}$

**3)**$3\leq 2x-5\leq 5$

$$\begin{array}{l}+5 \qquad\quad +5+5\\ \hline \frac{8}{2}\leq\frac{2x}{2}\leq\frac{15}{2}\end{array}$$

**4**$\leq x\leq 5$

**منطقة الحل هي {4,5}**

## **الفصل السادس : المتواليات**

**سؤال : متواليه حسابيه d=-5,a=1**

**1,-4,-9,-14,-19 ................**

**1)t10 =a+(n-1)d**

**=1+(10-1)(-5)**

**=1+-45=-44**

**2)t10=**$\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

**=**$\frac{10}{2}2(1)+(10-1)(-5)$

**=5{2+45}=5(-43)=-215**

**سؤال متواليه هندسيه r=2,a=-1**

**اوجد ..**

**T10=** $ar^{n-1}$

**=(-1)**$(2)^{10-1}$

**=-1**$(2)^{9}$

**=-1x512=-512**

**R=2 ,a=-1**

**T7=**$\frac{a(r^{n}-1)}{r-1}$

**=**$\frac{-1(2^{7}-1)}{2-1}$

**=**$\frac{-1(128-1)}{1}=-1(127)$

**=-127**

**مانوعه ؟ هندسيه** **r=**$\frac{25}{5}=5$

**=**$\frac{125}{25}=5$

**T5=a**$r^{n-1}$

**=1(5)**$^{4}5x5x5x5$

**=625**

**tn=**$\frac{a(r^{n}-1)}{r-1}$

**=**$\frac{1(5^{4}-1)}{5-1}$

**=**$\frac{624}{4}=156.$

**ايجاد المجموع اللانهائي :** $t\infty=\frac{9}{1-r}$ **IrI**$<1$

**l 5l$<$ 1**

**لا نستطيع ايجاد المجموع اللانهائي .**

## الفصل السابع : المصفوفات

**تمرين 1 ..**

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & \\ 5 & -\frac{1}{2} & \\ 1 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & -1 & \\ 3 & \frac{1}{2} & \\ 2 & -1 & \end{bmatrix}$$

$$1)a\text{-}b=\left[\left[\begin{matrix}2 & -(-1) \\ \frac{-1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -(-1)\end{matrix} \quad \vdots\right]\begin{matrix}-1 & -2 \\ 5 & -3 \\ 1 & -2\end{matrix} \quad \right]$$

$$=\begin{bmatrix}-3 & 3 & \\ 2 & -1 & \\ -1 & 1 & \end{bmatrix}$$

**2)b+a=a+b**

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & \\ 8 & 0 & \\ 3 & -1 & \end{bmatrix}$$

$$3)\text{-}2a=\begin{bmatrix}2 & -4 & \\ \frac{-5}{2} & 1 & \\ -2 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$4)b\text{-}b=\begin{bmatrix}0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

**=0**

**تمرين 2**

**A={-1 2 0 4 }**

$$\begin{matrix} & -1 \\ & -3 \\ B= & 1 \\ & 0\end{matrix}$$

1)a$\times b=\{-1x-1+2x-3+0x1+4x\}$

=(-5)1$\times$ 1

2)3ab=3(ab)=3a={-3 6 0 1 2 }

(3a)(b)=(3+-18)=(-15)3(5)=-15

A=$\begin{matrix}4 & 2\\ 8 & -2\end{matrix}$ b=$\begin{matrix}-3\\ -1\end{matrix}$

Ab=$\begin{matrix}-12 & +2\\ -24 & + \ 2\end{matrix}$ = $\begin{matrix}-14\\ -22\end{matrix}$

## الفصل الثامن المحددات

A=$\begin{matrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{matrix}$

l Al =dcr(a)

=-1x1-(2x-2)

=-1+4=3

(0)+3(0-5)

l bl=1(-1)-2

=-1-15=-16

A=$\begin{matrix}-2 & 3\\ x & -1\end{matrix}$

l al=2 ,x=?

2=(-2)(-1)-(3)(x)

2=2-3x

-3x=0→ $x=0$

## مبادئ الرياضيات : المحاضرة 13

الفصل السابع : المصفوفات

تعريف : نقول أن المصفوفة عن عبارة عن تنظيم للأعداد مرتبة على شكل صفوف أو أعمدة في جدول مستطيل الشكل حيث يتكون هذا المستطيل من m من الصفوف و n من الأعمدة وتوضع هذه الأعداد الحقيقية داخل أقواس كبيرة ويرمز عادة للمصفوفات بالأحرف الكبيرة .......A,B,C أما عناصر المصفوفة فيرمز لها بالأحرف الصغيرة ......a,b,c

ويمكن كتابة الصورة العامة لأي مصفوفات كالآتي :

$$A=\begin{bmatrix} a\ 11 & a12 & a13 & \ldots.\ a\ 1n \\ a21 & a22 & a23 & \ldots.\ a\ 2n \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ am\ 1 & am2 & am3 & \ldots.\ amn \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن هذه المصفوفة مكونة من m صف و n عمود .

ويمكن تعرف مرتبة المصفوفة ( درجتها ) بأنها عبارة عن حاصل ضرب الصفوف في الأعمدة ( mxn ) .

يرمز لكل عنصر من عناصر المصفوفة بحرف صغير aij ( حرف صغير ورقمين صغيرين الأول i يمثل رقم الصف والثاني j يمثل رقم العمود )

ومن الأمثلة على المصفوفات :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 2\times 3 \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} 2\times 2$$

( مصفوفة مربعه )

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad 3\times 1 \qquad , \qquad D = [-5] \quad 1\times 1$$

(مصفوفة مربعة تتكون فقط من عنصر واحد )     ( مصفوفة عمودية )

E = [10   7   5   4   -1] 1× 5

( مصفوفة أفقيه )

والآن سنتعرف على بعض من المصفوفات المعروفة بأسماء معينة وأشكال محدودة :

1) المصفوفات المستطيلة :

دائما عدد الصفوف ≠ عدد الأعمدة     $(m\neq n)$

ومثال على ذلك :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad 2\times 3$$

وفيها عدد العناصر =6

2 ) المصفوفة المربعة :

إذا كان عدد الصفوف ≠ عدد الأعمدة ,سميت المصفوفة المستطيلة بالمصفوفة المربعة .

بمعنى ( n=n) أو ( m=m)

ومثال على ذلك :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3\times 3$$

3 ) المصفوفة الصفرية :

وهي المصفوفة التي يكون فيها كل العناصر أصفار وسيرمز لها بالرمز 0 وتكتب على الشكل التالي :

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; 2\times 2 \quad , \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2\times 1$$

مصفوفة صفرية مستطيلة (عمودية )     مصفوفة صفرية مربعة

4 ) المصفوفة القطرية .

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي .

ومن الأمثلة عليها :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad 3\times 3$$

ويمكن كتابة المصفوفة القطرية على الصورة :     A = diag [2   1   -1   ]

5 ) مصفوفة الوحدة (الاحادية )

وهي المصفوفة القطرية التي يتكون فيها جميع عناصر القطر تساوي العدد 1

ومن الامثلة عليها :

$$I = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2X2$$

$$I = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3x3$$

وسوف نرمز للمصفوفة لمصفوفة الوحدة بالرمز I

(identity matyix)

تعريف : يقال بأن المصفوفتين A , B متساويتين

إذا فقط إذا حققت الشروط التالية :

1 ) درجة المصفوفة الأولى = درجة المصفوفة الثانية

$$m\,2 \times n\,2 \quad = m\,1 \times n\,1$$

2 ) إذا كانت العناصر المتناظرة في كلا المصفوفتين متساوية .

مثال : اوجد قيمة كل من x , y حيث :

$$\begin{bmatrix} 3 & x \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3y-1 \end{bmatrix}$$

الحل : العناصر المتناظرة متساوية حيث ان المصفوفة في الطرف الأيسر = المصفوف في الطرف الأيمن وبالتالي:

$X = -4$

$5 = 3y - 1 \rightarrow 3y = 5 + 1$

$\rightarrow 3y = 6$

$\rightarrow Y = 2$

مثال : اوجد قيمة المجاهيل فيما يلي :

$$\begin{bmatrix} 3 & x-2 \\ y & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -x \\ 2-y & 1/z \end{bmatrix}$$

$X - 2 = -x \rightarrow x + x = 2 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$

$Y = 2 - y \rightarrow y + y = 2 \rightarrow 2y = 2 \rightarrow y = 1$

$-5 = 1/z \rightarrow -5/1 = 1/z$

بالضرب التبادلي , نحصل على :

$-5\,z = 1 \rightarrow z = -1/5$

وللتأكد نعوض قيمة z في المصفوفة من الطرف الأيمن

$-5 = \frac{1}{-1/5}$

-5 = 1 x -5/1

تمرين : أوجد قيمة المتغيرات المجهولة إذا كان :

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 2y-4 \\ -1 \end{bmatrix} 3\text{x}1 \quad = \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{x-1} \\ y+1 \\ z \end{bmatrix} 3\text{x}1$$

ملاحظة ..( أرجو التنبيه إذا كان هناك خطأ )...

بالتوفيق لكم جميعاً

.... انا ....

# مبادئ الرياضيات : المحاضرة 14

## تابع الفصل السابع : المصفوفات

العمليات الجبرية على المصفوفات :

1 ) الجمع والطرح للمصفوفات .

2 ) ضرب المصفوفات .

أ) ضرب مصفوفة في عدد ثابت.
ب) ضرب مصفوفة صفية في مصفوفة عمودية .

ج) ضرب مصفوفتين .----

أولاً : عملية جمع وطرح المصفوفات .

يمكن إجراء عملية جمع عدة مصفوفات أو عملية طرح لمصفوفتين إذا كان لهم الرتبة نفسها ( الدرجة ) حيث نقوم بجمع أو طرح العناصر المتناظرة في كل مصفوفة حيث سنحصل في النهاية على مصفوفة جديدة بنفس الرتبة .

مثال : إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad 2x3 \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & -5 & -3 \end{bmatrix} \quad 2x3$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad 2x2$$

فبالإمكان جمع المصفوفة A مع B أو طرحهما من بعض أما جمع A أو B مع المصفوفة C أو طرحهم من C فهي عملية غير جائزة لاختلاف الرتب .

وسنحصل على :

$$A + B = \begin{bmatrix} 4+3 & 3+2 & 5+4 \\ 10+-1 & 7+-5 & 6+-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad 2x3$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 3+4 & 2+3 & 4+5 \\ -1+10 & -5+7 & -3+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن A + B = B + A ( عملية الجمع على المصفوفات عملية ابدالية ).

وبتطبيق عملية طرح المجموعات :

$$A - B = \begin{bmatrix} 4-3 & 3-2 & 5-4 \\ 10+1 & 7+5 & 6+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 11 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 3-4 & 2-3 & 4-5 \\ -1-10 & -5-7 & -3-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -11 & -12 & -9 \end{bmatrix}$$

وبالتالي . $A - B \neq -(B\text{-}A)$

بعض الملاحظات :

A+A+A = 3A

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 9 & 15 \\ 30 & 21 & 18 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

ثانياً : ضرب مصفوفة بعدد ثابت .

حيث نقوم بضرب جميع عناصر تلك المصفوفة بهذا العدد :

بمعنى : إذا كان العدد هو c , سنقوم بضرب c بالمصفوفة A وسنحصل على :

$$cA = \begin{bmatrix} c\,a11 & c\,a12 \ldots & c\,a1n \\ c\,a21 & c\,a22 \ldots & c\,a2n \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

مثال : إذا كان

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & -10 \end{bmatrix}$$

وكان c = 5 , d =-1

اوجد :

1 ) c B ? $cB = \begin{bmatrix} 4 \times 5 & 3 \times 5 \\ 2 \times 5 & 5 \times 5 \\ -1 \times 5 & -10 \times 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 10 & 25 \\ -5 & -50 \end{bmatrix} = B\,c$$

$$2\ )\ d\,B = \begin{bmatrix} -1 \times 4 & -1 \times 3 \\ -1 \times 2 & -1 \times 5 \\ -1 \times -1 & -1 \times -10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} = B\,d$$

نلاحظ أن عملية ضرب عدد ثابت بمصفوفة عملية أبدالية : c A = A c حيث : c عدد ثابت .

بعض الملاحظات على ضرب المصفوفات بأعداد ثابتة وجمعها :

إذا كان A , B مصفوفتين من الرتبة m x n وكانت $c , d \in R$ فان :

توزيع العدد الثابت على المصفوفتين ⟵ 1 ) c ( A + B ) = c A + c B

2 ) c(d A) = (c d ) A = ( d c ) A = d ( c A )

المصفوفة الصفرية → 3 ) c A = 0 → c = 0 or A = 0

4 ) إذا كانت $c \neq 0$ وكانت :

c A = c B فان المصفوفة B ⟵ A = B ⟶ المصفوفة A

ثالثاً : ضرب مصفوفة صفية في مصفوفة عمودية : إذا كان لدينا المصفوفة

مصفوفة صفية ⟶ $A = \begin{bmatrix} a11 & a12 \ldots\ldots & a1n \end{bmatrix}$

ولدينا المصفوفة $B = \begin{bmatrix} b11 \\ b21 \\ \vdots\ bm1 \end{bmatrix}$ ⟵ مصفوفة عمودية

فإن حاصل ضرب A X B هو قيمة واحدة فقط نحصل عليها كالآتي :

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 \ldots & a1n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b11 \\ b21 \\ bm1 \end{bmatrix} = a11\ b11 + a12\ b21 + a13\ b31 + \ldots + a1n\ bm1$$

بشرط عدد صفوف المصفوفة B ⟵ n = m ⟶ عدد صفوف المصفوفة A

مثال : إذا كان ت لدينا المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}\ 1x3 \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}\ 3x1$$

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}\ 1x4 \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ \\ \end{bmatrix}\ 4x1$$

الحل : $A\times B = [\,3\times 2 + 0\times 6 + 4\times 5\,] = [\,6+0+20\,] = [26]_{1x1}$

$CxD= [10 X 2 + 7 x -1 + 8 x -3 + 4 x 0 ]= [20-7-24+0]= [-11]_{1x1}$

نتيجة : $A_{mxl} \quad X \quad B_{lxn} \quad = D_{mxn}$

تمرين : إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

اوجد :

1 ) A – B

2) B + A

3 ) -2 A

4 ) B – B

تمرين 2 : إذا كانت

$A = [\,-1 \quad 2 \quad 0 \quad 4\,]$

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اوجد:

1 ) A B

2 ) 3 A B = 3 ( A B )

ملاحظة ..( أرجو التنبيه إذا كان هناك خطأ )...

بالتوفيق لكم جميعاً

.... انا ....

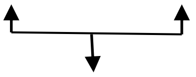
## مبادئ الرياضيات : المحاضرة 15

تابع الفصل السابع : المصفوفات

ثالثاً : ضرب مصفوفتين.

إذا كانت المصفوفة A من الرتبة mxp وكانت المصفوفة B من الرتبة pxn فان حاصل ضرب المصفوفتين A B , وليكن C هو مصفوفة من الدرجة mxn حيث تحدد عناصرها بأن يكون العنصر في الصف i والعمود j في C ناتج عن عملية ضرب i من A مع العمود j من B .

$$A \;\; mxp \;\; \times \;\; B \;\; pxn \;\; = \;\; C \;\; mxn$$



حتى تكون عملية الضرب على المصفوفات معرفة , يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية . ورتبة المصفوفة الناتجة من حاصل ضرب هي عبارة عن عدد الصفوف الأولى مضروباً في عدد أعمدة الثانية .

بشكل عام , عند ضرب مصفوفة في أخرى , فأننا نقوم بضرب جميع صفوف المصفوفة الأولى في أعمدة المصفوفة الثانية والمثال التالي يوضح ذلك :

مثال : إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \; 2X2 \, , \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \; 2x2$$

أوجد:

1 ) A B      2 ) B A

الحل :

$$1\,)\; A\,B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 0 + 3 \times 4 & 2 \times 2 + 3 \times 5 \\ -1 \times 0 + -1 \times 4 & -1 \times 2 + \; -1 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 19 \\ -4 & -7 \end{bmatrix} \; 2x2$$

$$2\,)\; B\,A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \times 2 + 2 \times -1 & 0 \times 3 + 2 \times -1 \\ 4 \times 2 + 5 \times -1 & 4 \times 3 + 5 \times -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \quad 2x2$$

نستنتج أن عملية الضرب المصفوفات عملية غير أبدالية , بمعنى :

$A\,B \neq B\,A$ .

مثال : إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \ 2x3 \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \ 3x2$$

اوجد :

1 ) A B        2 ) B A

1 ) A B =?

نلاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة A = عدد صفوف المصفوفة B وبالتالي يمكن إيجاد حاصل الضرب في هذه الحالة .

$$A\,B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \times 0 + 2 \times -1 \pm 4 \times -2 & 2 \times 2 + 2 \times 3 \pm 4 \times 4 \\ 0 \times 0 + \ -1 \times -1 + 7 \times -2 & 0 \times 2 + \ -1 \times 3 + 7 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -13 & 25 \end{bmatrix}$$

$$B\,A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \ 3X2 \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \ 2X3$$

$$= \begin{bmatrix} 0+0 & 0+\ -2 & 0+14 \\ -2+0 & -2+\ -3 & 4+21 \\ -4+0 & -4+\ -4 & 8+28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 14 \\ -2 & -5 & 25 \\ -4 & -8 & 36 \end{bmatrix} \quad 3X3$$

تعريف : مبدل المصفوفة (Tronspose)

إذا كانت المصفوفة A هي من الرتبة m x n فإن مبدل المصفوفة هي عبارة عن عملية تبديل الصفوف مع الأعمدة وسنرمز لها بالرمز $A^T$ :

بصورة رمزية , إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} a\,11 & a\,12 \\ a\,21 & a\,22 \end{bmatrix}$$

فأن $A^T = \begin{bmatrix} a\,11 & a\,21 \\ a\,12 & a\,22 \end{bmatrix}$

مثال : إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \quad 3x2$$

فإن $A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \ 2x3$

تعرف : المصفوفة المتماثلة .

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة n x n فنقول بأن A مصفوفة متماثلة إذا كان :

$A = A^T$

مثال : إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad 3X3$$

فإن :

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

حيث نلاحظ أن $A^T \neq A$ وبالتالي المصفوفة A غير متماثلة .

بينما إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

فإن

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

فنلاحظ بأن $A^T = A$

فنقول بأن المصفوفة A مصفوفة متماثلة .

-- بعض الملاحظات على المصفوفات المربعة :

-- إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن :

1 ) $A^2 = A X A$ .

2 ) $A^3 = A X A X A$

ونستطيع الاستمرار على هذا الشكل إلى أي عدد من المرات .

مثال : إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

أوجد $A^3$ ؟

الحل : $A^3 = A x A x A = A^2 x A$

$$A^2 = A x A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 6+-3 & 6+0 \\ -2+0 & -3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} =$ $A^2$ 2x2

$A^3 = A^2 . A= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6+-6 & 9+0 \\ -4+3 & -6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$

$A . A^2$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 6+-6 & 12+-4 \\ -3+0 & -6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$

مسائل وتمارين : إذا كانت

$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$ 2x2 , $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ 2x1

أوجد :

1 ) A B 2 ) B A 3 ) $A^2$ 4 ) $B^2$

نهاية الفصل السابع من المصفوفات .

ملاحظة ..( أرجو التنبيه إذا كان هناك خطأ )...

بالتوفيق لكم جميعاً

.... انا ....

## مبادئ الرياضيات : المحاضرة 16

الفصل الثامن : المحددات ( Deter minantes ).

تعريف : إذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة n x n , فإنه يوجد عدد حقيقي يرافق هذه المصفوفة ويرمز لها بالرمز det lAl , وسنتعرف في هذا الفصل على كيفية إيجاد محدد مصفوفة من الرتبة l x l , 2 x 2 , 3 x 3

أولاً : محدد مصفوفة من الرتبة l x l :

إذا كانت A = [ a 11 ] فإن det ( A ) = l A l = a 11

مثال : إذا كانت

A = [ - 5 ]

d e t ( A ) = l A l = - 5

ثانيا : مصفوفة الرتبة 2 x 2 :

إذا كانت 2 x 2 $A = \begin{bmatrix} a\ 11 & a\ 12 \\ a\ 21 & a\ 22 \end{bmatrix}$

فأن d e t ( A ) = l A l = a 11 a 22 – a 12 a21 .

( محدد مصفوفة من الرتبة 2 x 2 هو حاصر ضرب عناصر القطر الرئيسي مطروحاً من حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي .

مثال : اوجد محدد المصفوفات التالية :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ , $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Solution :

l B l = 0 x – 1 – (-2)(3)

=0 – (-6) = 6

l A l = 2 x -1-3 x 2

= - 2 – 6 = -8

ب ) طريقة ساديرس :

تتلخص هذه الطريقة بأن نضيف على المصفوفة  العمود الأول والثاني كعمودين رابع وخامس على التوالي لتصبح المصفوفة A على الشكل التالي :

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a11 & a12 & a13 & a11 & a12 \\ a21 & a22 & a23 & a21 & a22 \\ a31 & a32 & a33 & a31 & a32 \\ & & & \uparrow & \uparrow \end{matrix}$$

إضافة

وعليه فإن محدد المصفوفة A يصبح على الصورة التالية :

D e t ( A ) = l A l = ( a11 a22 a33 +a12 a23 a31 + a13 a21 a32)

$\uparrow$

الأقطار الرئيسية الثلاث

( a12 a21 a33 + a11 a23 a32 + a12 a22 a 31 ) ⟵ الأقطار الثانوية الثلاث

ثالثاً :محدد مصفوفة من الرتبة 3 x 3 :

هنالك عدة طرق لحساب محدد هذا النوع من المصفوفات ومنها :

أ ) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix} \quad 3 \times 3$$

فإن : d e t ( A ) = l A l = a11 ( a22 a33 – a23 a32 )

-a12 (a21 a33 – a23 a31 )    ( طريقة المحددات الصغرى )

+ a13 ( a21 a32 – a22 a31 ) .

مثال : أوجد محدد المصفوفة :

Solution:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad ? \quad l A l = -2 (0 – 18 )$$

-2 ( 0 – 24 )

+ 3 ( 3 – ( -20 ) ) = 36 + 48 +69 = 153

مثال : باستخدام طريقة ساديرس , اوجد l A l

حيث

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$\begin{matrix} -2 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 6 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 3 \end{matrix}$$

l A l = ( 0 + 48 +9 ) – ( 0+ -36+ -60 ) = 57 + 96 = 153 .

مثال : اوجد محدد المصفوفة :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

حسب الطريقة الأولى و الطريقة الثانية .

الحل :

1 ) باستخدام طريقة المحددات الصغرى

l B l = 0(0 + 5 ) – 1 (2 x 0 – 5 ) + - 1 (-2-3 )

= 0 + 5 + 5 = 10 .

2 ) باستخدام طريقة ساديرس :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

l B l = ( 0 + 5 + 2 ) – ( 0 +0 -3 ) = 7 + 3 = 10 .

مسائل وتمارين :

1 ) اوجد محدد كل من المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

2 ) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ x & -1 \end{bmatrix}$$

وكان l A l = 2 , اوجد قيمة x ؟

ملاحظة ..( أرجو التنبيه إذا كان هناك خطأ )...

بالتوفيق لكم جميعاً

.... انا ....

## مبادئ الرياضيات : المحاضرة 17

تابع الفصل السابع : المحددات .

خواص المحددات :

سنتعرف خلال هذا البند على بعض من خواص المحددات والتي تفيدنا في تسهيل عملية حسابها ومنها :

1 ) إذا وجد صف أو عمود في مصفوفة مربعة بحيث كانت جميع عناصره أصفار , فان محدد تلك المصفوفة = صفر .

مثال : اوجد محدد كل مما يلي :

1 ) A = $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & -5\end{bmatrix}$ → I A I =0

2 ) B = $\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 0\end{bmatrix}$ → I B I =0

2 ) لا تتغير قيمة محدد المصفوفة إذا استبدلت الصفوف بالأعمدة و الأعمدة بالصفوف .

مثال : إذا كانت A = $\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 5\end{bmatrix}$ → I A I =2 x 5 – 3 x -1 =10+3 = 13 .

A $^{T}$ = $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ → I A I =2 x 5 – 3 x -1 = 10 + 3 = 13 .

3 ) عند استبدال صف بصف آخر أو عمود بعمود آخر فإن أشارة المحدد تتغير .

مثال : إذا كانت . A = $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ → I A I = 13

لو تم تبديل الصف الأول مع الصف الثاني , لنحصل على المصفوفة B .

B = $\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ → I B I =-3 -10 =-13

أما لو تم تبديل العمود الأول مع العمود الثاني , فسوف نحصل على المصفوفة ولتكن C بحيث :

C = $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}$ → I C I = -3 -10 = -13

4 ) إذا تساوت العناصر المتقابلة في صفين أو عمودين في مصفوفة ما , فإن محدد تلك المصفوفة = صفر .

مثال : لتكن $A = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & -1 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix} \rightarrow |A| = 0$ (نلاحظ أن عناصر الصف الأول مساوية لعناصر الصف الثالث ) .

5 ) إذا ضرب عناصر صف أو عمود في المصفوفة A بعدد ثابت , فإن قيمة المحدد الناتج بعد عملية الضرب تساوي المحدد الأصلي مضروباً في ذلك العدد .

مثال : إذا كانت $A = \begin{bmatrix}3 & -1\\ 5 & 2\end{bmatrix} \rightarrow |A| = 6 + 5 = 11$

على فرض , ضربنا عناصر الصف الثاني بالعدد 2- فتصبح المصفوفة A على الصورة التالية :

$$B = \begin{bmatrix}3 & -1\\ -10 & -4\end{bmatrix} \rightarrow |B| = -12 - 10 = -22$$

$$11 \times -2 = -22$$

مثال : إذا كان محدد المصفوفة A يساوي 3- , وضربنا عناصر العمود الأول بالعدد 5- اوجد محدد المصفوفة بعد عملية الضرب ؟

محدد المصفوفة عد عملية الضرب $\rightarrow |A| = -3$

$$\downarrow$$

$$-3 \times -5 = 15$$

6 ) محدد المصفوفة القطرية يساوي حاصل ضرب عناصر القطر .

مثال : اوجد محدد المصفوفة $A = \begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1/9\end{bmatrix}$ ← مصفوفة قطرية

الحل :

$$|A| = 6 \times -3 \times 1/9 = -18/9 = -3$$

كيفية إيجاد النظير الضربي لمصفوفة مربعة :

تعريف : النظير الضربي .

إذا كان لدينا المصفوفة A و أوجدنا مصفوفة أخرى ولتكن B بحيث :

$$A \times B = B \times A = I$$

عندئذ نقول بأن المصفوفة B هي النظير الضربي للمصفوفة A , وسيرمز للمصفوفة B بالرمز $A^{-1}$ .

ولإيجاد النظير الضربي $A^{-1}$ للمصفوفة A ( من الرتبة 2 X 2 ) فإنه يمكن استخدام الصيغة التالية :

$$A^{-1} = 1/|A| \begin{bmatrix}a22 & -a12\\ -a21 & a11\end{bmatrix}$$

حيث $A = \begin{bmatrix}a11 & a12\\ a21 & a22\end{bmatrix}$ 2 x 2

مثال : اوجد النظير الضربي للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل : $1\ )\ |A| = -1 - 0 = -1$

$$2\ )\ A^{-1} = 1/-1 \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

وللتأكد من صحة الحل :

$$A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I\ 2 \times 2$$

مثال : اوجد النظير الضربي للمصفوفة :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\ ?$$

الحل : $|B| = 3 - (-2) = 5$

$$B^{-1} = 1/5 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

للتأكد من صحة الحل :

$$B \times B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}+\frac{2}{5} & -\frac{2}{5}+\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5}+\frac{3}{5} & \frac{2}{5}+\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

طريقة كريمر لحل نظام من المعادلات الخطية :

لنفرض أن لدينا النظام التالي من المعادلات :

$$a\,11\,x1 + a12\,x2 = b1$$

$$a21\,x1 + a22\,x2 = b2$$

1 ) سنعرف محدد المعاملات دلتا ( Δ) كما يلي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix}$$

من المعادلة الأولى

من المعادلة الثانية

2 ) سنحدد مصفوفة جديدة من خلال استبدال عناصر العمود الأول في Δ بالحدود الطلقة $\begin{vmatrix} b1 \\ b2 \end{vmatrix}$ ونجد محدد المصفوفة الجديدة وسنرمز له Δ x1 :

$$\Delta\ X1 = \begin{vmatrix} b1 & a12 \\ b1 & a22 \end{vmatrix}$$

3 ) سنستبدل كذلك عناصر العمود الثاني في Δ بالحدود المطلقة $\begin{vmatrix} b1 \\ b2 \end{vmatrix}$ وسنرمز لمحدد هذه المصفوفة بالرمزΔ x2 بحيث تصبح كما يلي :

$$\Delta\ X\,2 = \begin{vmatrix} a11 & b1 \\ a21 & b2 \end{vmatrix}$$

4 ) لإيجاد قيمة x1 , فإننا نقسم$\Delta x1$ على Δ ولايجاد قيمة x2 , فإننا نقسم$\Delta x2$ على Δ

$$X 1 = \frac{\Delta x1}{\Delta} \quad , \quad x2 = \frac{\Delta x2}{\Delta}$$

مثال : باستخدام طريقة كرايمر , اوجد حل النظام التالي من المعادلات :

3 x1 + 4 x2 = 2

2 x1 + 5 x2 = 3

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7$$

$$\Delta \ X 1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2$$

$$\Delta \ X 2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$$

$$X 1 = \frac{\Delta \ x \ 1}{\Delta} = -2/7 \ , \ x 2 = \frac{\Delta \ x \ 2}{\Delta} = 5/7$$

وللتأكد من صحة الحل :

3 ( -2/7) + 4 (5/7) = 2

-6/7 + 20/7

14/7 = 2

2 ( -2/7 ) + 5 (5/7) = 3

-4/7 + 25/7 =21/7 = 3

مثال: حل النظام التالي :

4 x 1 – 2 x 2 = 10

3 x 1 – 5 x 2 = 11

باستخدام طريقة كريمر ؟

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} = -20 - (-6) \\ = -20 + 6 = -14 \end{matrix}$$

$$\Delta \ X 1 = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 11 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} = -50 - (-22) \\ = -50 + 22 = -28 \end{matrix}$$

$$\Delta X2 = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 44 - 30 = 14$$

$$X1 = \frac{\Delta x1}{\Delta} = \frac{-28}{-14} = 2$$

$$X2 = \frac{\Delta x2}{\Delta} = \frac{14}{-14} = 1$$

حتى نستطيع تطبيق هذه الطريقة لابد من أن $\Delta \neq 0$

ملاحظة ..( أرجو التنبيه إذا كان هناك خطأ )...

بالتوفيق لكم جميعاً

.... انا ....

## مبادئ الرياضيات : المحاضرة 18

مسائل وتمارين :

اوجد ناتج كل مما يلي :

1 ) $(-\infty, 1] \cap [1, \infty) = \{1\}$

2 ) $(-\infty. 1] \cap (1, \infty) = \emptyset$

3 ) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty) = (-\infty, \infty)$

4 ) $\frac{(2x)^{-2}}{2x^{-2}} = \frac{2x^2}{(2x)^2} = \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2}$

5 ) $8 = 2^{-x} \rightarrow 2^3 = 2^{-x} \rightarrow -x = 3 \rightarrow x = -3$

6 ) $-1/3 \div 1/3^{-1} = -1/3 \div 3 = -1/3 \times 1/3 = -1/9$

7 ) $-|-4/2| = -|-2| = -2$

8 ) $\log 0.1^{-1} = -1 \times \log 0.1 = -\log 1/10 = -\log 10^{-1} = \log 10 = 1$

9 ) $x^2 - x + 1/4 = 0$

$(x - 1/2)(x - 1/2) = 0$

على التحليل

10 ) $(x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$

11 ) $(2x^2 - 4x + 2)$ قيمة المميز في المقدار

$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(2)(2) = 16 - 16 = 0$

12 ) $(1/3 - 1/2)^2 = (2.1/2.3 - 1.3/2.3)^2 = (2/6 - 3/6)^2 = (-1/6)^2 = 1/36$

13 ) قيمة x التي تحقق المعادلة

$-2x + 4 = -2 + x \rightarrow -2x - x = -2 - 4$

$-3x = -6 \rightarrow x = 2$

14 ) $\sqrt[3]{0.064}$ = $\sqrt[3]{0,4x0,4,0,4}$ = 0 .4

قيمة المجهول x في المقدار (15

$\log_2 x$ = 4

$\rightarrow$x = $2^{4}$ $\rightarrow$ x = 16

16 ) $\sqrt[3]{-l27l}$ =$\sqrt[3]{-27}$ =-3

قيمة x في المقدار 17 ) $\sqrt{x-4}$ = 3

بتربيع الطرفين . x – 4 = 9 $\rightarrow$ x = 13

18 )$\sqrt{\sqrt{\sqrt{x4}}}$ = (((x $^{4}$) 1/2 )1/2)1/2

= ( x 4 $)^{1/8}$ = x $^{4/8}$ = x $^{1/2}$ = $\sqrt{x}$

اوجد قيمة المتغيرات المجهولة ( 19

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 2y-4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x-1} \\ y+1 \\ Z \end{bmatrix}$$

الحل :

$$\frac{-3}{1} = \frac{1}{x-1} \rightarrow -3\,(\,x-1\,) = 1$$

-3 x + 3 = 1 $\rightarrow$-3 x = -2

X = 2/3

2y – 4 = y +1

2y –y = 1+4 $\rightarrow$ y = 5

Z = - 1

20 ) A = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$ , A$^{2}$ = ??

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 4 & +2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+16 & 8-4 \\ 32-16 & 16+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 4 \\ 16 & 20 \end{bmatrix}$$

21 ) $\frac{x}{5} \div \frac{x-1}{x} = \frac{x}{5} \times \frac{x}{(x-1)} = \frac{x^2}{5\,(\,x-1)} = \frac{x^2}{5\,x-5}$

22 ) $A \cap \overline{A} = \cup$ ??

إجابة خاطئة , حيث أن المجموعتين منفصلتين وبالتالي $A \cap \overline{A} = \emptyset$

أما $A \cup \overline{A} = U$

إذا كان محدد المصفوفة 23 ) A = - 5

وكانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ x & 0 \end{bmatrix}$ اوجد قيمة x ؟

$2 * 0 - 5 * x = - 5$

$-5x = -5$

$X = 1$

اوجد محدد المصفوفة ( 24

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$| A | = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - 2 ( -1-2 ) -2 (-3-0 ) + 0 ( 3-0 )$$

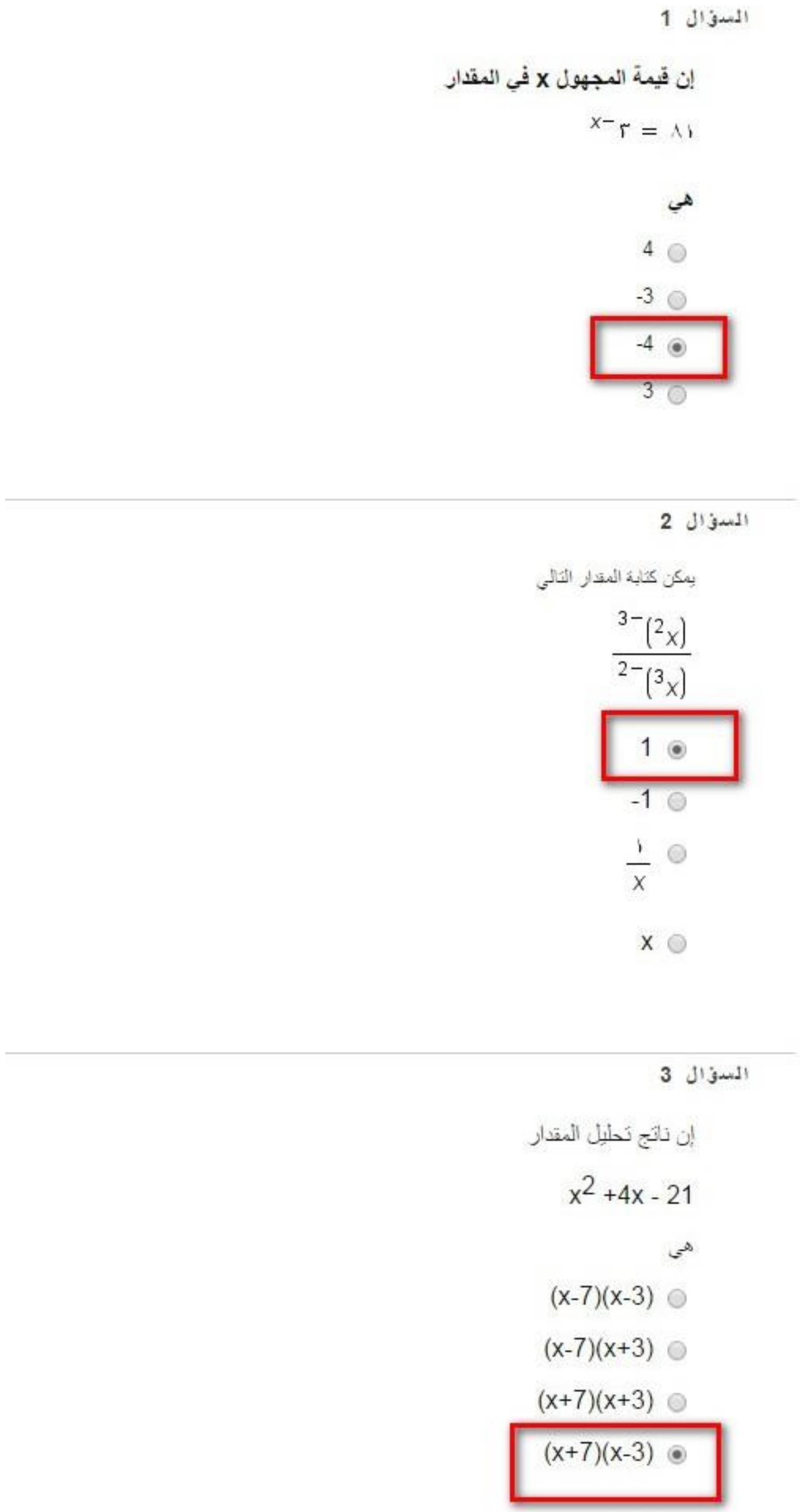
$$= + 6 + 6 + 0 = 12$$

ملاحظة ..( أرجو التنبيه إذا كان هناك خطأ )...( اذكروني بدعوة ☺

بالتوفيق لكم جميعاً

.... انا ....

# الواجب الأول



السؤال 1

**إن قيمة المجهول x في المقدار**

$٣^{-x} = ٨١$

**هي**

○ 4

○ -3

● -4

○ 3

---

السؤال 2

يمكن كتابة المقدار التالي

$$\frac{(x^{2})^{-3}}{(x^{3})^{-2}}$$

● 1

○ -1

○ $\frac{١}{x}$

○ x

---

السؤال 3

إن ناتج تحليل المقدار

$x^2 +4x - 21$

هي

○ (x-7)(x-3)

○ (x-7)(x+3)

○ (x+7)(x+3)

● (x+7)(x-3)

السؤال 4

**إن ناتج المقدار التالي**

$-|-x|$

**هو**

○ -x

○ x

○ ± x

لا شيء مما ذكر

السؤال 5

**إن ناتج المقدار التالي**

$\log(100)^{-3}$

**هي**

○ 3

○ 6

○ -3

● -6

السؤال 6

إن ناتج المقدار التالي:

$(-\infty ,٥)\cap(-٥ ,١٠)$

هي:

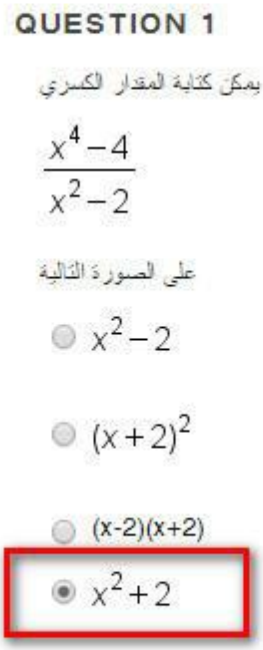
○ $(-٥,٥)$

○ $(٥,١٠)$

$[-٥,٥]$

○ $(-٥,١٠)$

# الواجب الثاني



QUESTION 1

يمكن كتابة المقدار الكسري

$$\frac{x^4-4}{x^2-2}$$

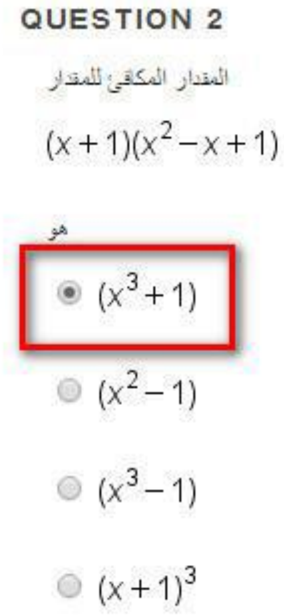
على الصورة التالية

○ $x^2-2$

○ $(x+2)^2$

○ (x-2)(x+2)

● $x^2+2$



QUESTION 2

المقدار المكافئ للمقدار

$$(x+1)(x^2-x+1)$$

هو

● $(x^3+1)$

○ $(x^2-1)$

○ $(x^3-1)$

○ $(x+1)^3$

## QUESTION 3

إن حل المعادلة

$$2x - \frac{1}{2}y = -1$$

عندما y=-2

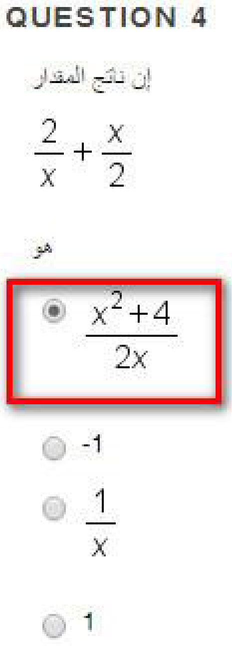
هي

○ 2

● -1

○ -2

○ 1



## QUESTION 4

إن ناتج المقدار

$$\frac{2}{x} + \frac{x}{2}$$

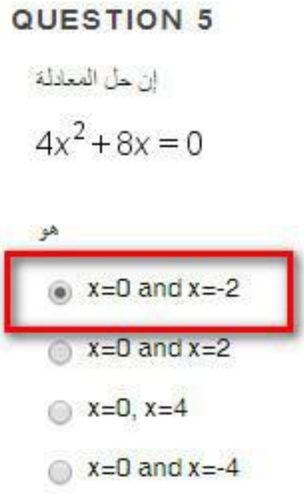
هو

● $\frac{x^2+4}{2x}$

○ -1

○ $\frac{1}{x}$

○ 1



## QUESTION 5

إن حل المعادلة

$$4x^2+8x=0$$

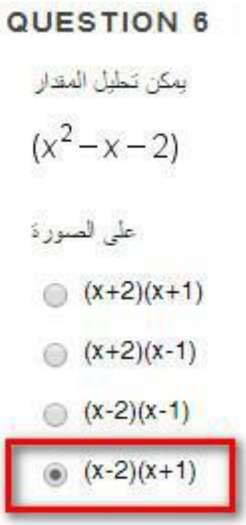
هو

● x=0 and x=-2

○ x=0 and x=2

○ x=0, x=4

○ x=0 and x=-4



## QUESTION 6

يمكن تحليل المقدار

$$(x^2-x-2)$$

على الصورة

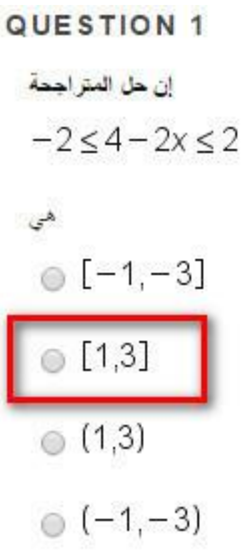
○ (x+2)(x+1)

○ (x+2)(x-1)

○ (x-2)(x-1)

● (x-2)(x+1)

# الواجب الثالث



QUESTION 1

إن حل المتراجحة

$$-2 \le 4-2x \le 2$$

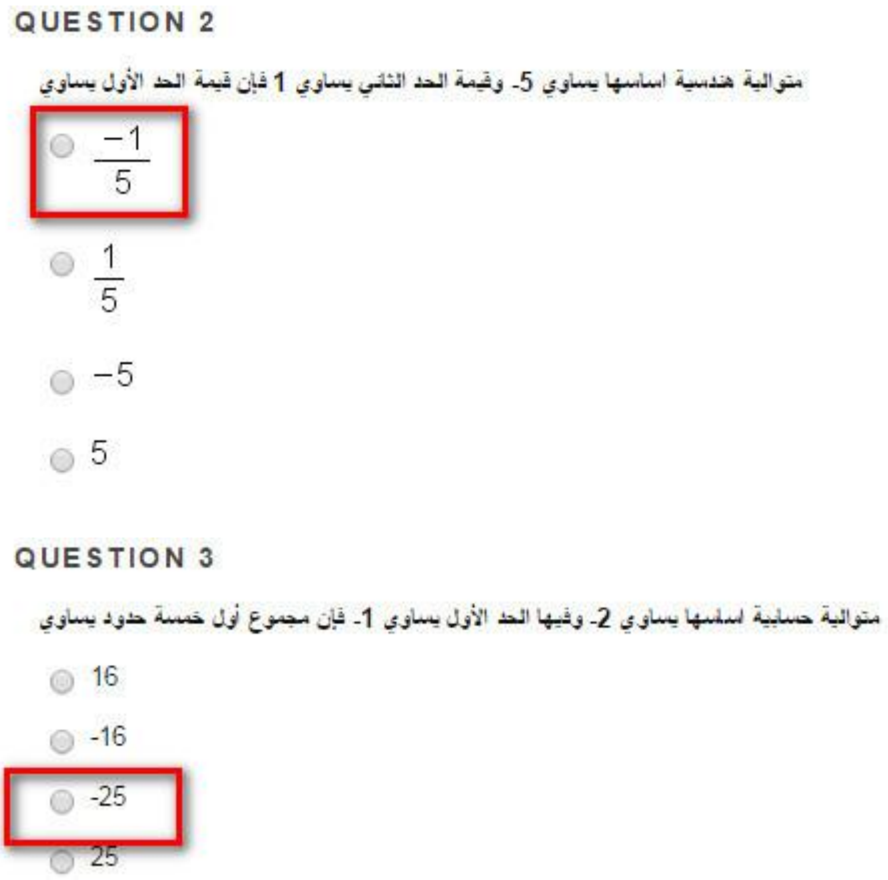
هي

○ $[-1,-3]$

[✓ ○ $[1,3]$]

○ $(1,3)$

○ $(-1,-3)$



QUESTION 2

متوالية هندسية اساسها يساوي 5- وقيمة الحد الثاني يساوي 1 فإن قيمة الحد الأول يساوي

[✓ ○ $\frac{-1}{5}$]

○ $\frac{1}{5}$

○ $-5$

○ $5$

QUESTION 3

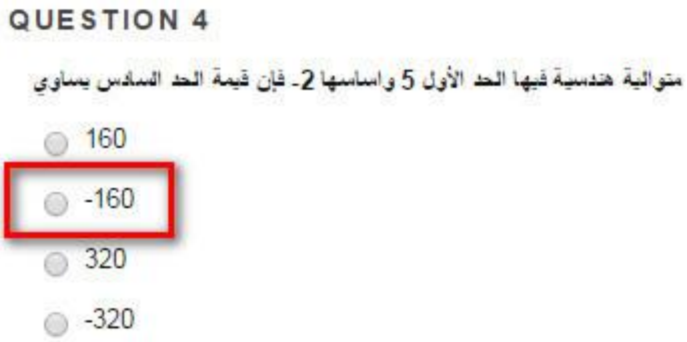
متوالية حسابية اساسها يساوي 2- وفيها الحد الأول يساوي 1- فإن مجموع أول خمسة حدود يساوي

○ 16

○ -16

[✓ ○ -25]

○ 25



## QUESTION 4

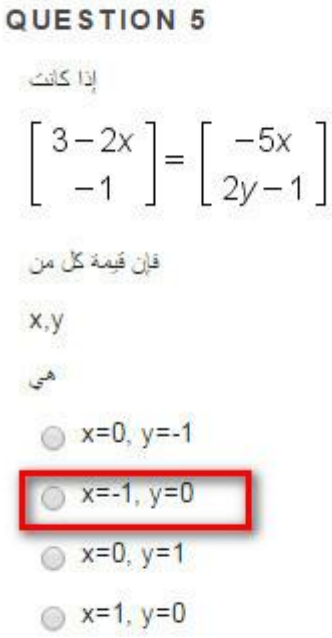
متوالية هندسية فيها الحد الأول 5 واساسها 2- فإن قيمة الحد السادس يساوي

○ 160

○ [✓ -160]

○ 320

○ -320



## QUESTION 5

إذا كانت

$$\begin{bmatrix}3-2x\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5x\\2y-1\end{bmatrix}$$

فإن قيمة كل من

x,y

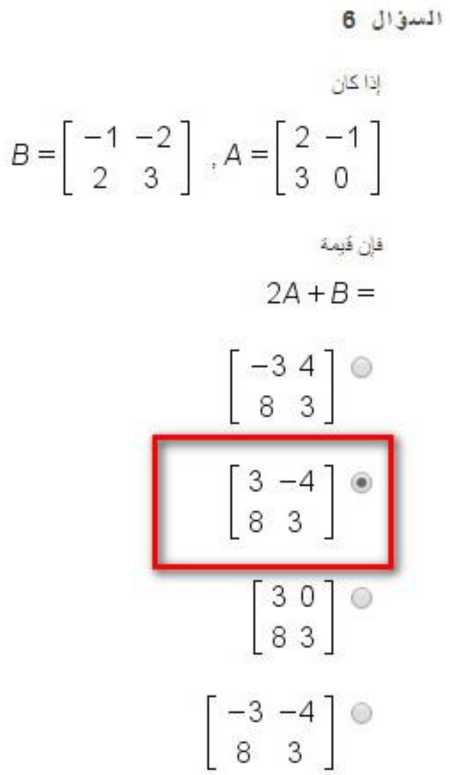
هي

○ x=0, y=-1

○ [✓ x=-1, y=0]

○ x=0, y=1

○ x=1, y=0



**السؤال 6**

إذا كان

$$B=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

فإن قيمة

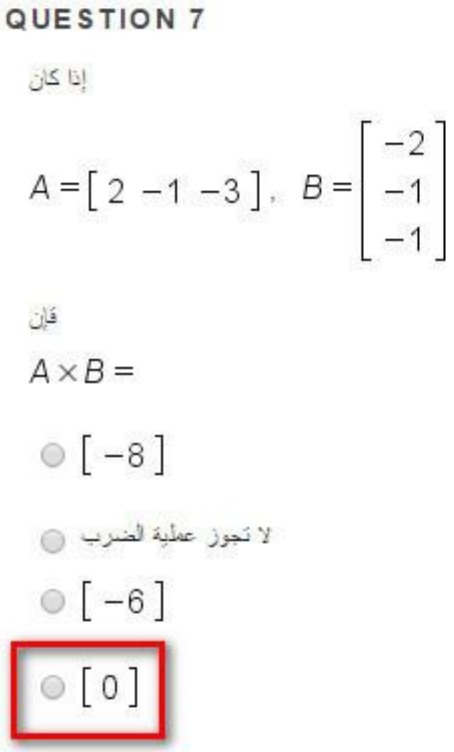
$$2A+B=$$

○ $\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 8 & 3\end{bmatrix}$

● $\begin{bmatrix}3 & -4\\ 8 & 3\end{bmatrix}$

○ $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & 3\end{bmatrix}$

○ $\begin{bmatrix}-3 & -4\\ 8 & 3\end{bmatrix}$



**QUESTION 7**

إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$$

فإن

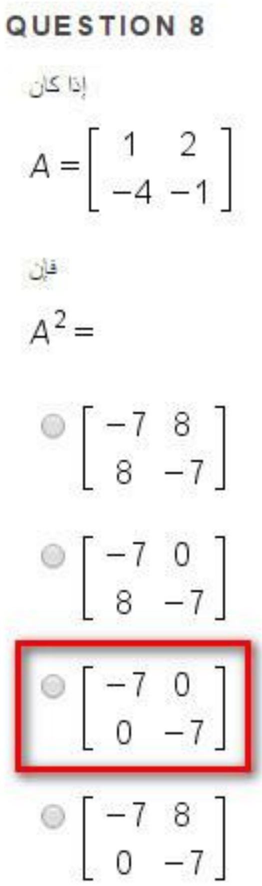
$$A\times B=$$

○ $[-8]$

○ لا تجوز عملية الضرب

○ $[-6]$

○ $[0]$



**QUESTION 8**

إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

فإن

$$A^2 =$$

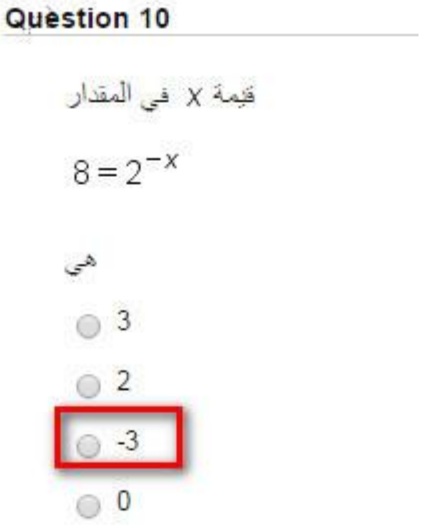
○ $\begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

○ $\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

○ [✓ $\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$]

○ $\begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$

# الاختبار الفصلي



**Question 10**

قيمة $x$ في المقدار

$$8=2^{-x}$$

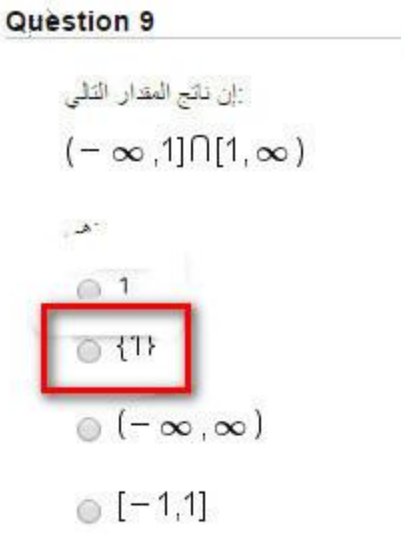
هي

○ 3

○ 2

○ [✓ -3]

○ 0



**Question 9**

إن ناتج المقدار التالي:

$$(-\infty,1]\cap[1,\infty)$$

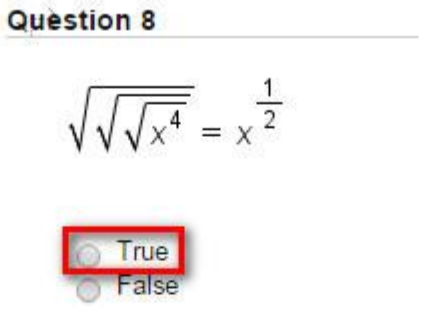
هو:

○ 1

○ [✓ {1}]

○ $(-\infty,\infty)$

○ $[-1,1]$



**Question 8**

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^4}}} = x^{\frac{1}{2}}$$

○ [✓ True]

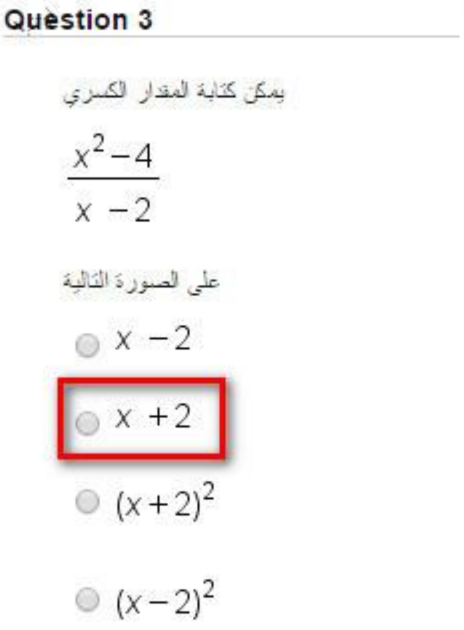
○ False

**Question 7**

الجذر التربيعي لأي سالب عدد غير معرف

○ [✓ True]

○ False



### Question 3

يمكن كتابة المقدار الكسري

$$\frac{x^2-4}{x-2}$$

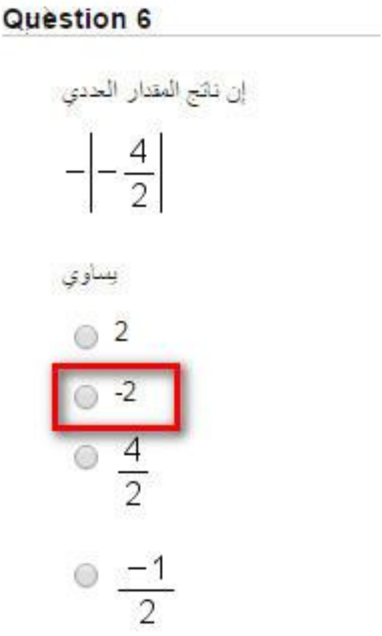
على الصورة التالية

○ $x-2$

○ [✓ $x+2$]

○ $(x+2)^2$

○ $(x-2)^2$



### Question 6

إن ناتج المقدار العددي

$$-\left|-\frac{4}{2}\right|$$

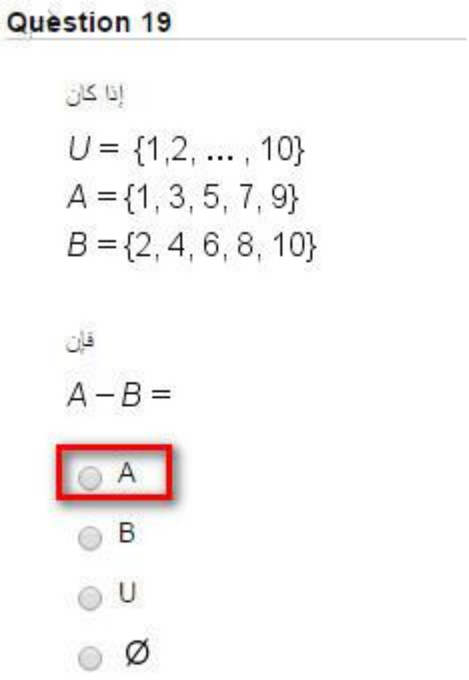
يساوي

○ 2

○ [✓ -2]

○ $\frac{4}{2}$

○ $\frac{-1}{2}$



### Question 19

إذا كان

$U=\{1,2,\ldots,10\}$
$A=\{1,3,5,7,9\}$
$B=\{2,4,6,8,10\}$

فإن

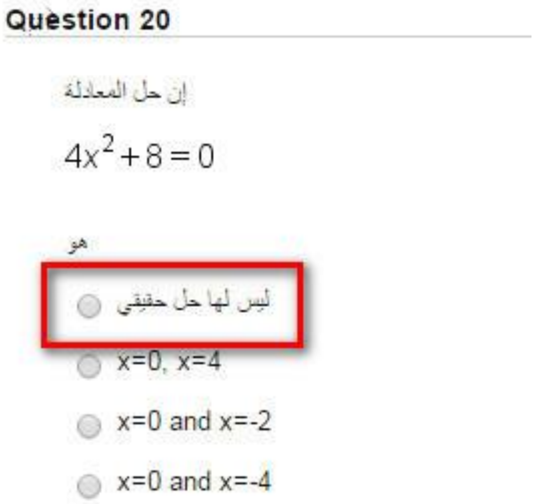
$A-B=$

○ [✓ A]

○ B

○ U

○ Ø



### Question 20

إن حل المعادلة

$$4x^2+8=0$$

هو

○ [✓ ليس لها حل حقيقي]

○ x=0, x=4

○ x=0 and x=-2

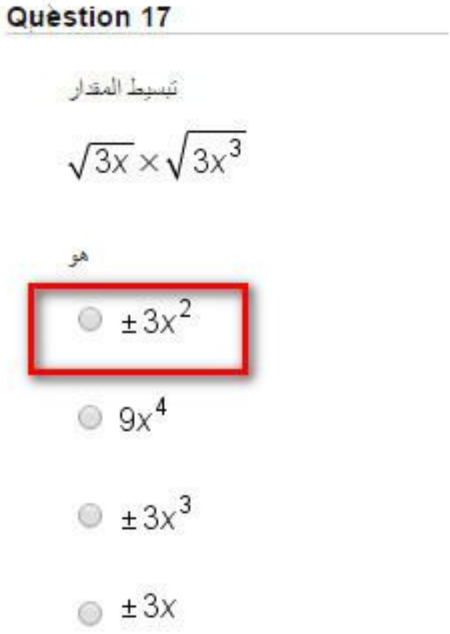
○ x=0 and x=-4

### Question 18

عند جمع أو طرح الاعداد أو المقادير الكسرية, فإنه لا بد من توحيد المقامات أولا ثم نجمع أو نطرح البسط مع البسط مقسوما على المقام نفسه

○ [✓ True]

○ False



**Question 17**

تبسيط المقدار

$$\sqrt{3x} \times \sqrt{3x^3}$$

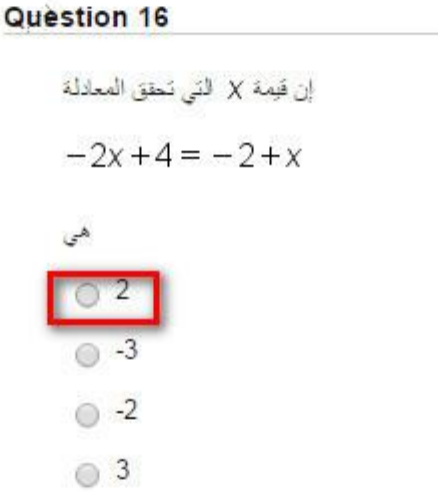
هو

○ [✓ $\pm 3x^2$]

○ $9x^4$

○ $\pm 3x^3$

○ $\pm 3x$



**Question 16**

إن قيمة $X$ التي تحقق المعادلة

$$-2x+4=-2+x$$

هي

○ [✓ 2]

○ -3

○ -2

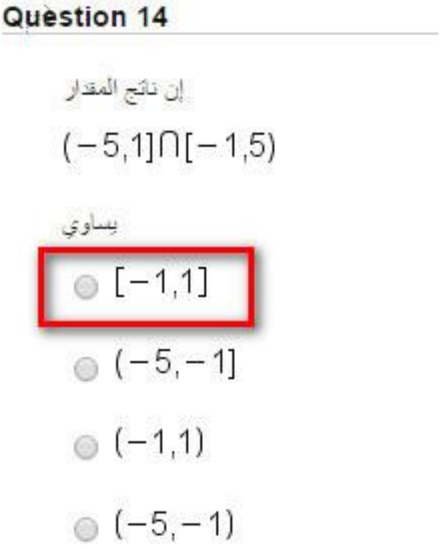
○ 3

**Question 15**

إذا كان قيمة المميز في المقدار الثلاثي لمعادلة تربيعية يساوي صفرا, فإنه يوجد حل وحيد فقط لهذه المعادلة

○ [✓ True]

○ False



**Question 14**

إن ناتج المقدار

$$(-5,1]\cap[-1,5)$$

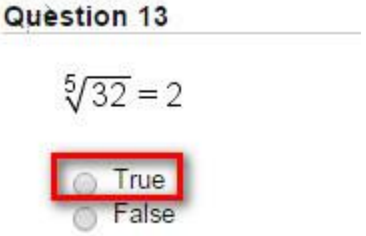
يساوي

○ [✓ $[-1,1]$]

○ $(-5,-1]$

○ $(-1,1)$

○ $(-5,-1)$

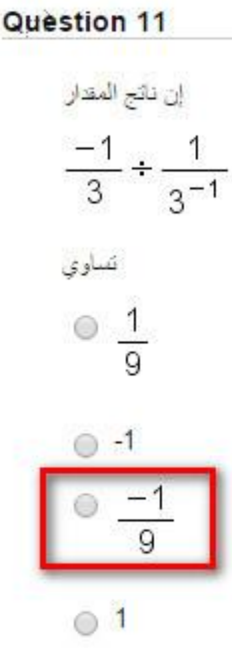


**Question 13**

$$\sqrt[5]{32}=2$$

○ [✓ True]

○ False



### Question 11

إن ناتج المقدار

$$\frac{-1}{3} \div \frac{1}{3^{-1}}$$

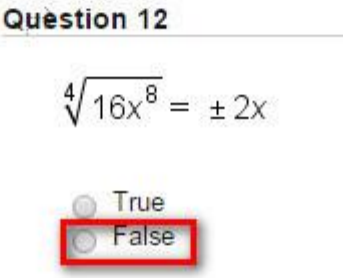
تساوي

○ $\frac{1}{9}$

○ -1

[✓ ○ $\frac{-1}{9}$]

○ 1

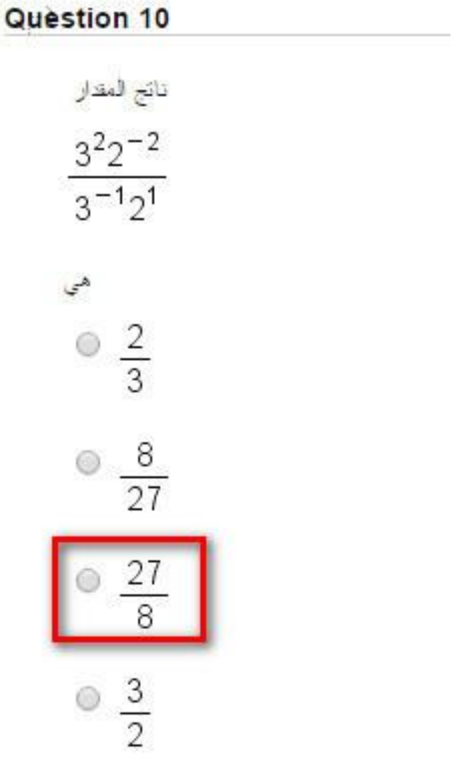


### Question 12

$$\sqrt[4]{16x^8} = \pm 2x$$

○ True

[✓ ○ False]



### Question 10

ناتج المقدار

$$\frac{3^2 2^{-2}}{3^{-1} 2^1}$$

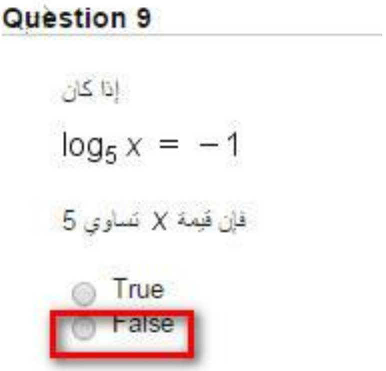
هي

○ $\frac{2}{3}$

○ $\frac{8}{27}$

[✓ ○ $\frac{27}{8}$]

○ $\frac{3}{2}$



### Question 9

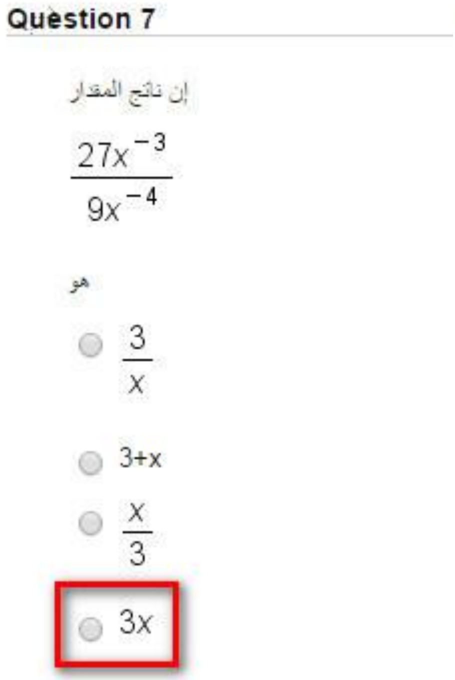
إذا كان

$$\log_5 x = -1$$

فإن قيمة X تساوي 5

○ True

[✓ ○ False]



**Question 7**

إن ناتج المقدار

$$\frac{27x^{-3}}{9x^{-4}}$$

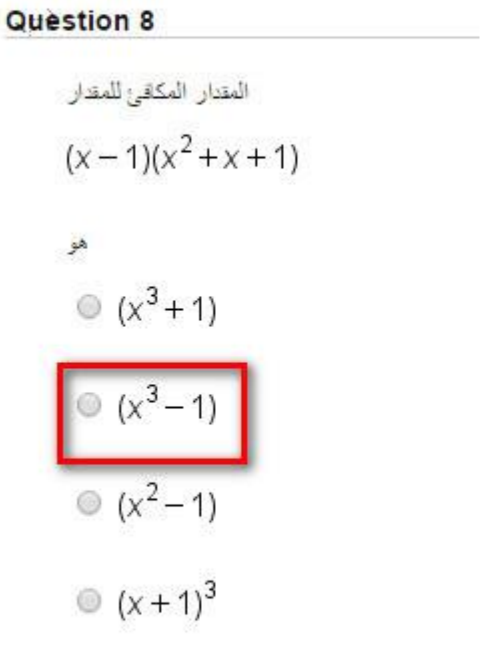
هو

○ $\frac{3}{x}$

○ 3+x

○ $\frac{x}{3}$

○ [✓ $3x$]



**Question 8**

المقدار المكافئ للمقدار

$$(x-1)(x^2+x+1)$$

هو

○ $(x^3+1)$

○ [✓ $(x^3-1)$]

○ $(x^2-1)$

○ $(x+1)^3$

**Question 5**

$$\log 0.01^{\frac{1}{2}}$$

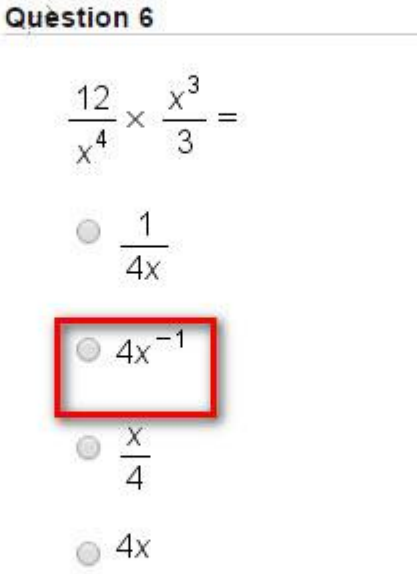
تساوي

○ -2

○ [✓ -1]

○ 2

○ 1



**Question 6**

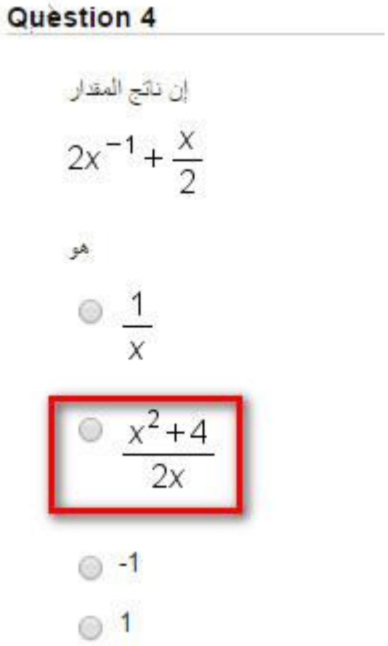
$$\frac{12}{x^4} \times \frac{x^3}{3} =$$

○ $\frac{1}{4x}$

○ [✓ $4x^{-1}$]

○ $\frac{x}{4}$

○ $4x$



**Question 4**

إن ناتج المقدار

$2x^{-1}+\frac{x}{2}$

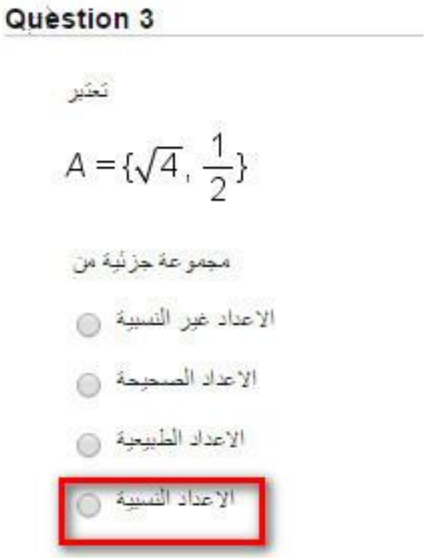
هو

○ $\frac{1}{x}$

○ [✓ $\frac{x^2+4}{2x}$]

○ -1

○ 1



**Question 3**

تعتبر

$A=\{\sqrt{4}, \frac{1}{2}\}$

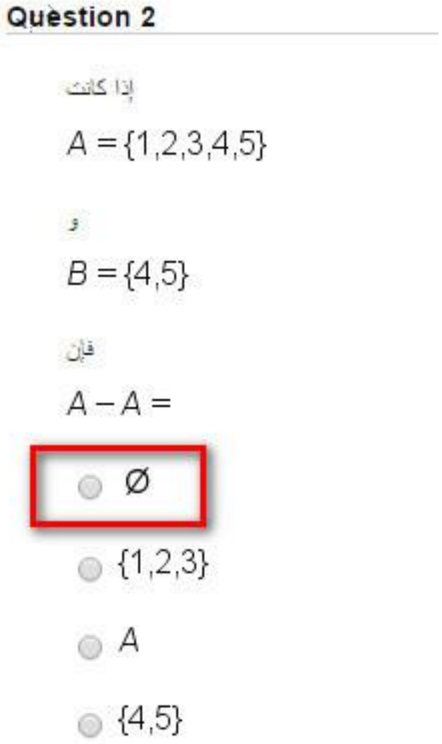
مجموعة جزئية من

○ الاعداد غير النسبية

○ الاعداد الصحيحة

○ الاعداد الطبيعية

○ [✓ الاعداد النسبية]



**Question 2**

إذا كانت

$A=\{1,2,3,4,5\}$

و

$B=\{4,5\}$

فإن

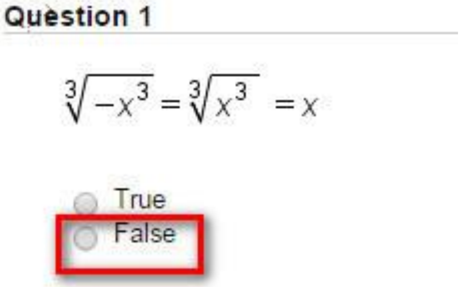
$A-A=$

○ [✓ $\emptyset$]

○ $\{1,2,3\}$

○ $A$

○ $\{4,5\}$

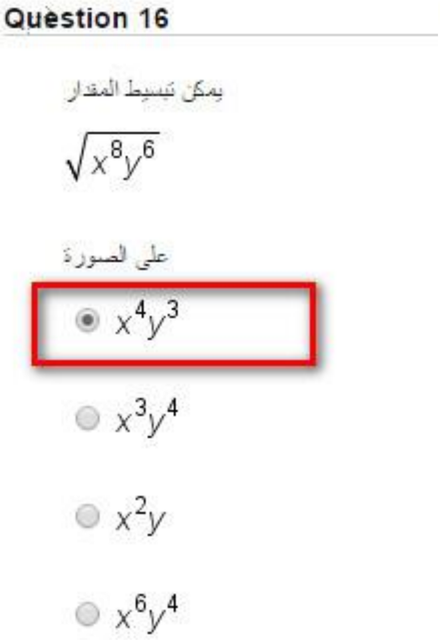


**Question 1**

$\sqrt[3]{-x^3}=\sqrt[3]{x^3} \; =x$

○ True

○ [✓ False]



**Question 16**

يمكن تبسيط المقدار

$\sqrt{x^8y^6}$

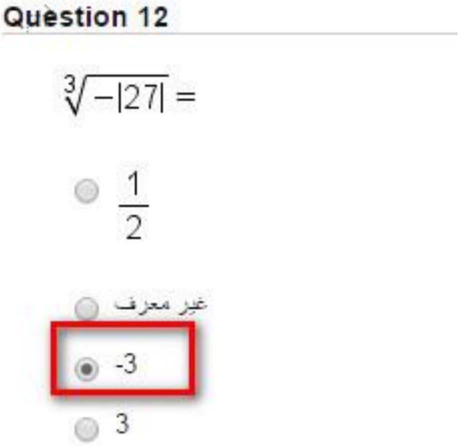
على الصورة

● $x^4y^3$

○ $x^3y^4$

○ $x^2y$

○ $x^6y^4$



**Question 12**

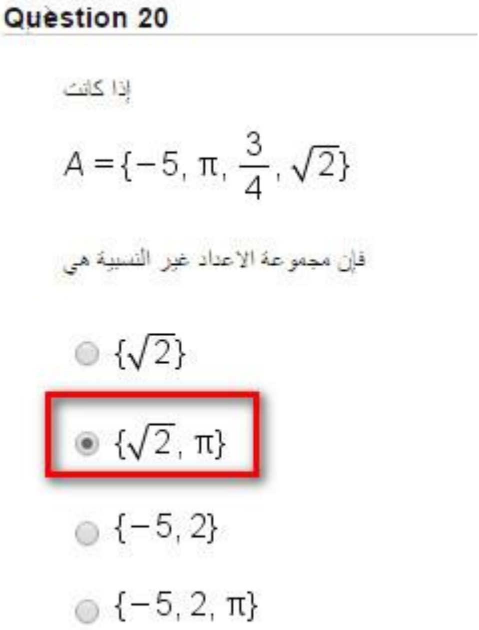
$\sqrt[3]{-|27|} =$

○ $\frac{1}{2}$

○ غير معرف

● -3

○ 3



**Question 20**

إذا كانت

$A = \{-5, \pi, \frac{3}{4}, \sqrt{2}\}$

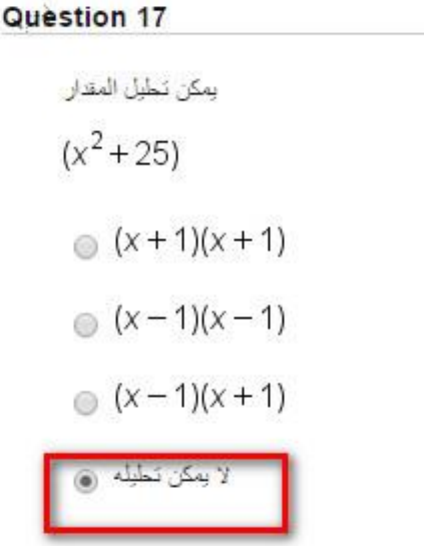
فإن مجموعة الاعداد غير النسبية هي

○ $\{\sqrt{2}\}$

● $\{\sqrt{2}, \pi\}$

○ $\{-5, 2\}$

○ $\{-5, 2, \pi\}$



**Question 17**

يمكن تحليل المقدار

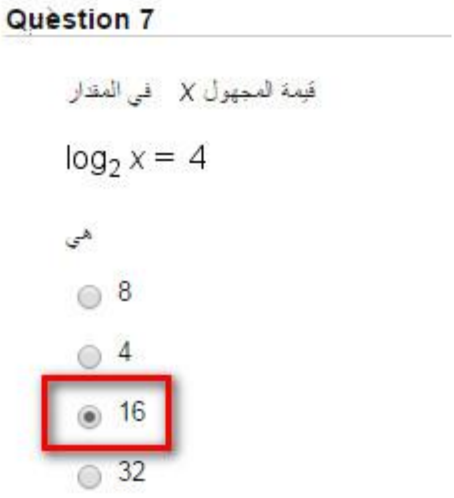
$(x^2 + 25)$

○ $(x+1)(x+1)$

○ $(x-1)(x-1)$

○ $(x-1)(x+1)$

● لا يمكن تحليله



**Question 7**

قيمة المجهول $X$ في المقدار

$$\log_2 x = 4$$

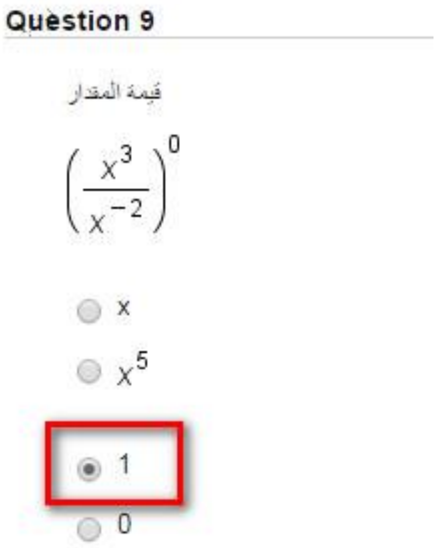
هي

○ 8

○ 4

● 16

○ 32



**Question 9**

قيمة المقدار

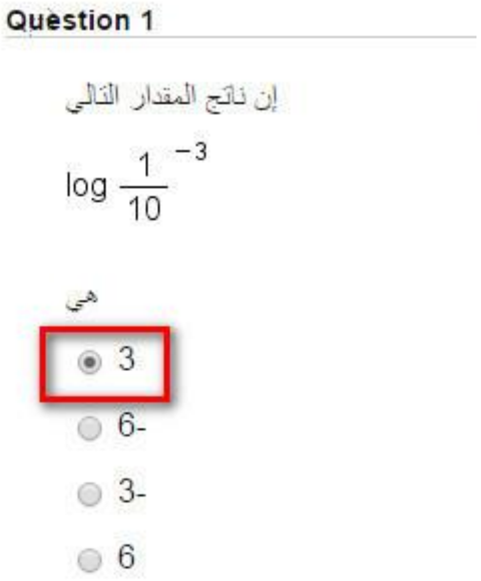
$$\left(\frac{x^3}{x^{-2}}\right)^0$$

○ x

○ $x^5$

● 1

○ 0



**Question 1**

إن ناتج المقدار التالي

$$\log \frac{1}{10}^{-3}$$

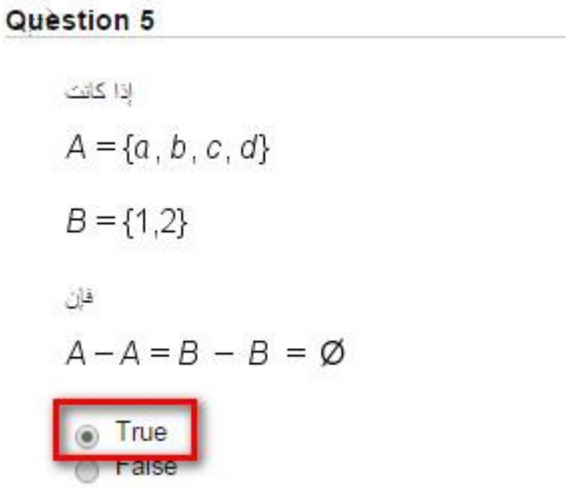
هي

● 3

○ 6-

○ 3-

○ 6



**Question 5**

إذا كانت

$$A = \{a, b, c, d\}$$

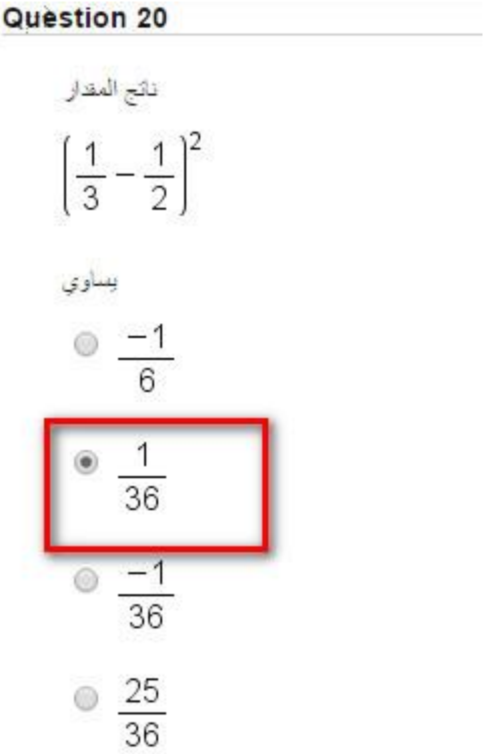
$$B = \{1,2\}$$

فإن

$$A - A = B - B = \emptyset$$

● True

○ False



**Question 20**

ناتج المقدار

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2$$

يساوي

○ $\frac{-1}{6}$

● $\frac{1}{36}$

○ $\frac{-1}{36}$

○ $\frac{25}{36}$

**Question 19**

إن ناتج المقدار

$$\frac{-|25|}{|-5|}$$

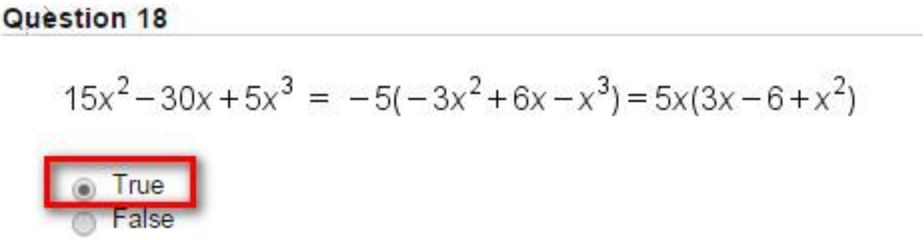
هو

○ -25

○ 5

○ ±5

● -5

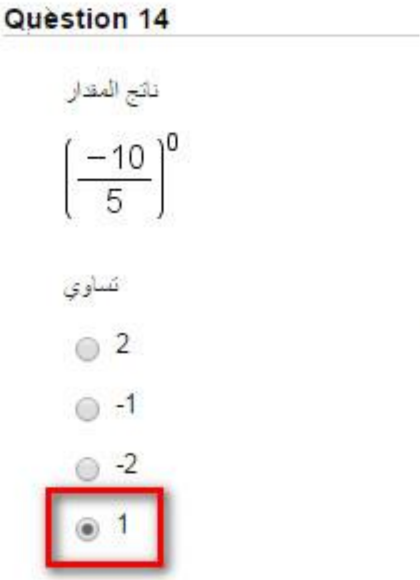


**Question 18**

$$15x^2-30x+5x^3 \;=\; -5(-3x^2+6x-x^3)=5x(3x-6+x^2)$$

● True

○ False



**Question 14**

ناتج المقدار

$$\left(\frac{-10}{5}\right)^0$$

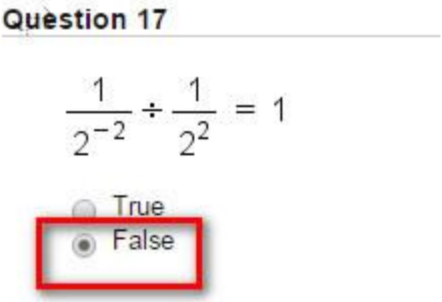
تساوي

○ 2

○ -1

○ -2

● 1

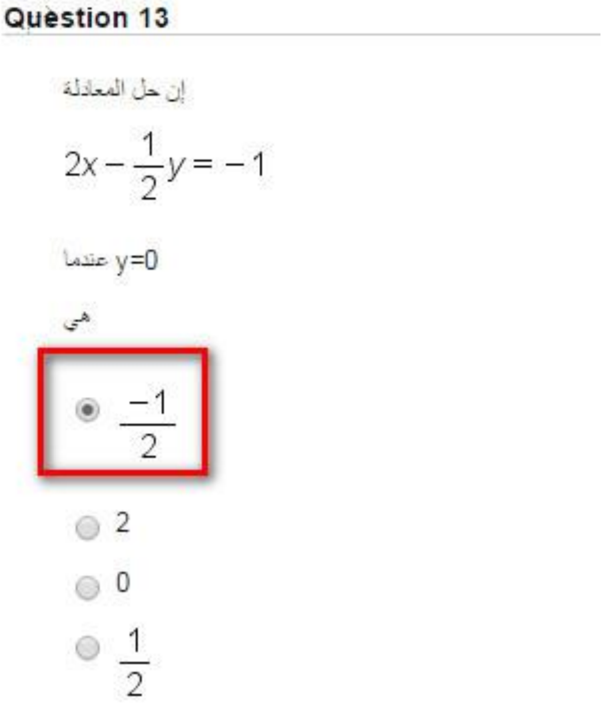


**Question 17**

$$\frac{1}{2^{-2}} \div \frac{1}{2^2} \;=\; 1$$

○ True

● False



### Question 13

إن حل المعادلة

$$2x-\frac{1}{2}y=-1$$

عندما y=0

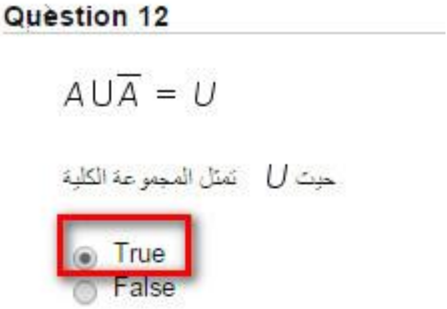
هي

● $\frac{-1}{2}$

○ 2

○ 0

○ $\frac{1}{2}$

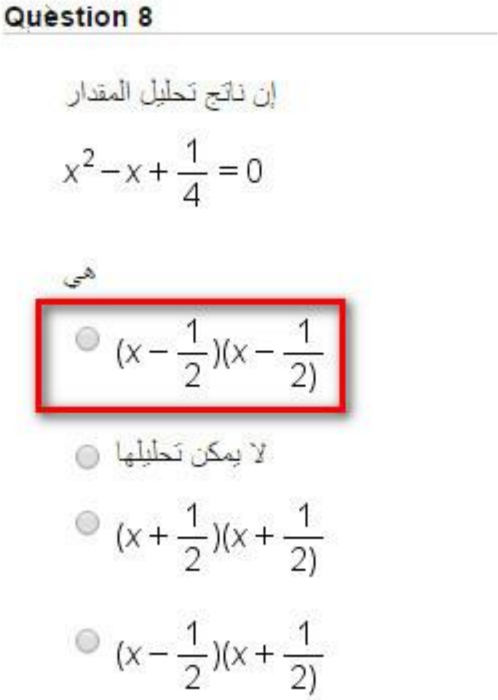


### Question 12

$$A\cup\overline{A} = U$$

حيث $U$ تمثل المجموعة الكلية

● True
○ False



### Question 8

إن ناتج تحليل المقدار

$$x^2-x+\frac{1}{4}=0$$

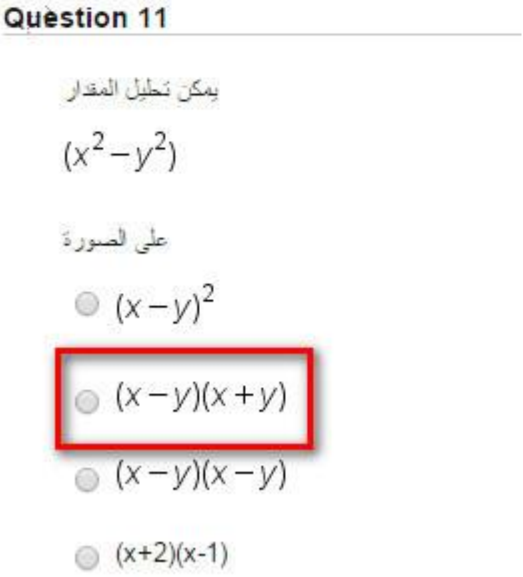
هي

○ $(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2)}$

○ لا يمكن تحليلها

○ $(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2)}$

○ $(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2)}$



### Question 11

يمكن تحليل المقدار

$(x^2-y^2)$

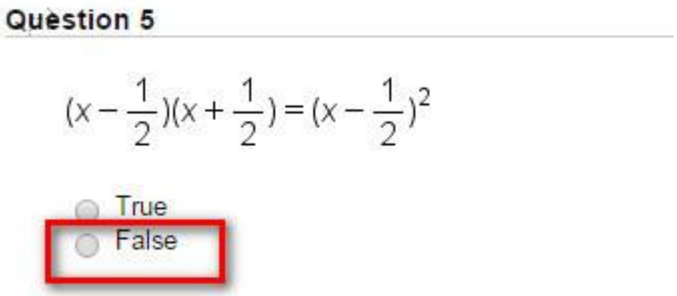
على الصورة

○ $(x-y)^2$

○ $(x-y)(x+y)$

○ $(x-y)(x-y)$

○ (x+2)(x-1)



**Question 5**

$$(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})=(x-\frac{1}{2})^2$$

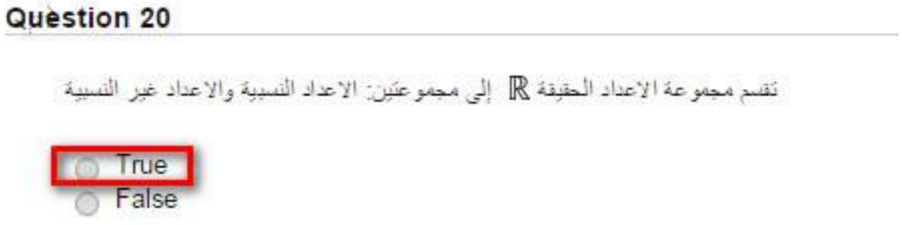
○ True
○ [✓ False]

**Question 1**

إن ناتج المقدار التالي

$(-\infty, 1]\cup[-1,\infty)$

○ [✓ $(-\infty,\infty)$]
○ $(-1,1)$
○ $(-\infty,1)$
○ $\varnothing$



**Question 20**

تقسم مجموعة الاعداد الحقيقة $\mathbb{R}$ إلى مجموعتين: الاعداد النسبية والاعداد غير النسبية

○ [✓ True]
○ False

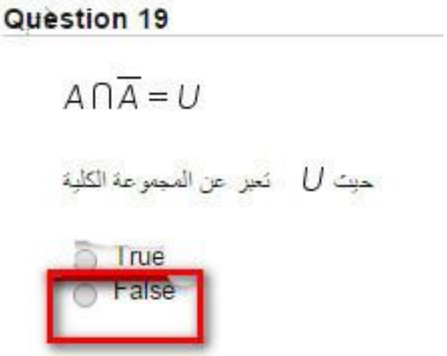
**Question 18**

ناتج المقدار

$\log 0.1^{-1}$

تساوي

○ [✓ 1]
○ -2
○ -1
○ 2

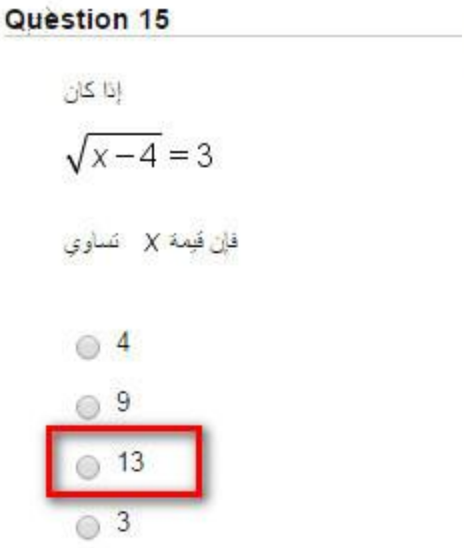


**Question 19**

$A\cap\overline{A}=U$

حيث $U$ تعبر عن المجموعة الكلية

○ True
○ [✓ False]



**Question 15**

إذا كان

$\sqrt{x-4}=3$

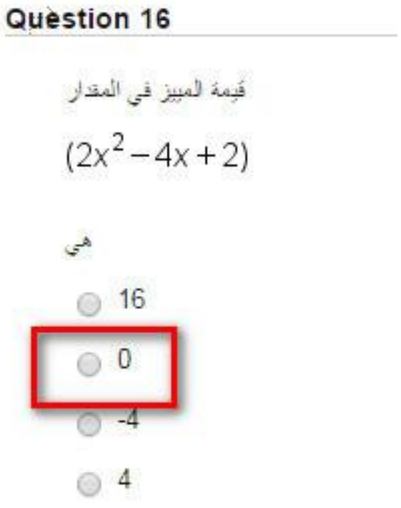
فإن قيمة X تساوي

○ 4

○ 9

[✓ ○ 13]

○ 3



**Question 16**

قيمة المميز في المقدار

$(2x^2-4x+2)$

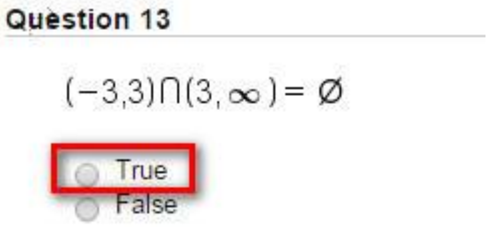
هي

○ 16

[✓ ○ 0]

○ -4

○ 4



**Question 13**

$(-3,3)\cap(3,\infty)=\varnothing$

[✓ ○ True]

○ False