التكامل المحدد

التكامل المحدد:

إذا كانت g(x) دالة بحيث $g'(x) = f(x)$ فان:

$$\int_a^b f(x)dx = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a)$$

ويسمى هذا المقدار بالتكامل المحدد للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ و يسمى a بالحد الأدنى و b بالحد الأعلى أو يسميان معاً بحدي التكامل.

مثال:

أوجد $\int_1^3 x^3 dx$

الحل:

$$\int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{81-1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

بعض خواص التكامل المحدد:

1. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

مثال:

$$\int_1^2 4x^3 dx = 4\int_1^2 x^3 dx = 4\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = [x^4]_1^2 = 16 - 1 = 15$$

2. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

مثال:

$$\int_5^5 3x^2\,dx = 0$$

3. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

مثال:

$$\int_0^2 (3x^2 + e^x)\,dx = \int_0^2 3x^2\,dx + \int_0^2 e^x\,dx$$

4. $\int_c^d f(x)dx = -\int_d^c f(x)dx$

مثال: إذا كان $\int_2^4 f(x)\,dx = 8$ فان $\int_4^2 f(x)\,dx = -8$

5. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

مثال:

$$\int_2^4 x^2\,dx + \int_4^2 x^2\,dx = \int_2^2 x^2\,dx = 0$$

أمثلة:

أوجد التكاملات التالية:

1. $\int_0^3 2\,dx$

الحل:

$$\int_0^3 2\,dx = [2x]_0^3 = 2\times 3 - 0 = 6$$

2. $\int_0^2 (x+6)dx$

الحل:

$$\int_0^2 (x+6)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{2^2}{2} + 6(2)\right] - 0$$

$$= 2 + 12 = 14$$

3. $\int_1^3 (3x^2 - 4x - 5)dx$

الحل:

$$\int_1^3 (3x^2-4x-5)dx = \left[x^3 - 2x^2 - 5x\right]_1^3$$

$$= \left[3^3 - 2(3)^2 - 5(3)\right] - \left[1^3 - 2(1)^2 - 5(1)\right]$$
$$= \left[27 - 18 - 15\right] - \left[1 - 2 - 5\right]$$
$$= -6 + 6 = 0$$

4. $\int_{-2}^{2} (5x + 4)dx$

الحل:

$$\int_{-2}^{2} (5x+4)dx = \left[\frac{5x^2}{2} + 4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[\frac{5(2)^2}{2} + 4(2)\right] - \left[\frac{5(-2)^2}{2} + 4(-2)\right]$$
$$= \left[10 + 8\right] - \left[10 - 8\right]$$
$$= 18 - 2 = 16$$

5. $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

الحل:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \left[\ln\ x\right]_1^2$$

$$= \ln\ 2 - \ln\ 1$$
$$= \ln\ 2 - 0 = \ln\ 2$$

6. $\int_0^{\pi} \sin\ x\ dx$

الحل:

$$\int_0^{\pi} \sin\ x\ dx = \left[-\cos\ x\right]_0^{\pi}$$

$$= -\cos\ \pi - (-\cos\ 0)$$
$$= -(-1) + 1 = 2$$

7. $\int_0^2 (2x+1)^3\,dx$

الحل:

$$\int_0^2 (2x+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 2(2x+1)^3\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(2x+1)^4}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{8}\left[(2\times 2+1)^4 - 1\right]$$

$$= \frac{1}{8}\times 624 = 78$$

٨. إذا كان $\int_1^2 f(x)dx = 5$ ، $\int_1^3 f(x)dx = 10$ فأوجد

i. $\int_2^3 f(x)dx$ ii. $\int_1^1 f(x)dx$

iii. $\int_3^1 f(x)dx$ iv. $\int_1^2 6f(x)dx$

الحل:

$$\int_1^2 f(x)\,dx = 5 \quad \Rightarrow \quad \int_2^1 f(x)\,dx = -5$$

i. $$\int_2^3 f(x)dx = \int_2^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx$$

$$= -5 + 10 = 5$$

ii. $$\int_1^1 f(x)dx = 0$$

iii. $$\int_3^1 f(x)\,dx = -\int_1^3 f(x)\,dx = -10$$

iv. $$\int_1^2 6f(x)dx = 6\int_1^2 f(x)dx = 6\times 5 = 30$$

تمارين:

١. أوجد التكاملات التالية:

i. $\int_0^2 (5x^3 - 3x + 6)dx$

ii. $\int_{-2}^{3} 7dx$

iii. $\int_4^4 \sqrt{16 - x^2}\,dx$

iv. $\int_{-2}^{4} \left(\frac{1}{2}x + 3\right)dx$

v. $\int_{-1}^{2} (x^3 + 1)^2 dx$

vi. $\int_0^{\pi} \cos x\, dx$

vii. $\int_{-2}^{3} \left(6x^2 - 5\right)dx$

viii. $\int_2^{10} \frac{1}{\sqrt{5x - 1}}dx$

ix. $\int_0^{\pi} \sec^2 x\, dx$