المحاضرة الحادية عشرة

مشتقة الدوال الاسية واللوغاريتمية والمثلثية

مشتقة الدوال الاسية:

إذا كانت $y = e^{x}$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x}$$

وبشكل عام إذا كانت $y = e^{u}$ حيث $u = f(x)$ فان $\frac{dy}{dx} = e^{u} . \frac{du}{dx}$

مثال: إذا كانت $y = e^{x^2+2x+1}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2+2x+1}(2x+2) = (2x+2)e^{x+2x+1}$$

نتيجة:

إذا كانت $y = a^{x}$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = a^{x} . \ln a$$

وبشكل عام إذا كانت $y = a^{u}$ حيث $u = f(x)$ فان $\frac{dy}{dx} = a^{u} . \ln a . \frac{du}{dx}$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y = 3^{x}$
2. $y = 9^{2x^2}$

الحل:

1. $\frac{dy}{dx} = 3^{x} \ln 3$

2. $\frac{dy}{dx} = 9^{2x^2}(4x) \ln 9$

مشتقة الدوال اللوغاريتمية:

إذا كانت $y = \ln x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \ln u$ حيث $u = f(x)$ فان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} . \frac{du}{dx}$

مثال: إذا كانت $y = \ln(1 + x^2)$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \times 2x = \frac{2x}{1 + x^2}$$

نتيجة:

إذا كانت $y = \log_a x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \log_a u$ حيث $u = f(x)$ فان:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} . \frac{du}{dx} . \frac{1}{\ln a}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y = \log_2 x$
2. $y = \log_2 (1 + x^2)$

الحل:

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 2}$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \times 2x \times \frac{1}{\ln 2} = \frac{2x}{(1 + x^2) \ln 2}$

مشتقة الدوال المثلثية:

١. إذا كانت $y = \sin$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \sin u$ حيث $u = f(x)$ فان:

$$\frac{dy}{dx} = \cos u . \frac{du}{dx}$$

مثال: إذا كانت $y = \sin 4x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \cos 4x \times 4 = 4 \cos 4x$$

٢. إذا كانت $y = \cos x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \cos u$ حيث $u = f(x)$ فان:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin u . \frac{du}{dx}$$

مثال: إذا كانت $y = \cos 5x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin 5x \times 5 = -5\cos 5x$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y = \cos^2 x$
2. $y = \sin x \cos x$

الحل:

1. $\frac{dy}{dx} = 2\cos x . (-\sin x) = -2\cos x \sin x$
2. $y = \sin x \times -\sin x + \cos x \times \cos x = -\sin^2 x + \cos^2 x$

جدول مشتقات بقية الدوال المثلثية:

3. $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u . \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u . \tan u . \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u . \cot u . \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u . \frac{du}{dx}$

حيث $u = f(x)$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ الدوال الآتية :

1. $y=\tan^2 x$
2. $y=\cot^3(2x+1)$
3. $y=\sec(x+1)$
4. $y=\csc 2x$

الحل:

$$1.\quad \frac{dy}{dx}=2\tan x\ \sec^2 x$$

$$2.\quad \frac{dy}{dx}=3\cot^2(2x+1).\left[-\csc^2(2x+1)\right](2)$$
$$=-6\cot^2(2x+1).\csc^2(2x+1)$$

$$3.\quad \frac{dy}{dx}=\sec(x+1).\tan(x+1).(1)$$
$$=\sec(x+1)\tan(x+1)$$

$$4.\quad \frac{dy}{dx}=-\csc 2x\ .\ \cot 2x\ .(2)$$
$$=-2\csc 2x\ \cot 2x$$

الاشتقاق الضمني:

لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ من دالة ضمنية(غير صريحة) نعتبر y دالة لـ x ونطبق قواعد

الاشتقاق المناسبة.

ملاحظة:
عندما نفاضل أي حد يحتوي على y نضرب ناتج التفاضل في $\frac{dy}{dx}$ ثم نجمع الحدود المحتوية على $\frac{dy}{dx}$ في طرف ، وننقل الحدود الاخرى في الطرف الثاني.

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال الآتية:

$$1.\quad y^2+x^2=9$$

$$2.\quad y^2+x^2+3x^3+4y^3=9$$

$$3.\quad 4x^2+3xy-xy^2=0$$

الحل:

$$1. \quad 2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$2. \quad 2y\frac{dy}{dx} + 2x + 9x^2 + 12y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} + 12y^2\frac{dy}{dx} = -2x - 9x^2$$

$$\left(2y + 12y^2\right)\frac{dy}{dx} = -2x - 9x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 9x^2}{2y + 12y^2}$$

$$3. \quad 8x + 3x\frac{dy}{dx} + 3y - 2xy\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$$

$$3x\frac{dy}{dx} - 2xy\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y - 8x$$

$$(3x - 2xy)\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y - 8x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3y - 8x}{3x - 2xy}$$

الاشتقاق الجزئي:

إذا كانت لدينا الدالة $z = f(x, y)$ دالة متغيرين ، اذا ابقينا y ثابتاً فان z دالة في x فقط ، وعليه نستطيع ايجاد تفاضل z بالنسبة إلى x وتسمى المشتقة التي نحصل عليها المشتقة الجزئية للدالة z بالنسبة إلى x ويرمز لها بالرمز $\frac{\partial z}{\partial x}$

وبنفس الطريقة إذا أبقينا x ثابتاً فان z دالة في y فقط ، وعليه نستطيع ايجاد تفاضل z بالنسبة إلى y وتسمى المشتقة التي نحصل عليها المشتقة الجزئية للدالة z بالنسبة إلى y ويرمز لها بالرمز $\frac{\partial z}{\partial y}$

مثال:

أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ لكل من الدوال الآتية:

1. $z = xy + x^2y + y^2x$

2. $z = 2x^2 + 3xy - 6y^2$

الحل:

1. $$\frac{\partial z}{\partial x} = y + 2xy + y^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x^2 + 2yx$$

2. $$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 3y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 12y$$

١. أوجد مشتقات الدوال التالية:

i. $y = e^{x^2-2x}$

ii. $y = (2x+3)e^{-2x}$

iii. $y = e^{\cos x}$

iv. $y = \frac{1}{2}\left(e^{3x} + e^{-3x}\right)$

v. $y = \log_4 3x$

vi. $y = 7^{x^3}$

vii. $y = \ln(\sin x)$

viii. $y = x^2e^{2x}$

ix. $y = e^{2x}\cos 3x$

٢. أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

i. $9x^2 + 4y^2 = 40$

ii. $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$

iii. $4xy^3 - x^2y + x^3 - 5x + 6 = 0$

iv. $5x^2 + 2x^2y + y^2 = 8$

v. $y = x^2 \sin x$

vi. $y^2 = x\cos y$

٣. إذا كانت $y^2 - 4x^2 = 5$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$ و $y = 3$

٤. إذا كانت $xy^2 + 3y = 27$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 2$ و $y = 3$

٥. أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ إذا كانت :

i. $z = x^3 - 2xy + y^3$

ii. $z = 5y^3 + xy - 7y^2$

iii. $z = xy - \ln xy$

iv. $z = x\ln y + y\ln x - xe^{xy}$

تطبيقات التفاضل:

إيجاد القيم العظمى والصغرى للدالة:

أسلوب المشتقة الثانية:

الخطوات :

أ- إيجاد المشتقة الأولى للدالة ($f'(x)$).

ب- نضع $f'(x)=0$ لإيجاد قيم x التي تحقق المعادلة (القيم الحرجة).

ج- إيجاد المشتقة الثانية للدالة ($f''(x)$).

د- عند القيمة الحرجة $x=x_1$ تكون للدالة ......

i. قيمة صغرى محلية إذا كانت $f''(x_1)>0$

ii. قيمة عظمى محلية إذا كانت $f''(x_1)<0$

iii. ويفشل الاختبار إذا كانت $f''(x_1)=0$

مثال(١): إذا كان $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ فما هي نقط القيم العظمى والصغرى إن وجدت؟ لهذه الدالة.

الحل:

$$f'(x)=3x^2-6x-9$$

$$3x^2-6x-9=0$$

$$3(x^2-2x-3)=0 \qquad \div 3$$

$$x^2-2x-3=0$$

$$(x-3)(x+1)=0$$

إما $(x-3)=0$

اذا $x=3$

أو $(x+1)=0$

اذا $x=-1$

$$f''(x)=6x-6$$

عند $x = 3$

$$f''(3) = 6 \times 3 - 6 = 18 - 6 = 12 > 0$$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 3$ وهي:

$$f(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 - 9 \times 3 + 5$$
$$= 27 - 27 - 27 + 5 = -22$$

عند $x = -1$

$$f''(-1) = 6 \times -1 - 6 = -6 - 6 = -12 < 0$$

$\therefore$ توجد قيمة عظمى محلية عند $x = -1$ وهي:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - 9 \times -1 + 5$$
$$= -1 - 3 + 9 + 5 = 10$$

مثال(٢): إذا كان $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 1$ فما هي نقط القيم العظمى والصغرى إن وجدت؟ لهذه الدالة.

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$$

$$3x^2 - 24x + 45 = 0$$
$$3(x^2 - 8x + 15) = 0 \qquad \div 3$$
$$x^2 - 8x + 15 = 0$$
$$(x - 3)(x - 5) = 0$$

إما $(x - 3) = 0$

اذا $x = 3$

أو $(x - 5) = 0$

اذا $x = 5$

$$f''(x) = 6x - 24$$

عند $x = 3$

$$f''(3) = 6 \times 3 - 24 = 18 - 24 = -6 < 0$$

$\therefore$ توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 3$ وهي:

$$f(3) = 3^3 - 12 \times 3^2 + 45 \times 3 + 1$$
$$= 27 - 108 + 135 + 1 = 163 - 108 = 55$$

عند $x = 5$

$$f''(5) = 6 \times 5 - 24 = 30 - 24 = 6 > 0$$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 5$ وهي:

$$f(5) = 5^3 - 12 \times 5^2 + 45 \times 5 + 1$$
$$= 125 - 300 + 225 + 1 = 351 - 300 = 51$$

تعريف:

تسمى النقطة $(x_1, f(x_1))$ نقطة انقلاب لمنحنى الدالة f إذا كان منحنى الدالة مقعراً إلى أسفل مباشرة إلى يسار x ومقعرا إلى أعلى مباشرة إلى يمين x أو العكس.

الخطوات :

أ- نوجد $f''(x)$

ب- نوجد النقاط الحرجة للمشتقة الثانية ($f''(x)=0$)

ج- نضع القيم على خط الأعداد

نقطة الانقلاب:

د- نحدد إشارة $f''(x)$ حول النقاط الحرجة ويكون المنحنى:

- مقعرا نحو الأعلى إذا كان $f''(x)>0$
- مقعرا نحو الأسفل إذا كان $f''(x)<0$

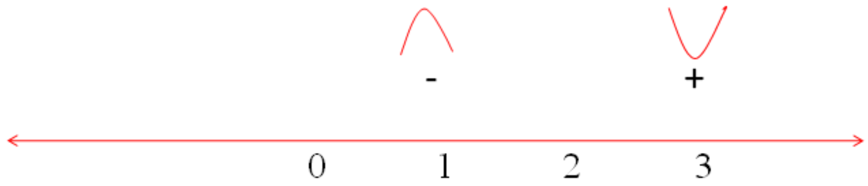
إذا حصل التغير في التقعر قبل وبعد نقطة حرجة x_1 مثلا اذا توجد نقطة انقلاب وهي $(x_1, f(x_1))$

مثال(١):

أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$f''(x) = 6x - 12$$
$$6x - 12 = 0$$
$$6x = 12$$
$$x = \frac{12}{6} = 2$$



$$f''(1) = 6(1) - 12 = 6 - 12 = -6$$

$$f''(3) = 6(3) - 12 = 18 - 12 = +6$$

بما أن حصل تغير في التقعر قبل وبعد ٢ اذا توجد نقطة انقلاب عند $x=2$ وهي $(2, f(2))$

$$f(2) = 2^3 - 6 \times 2^2 + 9 \times 2 + 5$$

$$= 8 - 24 + 18 + 5 = 7$$

نقطة الانقلاب هي $(2,7)$

مثال(٢):

أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

الحل:

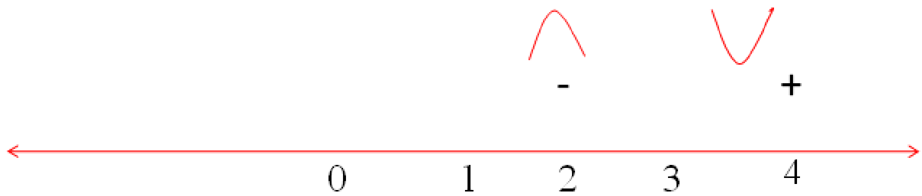
$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

$$f''(x) = 6x - 18$$

$$6x - 18 = 0$$

$$6x = 18$$

$$x = \frac{18}{6} = 3$$



$$f''(2) = 6(2) - 18 = 12 - 18 = -6$$

$$f''(4) = 6(4) - 18 = 24 - 18 = +6$$

بما أن حصل تغير في التقعر قبل وبعد ٢ اذا توجد نقطة انقلاب عند $x=2$ وهي $(3, f(3))$

$$f(2) = 3^3 - 9 \times 3^2 + 24 \times 3$$

$$= 27 - 81 + 72 = 18$$

نقطة الانقلاب هي $(3,18)$

تمارين:

١- ما هي نقط القيم العظمى والصغرى إن وجدت؟ للدوال التالية:

i. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

ii. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$

iii. $f(x) = x^2 + 2x + 18$

٢- أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

٣- أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$