المحاضرة السابعة (مقاييس النزعة المركزية)

مقدمــة

- بعد تنظيم البيانات في جداول تكرارية وتمثيلها بيانيا فإن الخطوة التالية هي البدء بدراسة خواص هذا التوزيع باستخدام مجموعة من القيم أو المقاييس.
- هي مقاييس عددية تستخدم لقياس موضع تركز أو تجمع البيانات.
- في أغلب الظواهر الطبيعية القيمة النموذجية تميل إلى الوقوع في المركز

مقاييس النزعة المركزية شروط المعيار الجيد

- يحسب بطريقة سهلة لا تؤثر على دقة البيانات.
- يأخذ فى الاعتبار جميع المفردات المطلوب حساب المقياس لها.
- يكون له معنى طبيعى مفهوم يستخدم فى الحياة العامة.
- يعكس التغير فى الظاهرة ، ولا يتغير بتغير طرق حسابه.
- يخضع للعمليات الجبرية خضوعا تاما.
- لا يتأثر بالقيم الشاذة او المتطرفة.
- لا يتأثر باختلاف العينات ذات الحجم الواحد.

(مقاييس النزعة المركزية) القيم التي تقترب منها البيانات أو تتركز حولها أو تتوزع بالقرب منها معظم البيانات

- **المنوال**
- **الوسيط**
- **الوسط الحسابي**

الوسيط (Medien)

من مقاييس النزعة المركزية للبيانات الترتيبية ،يركز على موقع القيمة .

فالوسيط لأية مجموعة من القيم المرتبة هي القيمة التي يسبقها ويليها اعداد متساوية من هذة القيم. أي القيمة التي في منتصف القيم المعطاة وذلك بعد ترتيبها تصاعديا او تنازليا .وبالتالي متوسطا موقعيا لمجموعه من القيم . وعلية فعند استخدامه مع البيانات الكمية فالبحث يتمحور فقط على القيمة التي تنصف التوزيعات.اي القيمة التي تقع قبلها 50% من الحالات وبعدها50% من الحالات. الوسيط من مقاييس النزعة المركزية المهمة لوصف بيانات العلوم الاجتماعية .

على سبيل المثال درجت التقارير الصحفية الى الإشارة الى الزيادة التي تطرا على الاجر الوسيط بالنسبة لفئات معينة .

أولاً : الوسيط للبيانات غير المبوبة :

مثال(١) عندما يكون مجموع عدد القيم فرديا: أي ن = عددا فرديا

البيانات ادناه توضح درجات سبعة طلاب .

المطلوب : ايجاد الوسيط : 95، 86 ، 78 ، 90 ، 62، 73 ،89

الحل :

١- ترتيب الدرجات ترتيبا تصاعديا او تنازليا كالاتي :

الدرجات مرتبة	**62**	**73**	**78**	**86**	**89**	**90**	**95**	
رتب الدرجات	1	2	3	4	5	6	7	ن = 7

٢- تحديد رتبة الوسيط :

رتبة الوسيط اذا كان مجموع عدد القيم فرديا =

رتبة الوسيط لمجموع عدد القيم الفردية =

ن = مجموع عدد القيم $\frac{1 + ن}{2}$

في المثال الحالي : مجموع عدد القيم = 7 اعداد أي ن = 7

رتبة الوسيط = $\frac{1+7}{2}$ = 4 = الرتبة الرابعة

الدرجات مرتبة	62	73	78	86	89	90	95	
رتب الدرجات	1	2	3	4	5	6	7	ن = 7

تحديد الوسيط :

الوسيط = القيمة المقابلة لرتبة الوسيط

في المثال الحالي القيمة المقابلة للرتبة 4 (الرتبة الرابعة) = 86

الوسيط = 86 درجة

مثال : (2) عندما يكون مجموع عدد القيم زوجيا : أي ن = عددا زوجيا

البيانات ادناه يوضح درجات الطلاب في امتحان مادة ما المطلوب ايجاد الوسيط :

78 ، 86 ، 75، 73 ، 90، 89 ، 91 ، 95 ، 73 ، 62

الحل:

١- ترتيب البيانات ترتيبا تصاعديا او تنازليا .

الدرجات مرتبة	62	73	73	75	78	86	89	90	91	95	
رتب الدرجات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ن = 10

٢- تحديد رتبة الوسيط :

نسبة لان مجموع اعداد القيم زوجيا ن= 10 فان هناك قيمة وسيطين ، وعلية فان هناك رتبتين وسيطيتين تقابلان القيمتين الوسيطيين .

الدرجات مرتبة	62	73	73	75	78	86	89	90	91	95	
رتب الدرجات	1	2			5	6			9	10	ن = 10

رتبة الفئة الوسيطية الأولى

رتبة الفئة الوسيطية الثانية

رتبة الفئة الوسيطية الاولى = $\frac{ن}{2}$

رتبة الفئة الوسيطية الثانية = $\frac{ن}{2}$ +1

في المثال الحالي

رتبة الفئة الوسيطية الأولى = $\frac{10}{2}$ = 5= الرتبه الخامسه

رتبة الفئة الوسيطية الثانية = $\frac{10}{2}$ =5+1 = 6الرتبه السادسه

الدرجات مرتبة	62	73	73	75	78	86	89	90	91	95	
رتب الدرجات	1				5	6				10	ن = 10

القيمة الوسيطية الأولى

القيمة الوسيطية الثانية

٣- تحديد القيمتين الوسيطيين :

القيمة الوسيطة الاولى هي القيمة المقابلة للرتبة 5= 78

القيمة الوسيطية الثانية هي القيمة المقابلة للرتبة 6= 86

٤- تحديد الوسيط :

الوسيط = متوسط القيمتين الوسيطيين . = $\frac{86+78}{2}$ = 82 درجه

(ن+1) / 2

مـثـال :

احسب الوسيط من البيانات التالية

61 – 80 – 40 – 10 – 15 – 12 – 20

الحل :

نرتب تصاعدي أولاً :

10	12	15	20	40	61	80

نحسب ترتيب الوسيط = (7 + 1) / 2 = 4 ، ترتيب الوسـيط هو الرابع .

الوسيط = 20 .

احسب الوسيط من البيانات التالية :

40 – 33 – 20 – 18 – 14 – 15 – 12 – 15

الحل :

نرتب تصاعدي أولاً :

12	14	15	15	18	20	33	40

نحسـب ترتيـب الوسـيط = (2/8 ، 2/8 + 1) = (4 ، 5) ، ترتيب الوسيط الرابع والخامس وقيمة الوسيط متوسط القيمتـين اللتان ترتيبهما الرابع والخامس .

الوسيط = (15 + 18) / 2 = 16.5 .

تدريبات

- إذا كان لدينا مجموعة من الدرجات ٤ ، ٧ ، ٨ ، ١٠ ، ١١ فإن
- الوسيط هو الدرجة رقم ٣ فى الترتيب وهى تساوى ٨ .
- أما فى مجموعة الدرجات ٤ ، ٧ ، ٨ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٧ ، ١٨ فإن
- الوسيط هو الدرجة رقم ٥ فى الترتيب وهى تساوى ١١ .

نلاحظ أن عدد الدرجات فى المجموعة الاولى خمس درجات وكان ترتيب الوسيط هو الدرجة رقم ٣ أى

١+٥ / ٢ = ٣ اذن ترتيب الوسيط رقم ٣ = ٨

بينما عدد الدرجات فى المجموعة الثانية ٩ وكان ترتيب الوسيط هو ٥ أى

٩+١ =٥ اذن ترتيب الوسيط رقم ٥ = ١١

٢

- **احسب الوسيط للقيم الآتية : ١٦، ١٠ ، ٢٥ ، ٩ ، ٣٤ ، ١٤ ، ٧**

الحـل : نقوم بترتيب القيم تصاعدياً (او تنازلياً) ٧ ، ٩ ، ١٠ ، ١٤ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٣٤

ن +١ = ٧+١ = ٤

٢ ٢

ويكون الوسيط القيمة التي ترتيبها ٤ = أى القيمة ١٤

- **أوجد الوسيط للقيم الآتية : ٢٠ ، ١٠٠ ، ٢٥ ، ١٠ ، ٢ ، ١٥ ، ٢٢ ، ١١٠**

الحـل : نقوم بترتيب القيم تصاعدياً (او تنازلياً) ٢ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ١٠٠ ، ١١٠

ويكون الوسيط = ن = ٨ =٤

٢ ٢

والقيمة التالية له = ن + ١ = ٤+ ١ = ٥

٢

وبتطبيق القانون فإن الوسيط = (٢٠+ ٢٢) = ٢١

٢

ثانياً :الوسيط للبيانات المبوبة :

مثال :

- كون عموداً للتكرار المتجمع الصاعد (العمود كˇ)
- حدد نصف التكرارات أي 50 % من مجموع التكرارات .

= 89 = 44.5

2

- حدد الفئة الوسيطية . و هي الفئة المقابلة للتكرار المتجمع الصاعد المتضمن لنصف الحالات .

المتضمن لنصف الحالات هو 49 .

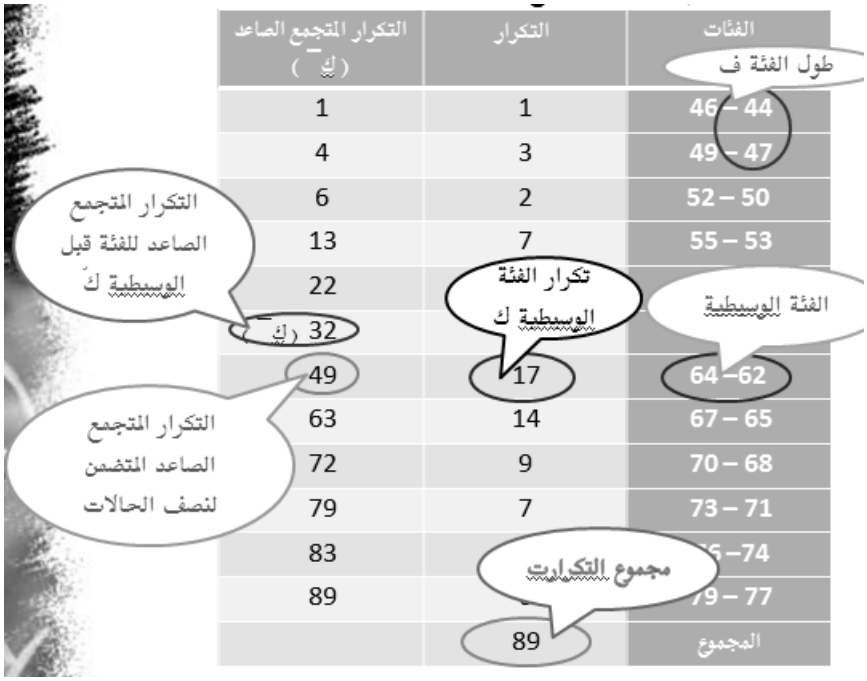
الفئة المقابلة لتكرار 49 = 62 – 64

إذن الفئة 62 – 64 هي الفئة الوسيطية .

- حدد الحدود الحقيقة للفئة الوسيطية . في المثال الحدود الحقيقية للفئة الوسيطية = 61.5 – 64.5
- حدد الحد الأدنى الحقيقي للفئة الوسيطية ل د . في المثال : ل د = 61.5

الفئات	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد (ك¯)
46 – 44	1	1
49 – 47	3	4
52 – 50	2	6
55 – 53	7	13
58 –56	9	22
61 –59	10	32 (ك¯)
ل د 62– 64	17 ك	49
67 – 65	14	63
70 – 68	9	72
73 – 71	7	79
76 –74	4	83
79 – 77	6	89
المجموع	89	

الوسيط باستخدام التكرار المتجمع الصاعد



الفئات (طول الفئة ف)	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد ($\bar{ك}$)
46 – 44	1	1
49 – 47	3	4
52 – 50	2	6
55 – 53	7	13
		22
		32 ($\bar{ك}$)
64 – 62	17	49
67 – 65	14	63
70 – 68	9	72
73 – 71	7	79
74 –		83
79 – 77		89
المجموع	89	

نطبق المعادلة التالية لإيجاد الوسيط :

$$\text{الوسيط} = \text{ل}_{\text{د}} + \left(\frac{\frac{\text{ك}}{2} - \bar{\text{ك}}}{\text{ك}} \right) \times \text{ف}$$

ل د = الحد الأدني الحقيقي للفئة الوسيطية

ك = مجموع التكرارات .

كَ = التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية .

ك = تكرار الفئة الوسيطية .

ف = طول الفئة .

بالتعويض :

$$\text{الوسيط} = 3 \times \left(\frac{\frac{89}{2} - 32}{17} \right) + 61.5$$

63.7 درجة .

بعض مميزات وعيوب الوسيط:

- **مميزات الوسيط:** إن الوسيط يعتبر من مقاييس النزعة المركزية الشائعة وذلك لما يتمتع به من بعض الصفات الجيدة. ومن مميزات الوسيط نذكر ما يلي:
  ١. الوسيط سهل التعريف والحساب.
  ٢. الوسيط وحيد لمجموعة البيانات الواحدة.
  ٣. الوسيط أقل تأثرًا من المتوسط بالقيم الشاذة أو المتطرفة.
- **عيوب الوسيط:** بالرغم من أن الوسيط يعتبر من مقاييس النزعة المركزية الجيدة إلا أن له بعض العيوب نذكر منها ما يلي:
  ١. لا يأخذ الوسيط في الاعتبار جميع البيانات إذا أنه يعتمد فقط على القيم التـــي في المنتصف وعلى ترتيب البيانات بغض النظر عن قيمها.
  ٢. لا يمكن بشكل عام حساب الوسيط للبيانات الوصفية (النوعية).

الوسيط للبيانات غير المبوبة:

عندما يكون مجموع عدد القيم فردياً ؛أي ن = عدداً فردياً:

البيانات أدناه توضح درجات سبعة طلاب.

المطلوب: إيجاد الوسيط: ٨٩ ، ٧٣ ، ٦٢ ، ٩٠ ، ٧٨ ، ٨٦ ، ٩٥

الحل:

١)ترتيب الدرجات ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً كالآتي:

الدرجات مرتبة	٦٢	٧٣	٧٨	٨٦	٨٩	٩٠	٩٥	
رتب الدرجات	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	ن=٧

٢) تحديد رتبة الوسيط:

رتبة الوسيط إذا كان مجموع عدد القيم فردياً=

رتبة الوسيط لمجموع عدد القيم الفردية =

$$\frac{\text{ن}+1}{2}$$

مجموع عدد القيم=٧ أعداد. أي ن=٧

رتبة الوسيط = $\frac{7+1}{2}$=٤ الرتبه الرابعه

٣)تحديد الوسيط:

الوسيط = القيمة المقابلة لرتبة الوسيط

في المثال الحالي القيمة المقابلة للرتبة ٤ (الرتبة الرابعة)=٦٨

الوسيط= ٨٦ درجة.

عندما يكون مجموع القيم زوجياً: أي ن=عدداً زوجياً

البيانات أدناه توضح درجات الطلاب في امتحان مادة ما .

المطلوب إيجاد الوسيط. ٢٦ ، ٧٣ ، ٩٥ ، ٩١ ، ٨٩ ، ٩٠ ، ٧٣ ، ٧٥ ، ٨٦ ، ٧٨ .

الحل: ١)ترتيب البيانات ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً.

٢)تحديد رتبة الوسيط:

نسبة لأن مجموع أعداد القيم زوجياً ن=١٠ فإن هناك قيمتين وسيطيين؛ تقابلان القيمتين الوسيطيين.

رتبة الفئة الوسيطية الأولى = ن / ٢

رتبة الفئة الوسيطية الثانية = ن / ٢ +١

رتبة الفئة الوسيطية الاولى= $\frac{10}{2}$ = ٥ =الرتبة الخامسة

رتبة الفئة الوسيطية الثانية= $\frac{10}{2}$ +١ =٦ الرتبة السادسة.

٣) تحديد القيمتين الوسيطيين:

القيمة الوسيطية الأولى هي القيمة المقابلة للرتبة ٥=٧٨

القيمة الوسيطية الثانية هي القيمة المقابلة للرتبة٦ =٨٦

٤) تحديد الوسيط:

الوسيط=متوسط القيمتين الوسيطيين.

$\frac{86+78}{2}$=٢٨درجة

الوسيط للبيانات المبوبة:

الوسيط باستخدام التكرار المتجمع الصاعد:

١)نكون عموداً للتكرار المتجمع الصاعد (العمود ك)

ب-نحدد نصف التكرارات أي ٥٠% من مجموع التكرارات= ٨٩

$\frac{}{2}$ =٤٤،٥

ج-نحدد الفئة الوسيطية.

الفئة الوسيطية هي الفئة المقابلة للتكرار المتجمع الصاعد المتضمن لنص الحالات.

هو ٤٩ الفئة المقابلة للتكرار٤٩ =٦٢-٦٤

د-نحدد الحدود الحقيقية للفئة الوسيطية.

٦١،٥-٦٤،٥

هـ- نحدد الحد الأدنى الحقيقي للفئة الوسيطية ل د

ل د =٦١،٥

الفئات	التكرار
٤٤-٤٦	١
٤٧-٤٩	٣
٥٠-٥٢	٢
٥٣-٥٥	٧
٥٦-٥٨	٩
٥٩-٦١	١٠
٦٢-٦٤	١٧
٦٥-٦٧	١٤
٦٨-٧٠	٩
٧١-٧٣	٧
٧٤-٧٦	٤
٧٧-٧٩	٦
المجموع	٨٩

	الفئات	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	
	٤٤-٤٦	١	١	
	٤٧-٤٩	٣	٤	
	٥٠-٥٢	٢	٦	
	٥٣-٥٥	٧	١٣	
	٥٦-٥٨	٩	٢٢	
	٥٩-٦١	١٠	٣٢(ك)	التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية
الفئة الوسيطية	٦٢-٦٤	١٧	٤٩	التكرار المتجمع الصاعد المتضمن لنصف الحالات
	٦٥-٦٧	١٤	٦٣	
	٦٨-٧٠	٩	٧٢	
	٧١-٧٣	٧	٧٩	
	٧٤-٧٦	٤	٣٨	
	٧٧-٧٩	٦	٨٩	

و)نطبق المعادلة التالية لإيجاد الوسيط:

الوسيط=ل د + $\frac{\text{ك -ك3}}{2}$ ($\frac{}{\text{ك}}$) ف

الوسيط =٦١،٥ + ٣٢-٨٩ ($\frac{}{2}$)×٣=٦٣،٧

$\frac{}{١٧}$

المتوسط الحسابي (م) Arithmetic Mean (x)

المتوسط الحسابي يعتبر من أهم مقاييس النزعة المركزية للبيانات الكمية ولا يستخدم مع البيانات النوعية .

أ- المتوسط الحسابي للقيم غير المبوبة :

Arithmetic Mean for Grouped Data

الطريقة الأولى :

المتوسط الحسابي لعدد من القيم هو حاصل جمعها مقسوما على عددها .

$$م = \frac{س١ + س٢ + س٣ + \dots}{ن}$$

ويمكن كتابتها بصورة مختصرة كالآتي : $م = \frac{\Sigma س}{ن}$

حيث س = س1،س2،س3 ،.....

مثال :

إذا كانت لدينا الدرجات التالية : 12، 7، 14، 8، 9

فإن متوسطها الحسابي م:

$$م = \frac{12+7+14+8+9}{5} = \frac{50}{5} = 10 \text{ درجات}$$

تدريبات

احسب الوسط الحسابى لدرجات 8 طلاب في مادة الإحصاء والتي كان بياناتهم كالتالى :

9 – 8 – 8 – 7 – 6 – 5 – 3 – 2

الحل :

$$س/ = \frac{9+8+8+7+6+5+3+2}{8} = \frac{48}{8} = 6 \text{ درجات}$$

ب- المتوسط الحسابي للبيانات المجمعة (المبوبة)
Arithmetic Mean for Grouped Data

الفئات	التكرار
46-44	1
49-47	3
52-50	2
55-53	7
58-56	9
61-59	10
64-62	17
67-65	14
70-68	9
73-71	7
76-74	4
79-77	6
المجموع	89

الطريقة الأولى :

المتوسط الحسابي بالطريقة المطولة :

إذا كان لدينا توزيع درجات 89من العمال بالنسبة للروح المعنوية في جدول ونود قياس المتوسط الحسابي :

ينبغي اتباع الخطوات التالية /

١) نحسب مراكز الفئات بالنسبة لكل الفئات ونضع الناتج في العمود (س).

٢) نضرب كل مركز فئة (س) فيما يقابله من تكرار (ك) ونضع الناتج في عمود (س ك) .

المتوسط الحسابي : الطريقة المطولة :

الفئات (ف)	مركز الفئة (س)	التكرار (ك)	س x ك = (س ك)
46-44	45	1	45
49-47	48	3	144
52-50	51	2	102
55-53	54	7	378
58-56	57	9	513
61-59	60	10	600
64-62	63	17	1071
67-65	66	14	924
70-68	69	9	621
73-71	72	7	504
76-74	75		300
79-77	78		468
المجموع		89	5670

∃ ك

∃ س ك

٣) نجمع حاصل ضرب مراكز الفئات في تكراراتها ،

حاصل الجمع يساوي Σ س ك = 5670.

٤) نقسم حاصل الجمع Σ س ك على مجموع التكرارات ∃ (ك) = $\frac{\exists \text{ س ك}}{\exists \text{ك}}$

م = $\frac{\exists \text{ س ك}}{\exists \text{ك}}$ = 5670 / 89 = 63.7 درجة .

تدريب

الجدول التالى يوضح العلاقة بين فئات الدخل بأحد المصانع وعدد العمال والمطلوب من واقع بيانات الجدول حساب الوسط الحسابى بطريقة مراكز الفئات .

فئات الدخل	100-	200-	300-	400-	500-	600-	800-700
عدد العمال	10	12	20	28	16	8	6

الحل :

ف	ك	س	س × ك
100-	10	150	1500
200-	12	250	3000
300-	20	350	7000
400-	28	450	12600
500-	16	550	8800
600-	8	650	5200
800-700	6	750	4500
مج	100	مج	42600

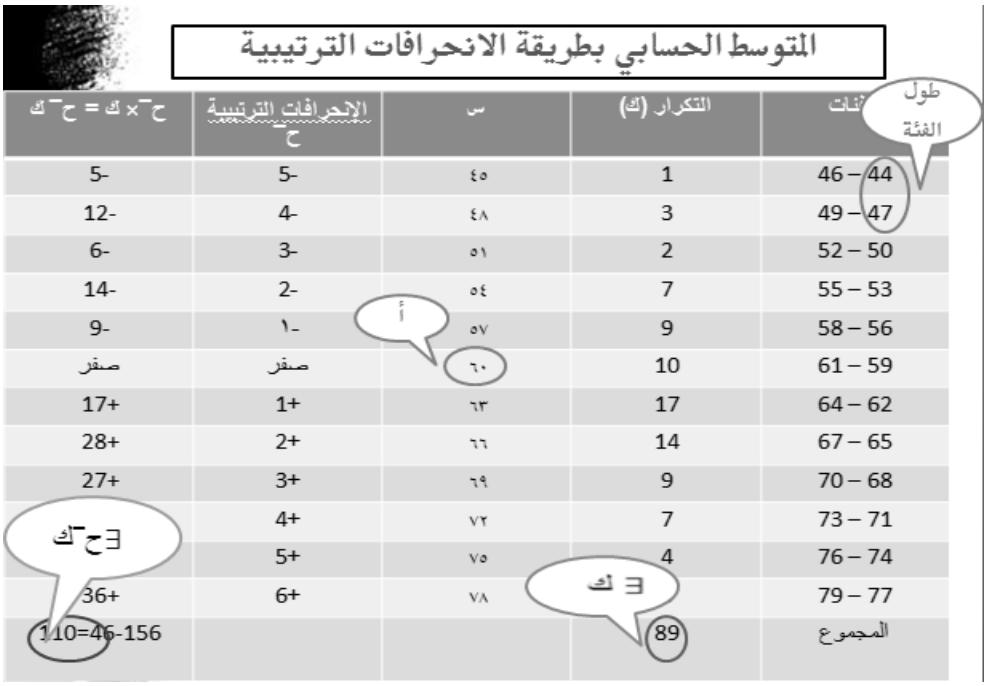
$$س/ = \frac{42600}{100} = 426 \text{ جنيه}$$

الطريقة الثانية :

استخدام طريقة الانحرافات الترتيبية لقياس المتوسط الحسابي :

١- أولا نقوم باختيار الوسط الفرضي مقابل التكرار الموجود في الوسط ، أو مقابل اكبر تكرار.
٢- وهو مقابل الفئة 59-61 ، ومركزها ثم نرتب الفئات انطلاقا من هذه الفئة بحيث تعطي هذه الفئة الرتبة صفراً.
٣- نضع للفئات الأكبر نبدئ من + 1ثم +2 +3 +4
٤- وبالنسبة للفئات الأصغر منها نضع قيم الانحرافات الترتيبية: -1 -2 -3 إلى نهاية الفئات ونضع عمود (ح¯)
٥- نضرب الانحرافات الترتيبية (ح¯) في التكرارات المقابلة لها (ك) ونضع الناتج في عمود (ح¯ ك)
٦- نجمع العمود (ح¯ ك) = 3 ح¯ ك جمعاً جبرياً كما سبق ذكره

الوسط الفرضي= 156-46 = 110



المتوسط الحسابي بطريقة الانحرافات الترتيبية

فئات	التكرار (ك)	س	الانحرافات الترتيبية ح	ح × ك = ح ك
46 – 44	1	٤٥	5-	5-
49 – 47	3	٤٨	4-	12-
52 – 50	2	٥١	3-	6-
55 – 53	7	٥٤	2-	14-
58 – 56	9	٥٧	١-	9-
61 – 59	10	٦٠	صفر	صفر
64 – 62	17	٦٣	1+	17+
67 – 65	14	٦٦	2+	28+
70 – 68	9	٦٩	3+	27+
73 – 71	7	٧٢	4+	
76 – 74	4	٧٥	5+	
79 – 77		٧٨	6+	36+
المجموع	89			110=46-156

طول الفئة

أ

∃ ك

∃ ح ك

قانون المتوسط الحسابي للانحرافات الترتيبية :

$$م = أ + \left[\frac{\exists ح ك}{\exists ك}\right] \times ف$$

أ= مركز الفئة المقابل للوسط الفرضي

ف= طول الفئة

$\exists ك$ = مجموع التكرار.

$\exists ح ك$ = $\exists ح^{-} ك$

م = 60 + $\frac{110}{89}$ ×3 = 63.7 درجة

تدريب

الجدول التالى يوضح العلاقة بين فئات الدخل بأحد المصانع وعدد العمال والمطلوب من واقع بيانات الجدول حساب الوسط الحسابى بطريقة الانحرافات المختصرة .

فئات الدخل	100-	200-	300-	400-	500-	600-	800-700
عدد العمال	10	12	20	28	16	8	6

ف	ك	س	ح/	ح/ × ك
100–	10	150	3–	30–
200–	12	250	2–	24–
300–	20	350	1–	20–
400–	28	450	صفر	صفر
500–	16	550	1	16
600–	8	650	2	16
800–700	6	750	3	18
مج	100	مج		24–

$$\text{س}/ = 450 + \frac{24-}{100} \times 100 = 450 - 24 = 426$$

س/ = 426 جنيه .