مبادىء الرياضيات : المحاضرة الثالثة

الفصل الثاني : العمليات الجبرية

سنتعرف في هذه المحاضرة على كل من المفاهيم التالية :

1 – الأسس والجذور . 2 – اللوغاريتمات .

1) – مفهوم الأسس :

تعريف : اذا كان x عدد حقيقي مرفوع للقوة n (عدد صحيح) فأن

$x^n = x.x.x.....x$ (من n المرات)

فمثلاً نقول بأن : $5^3=5\times5\times5.$ $x^4= x.x.x.x.$

و نلاحظ دائماً بأن أي عدد مرفوع للأسس صفر يساوي 1 .

نقول بأن : $x^o= 1$

و كذلك في حال وجود أس سالب , فأنه يمكن تحويله إلى أس موجب حسب القاعدة التالية : $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

و بشكل عام : $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ أما إذا كان $\frac{x^{-n}}{x^{-M}} = \frac{y^M}{x^n}$

أمثلة : بسط المقادير التالية: .

1)- $3^{-4} = \frac{1}{3}^4 = {}^1/_{3\times3\times3\times3} = {}^1/_{81}$.

2)- $(\frac{2}{3})^{-2} = {}^{2^{-2}}/_{3^{-2}} = {}^{3^2}/_{2^2} = {}^9/_4$.

خواص الأسس : إذا كان $x , y \in R$, و كان $n, m \in Z$ فإن

1)- $x^n * x^m = x^{n+m}$

مثال :

$x^3 * x^4 = x^{3+4} = x^7$

2)- $x^{-5} * x^{-2} = x^{5+-2} = x^{-7} = \frac{1}{x^7}$

3)- $x^2 * y^{-2} = x^2 * \frac{1}{y^2} = \frac{x^2}{y^2}$

2- إذا كان $\frac{x^n}{x^M} = x^{n-M}$

فمثلاً : $\frac{x^3}{x^5} = x^{3-5} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ إعادة كتابة هذا المقدار

$\frac{x^3}{x^5} = \frac{x*x*x}{x*x*x*x*x} = \frac{1}{x*x} = \frac{1}{x^2}$ ← على شكل حاصل ضرب .

مثال : بسط المقدار التالي :

1)- $x^{-3}/x^{-5} = x^{-3-(-5)} = x^{-3+5} = x^2$.

2)- $x^{-3}/x^5 = x^{-3-5} = x^{-8} = \frac{1}{x^8}$.

3 – إن قيمة المقدار : . $(x^n)^m = x^{nm}$

مثال / اوجد قيمة : 1)- $(x^2)^3 = x^{2*3} = x^6$.

2)- $(x^{-2})^3 = x^{-2*3} = x^{-6} = \frac{1}{x^6}$.

3)- $(x^{-2})^{-3} = x^{-2*-3} = x^6$.

4 – قيمة المقدار : . $(x \times y)^n = x^n \times y^n$

مثال : اوجد قيمة ما يلي بأبسط صوره :

1)- $(5x)^2 = 5^2 \times x^2 = 25x^2$.

2)- $(16/15)^{-2} = \frac{16^{-2}}{15^{-2}} = \frac{15^2}{16^2} = \frac{225}{256}$.

← $(\frac{15}{16})^2 = \frac{15^2}{16^2} = \frac{225}{256}$ أو يمكن الحل بصوره أخرى .

5 – قيمة المقدار : $(x/y)^n = x^n/y^n$

و بالتالي مثال على الخاصية الخامسة :

1)- $(2/3)^{-3} = 2^{-3}/3^{-3} = 3^3/2^3 = 27/8$.

2)- $(2^3/x^2)^{-2} = (2^3)^2/(x^2)^2 = 2^{-6}/x^{-4} = x^4/2^6 = x^4/64$.

- الجذور :

تعريف : إذا كان كل من $x,y \in R$ فإن العدد x يسمى جذر n للعدد y إذا كان :

حيث n عدد صحيح , $x^n = y$

فمثلاً نقول بأن العدد 5 هو الجذر التربيعي للعدد 25

أما العدد 5 فهو الجذر التكعيبي (الثالث) للعدد 125

ونقول أن العدد 2 هو الجذر السادس للعدد 64 ⟵ 2×2×2×2×2×2 ⟶ 6 مرات

ونلاحظ في مفهوم الجذور على الأعداد الحقيقية الخواص التالية :

1- كل عدد موجب له جذران تربيعيان , احدهما موجب و الأخر سالب فمثلاً : $\sqrt{25} = \pm 5$.

اما إذا كان العدد سالب , فليس له جذر تربيعي . ليس له جذر حقيقي ⟵ $\sqrt{-25}$

2- في حالة الجذر التكعيبي , فإن للعدد الموجب وكذلك السالب جذر واحد فقط يشبه إشارة العدد تحت الجذر التكعيبي .

فمثلاً : $\sqrt[3]{27} = 3$ أما $\sqrt[3]{27} = -3$ ($-3 \times -3 \times -3 = -27$) لأن

تعريف : الأسس الكسرية : إذا كان $n \geq 2$, حيث n عدد صحيح , فإنه يمكن تعريف المقدار التالي :

$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ ⟵ الجذر النوني للمتغير(x) (n) ⟵ ألأس الكسرية

مثال : بسط كل من المقادير التالية بعد كتابتها على الصورة الجذرية :

1 – $(16)^{1/2} = \sqrt{16} = 2$ or -2 .

2 – $(27)^{-1/3} = \frac{1}{27^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = {}^{1}/_{3}$.

3 – $(27)^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$.

4 – $({}^{1}/_{25})^{1/2} = \sqrt{25} = {}^{1}/_{5}$ or ${}^{1}/_{-5}$.

5 - $(-64)^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{-64}} = {}^{1}/_{-4}$.

بعض من القواعد الخاصة بالأسس : إذا كان كل من $x,y \in R^{+}$, ويفرض إن $n,m \in Z$

فأن :

1)- $\sqrt[n]{x^{n}} = x^{n/n} = x$.

2)- $\sqrt[n]{x^{M}} = X^{m/n}$ ⟶ $(x^{m})^{1/n} = x^{m/n}$

3)- $\sqrt[n]{x\,y} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = X^{1/n} \times y^{1/n}$

4)- $\sqrt[n]{x/y} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \frac{x^{1/n}}{y^{1/n}} =$, $y \neq 0$.

مثال : اكتب كلاً من المقادير التالية على الصورة الجذرية بأبسط صورة :

1)- $\sqrt[5]{x\,5} = x^{5/5} = x$.

2)- $\sqrt[4]{x^{2}} = x^{2/4} = x^{1/2}$. $\sqrt{x}$.

3)- $\sqrt[3]{x\,6\,y\,6} = (x^{6})^{1/3} \times (y^{6})^{1/3}$.

$= x^{6/3} \times y^{6/3} = x^{2}\, y^{2}$.

4)- $\sqrt[3]{-8/27x^{3}} = \sqrt[3]{-8/27} \times \sqrt[3]{x^{3}} = {}^{-2}/_{3} \times X^{3/3} = {}^{-2}/_{3}\ X$.

تمرين : اوجد قيمة كل مما يلي بأبسط صورة :

1)- $(1/2)^{-3} \times (1/3)^{-2} = (2/1)^{3} \times (3/1)^{2} = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$.

2)- $\sqrt[3]{\frac{125}{y^3}} \times \sqrt[4]{\frac{16}{x\,4}} = (\frac{125}{y^3})^{1/3} \times (\frac{16}{x\,4})^{1/4}$.

$$= \frac{(125)^{1/3}}{(y^3)^{1/3}} \times \frac{(16)^{1/4}}{(x4)^{1/4}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{125}}{y} \times \frac{\sqrt[4]{16}}{x}$$

$$= 5/y \times 2/x = 10/xy$$

3)- $(x)^o + (9)^{1/2} - (8)^{-1/3} = 1 + \sqrt{9} - 1/\sqrt[3]{8}$

$= 1 \pm 3 - 1/2$

في حالة الموجب

في حالة السالب

$= 4 - 1/2 = 4/1 - 1/2 = 8/2 - 1/2 = 7/2$

$= -2/1 - 1/2 = -4/2 - 1/2 = -5/2$

مسائل وتمارين : (على مفهوم الأسس و الجذور) :

- اوجد قيمة كل مما يلي أبسط صورة :

1)- $\sqrt[3]{-81}$ =

2)- $x^{-5}/x^{-1/5}$ =

3)- $\sqrt[4]{x^8/16}$ =

4)- $\sqrt[9]{(x/y)^o}$ =

ملاحظة (جميع الملخصات مطابقة للمحتوى على لبلاك بورد)...

(أرجو التنبيه إذا كان هناك خطأ)

.. بالتوفيق والنجاح لكم جميعاً ..

... انا ...