حل الامتحان النهائي

المسألة الأولى:

A) $E \geq V_0$

1) $$\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)\psi(x) = 0$$

$$\psi_{in}(x) = A\, e^{+ik_1 x}$$

$$\psi_{ref}(x) = B\, e^{-ik_1 x}$$

$$\psi_{tr}(x) = C\, e^{+ik_2 x}$$

2) $$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad , \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)}$$

3) $$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow A + B = C$$

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) \Rightarrow ik_1 A - ik_1 B = ik_2 C$$

ومنه:

$$A + B = C \quad ---(1)$$

$$A - B = \frac{k_2}{k_1} C \quad ---(2)$$

بجمع وطرح العلاقتين نجد أن: $B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A \,,\; C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A$

4) $$\vec{J}_{in} = \frac{i\hbar}{2m}\left[\psi_{in}(x)\psi_{in}'^{*}(x) - \psi_{in}^{*}\psi_{in}'(x)\right]\vec{i} = +\frac{\hbar k_1}{m}|A|^2\,\vec{i}$$

$$\vec{J}_{ref} = \frac{i\hbar}{2m}\left[\psi_{ref}(x)\psi_{ref}'^{*}(x) - \psi_{ref}^{*}\psi_{ref}'(x)\right]\vec{i} = -\frac{\hbar k_1}{m}|B|^2\,\vec{i}$$

$$\vec{J}_{tr} = \frac{i\hbar}{2m}\left[\psi_{tr}(x)\psi_{tr}'^{*}(x) - \psi_{tr}^{*}(x)\psi_{tr}'(x)\right]\vec{i} = +\frac{\hbar k_2}{m}|C|^2\,\vec{i}$$

$$\Rightarrow R = \frac{|\vec{J}_{ref}|}{|\vec{J}_{in}|} = \frac{|B|^2}{|A|^2} \quad , \quad T = \frac{|\vec{J}_{tr}|}{|\vec{J}_{in}|} = \frac{k_2}{k_1}\frac{|C|^2}{|A|^2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} \quad , \quad T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

5) $$E = \frac{4}{3}V_0 \Rightarrow k_1 = \sqrt{\frac{8mV_0}{3\hbar^2}} \quad , \quad k_2 = \sqrt{\frac{2mV_0}{3\hbar^2}}$$

نلاحظ أن: $k_1 = 2k_2$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \left(\frac{k_2}{3k_2}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad , \quad T = \frac{8k_2^2}{(3k_2)^2} = \frac{8}{9}$$

B) $E \leqslant V_0$

حل معادلة Schrödinger في المنطقتين يعطى بـ :

$$\psi_1'(x) = A' e^{ik_1x} + B' e^{-ik_1x}$$

$$\psi_2''(x) = \underbrace{C e^{+k_2x}}_{\text{مرفوض لأنه متباعد}} + D e^{-k_2x} = D e^{-k_2x}$$

لنحسب $\vec{j}'_{in}$ و $\vec{j}'_{ref}$ و $\vec{j}'_{tr}$

نلاحظ أن :

$$\vec{j}'_{in} = \vec{J}_{in} = \frac{\hbar k_1}{m} |A'|^2 \vec{i}$$

$$\vec{j}'_{ref} = \vec{J}_{ref} = \frac{\hbar k_1}{m} |B'|^2 \vec{i}$$

لدينا

$$\vec{j}_{tr} = \frac{i\hbar}{2m}\underbrace{\left[-|D|^2 k_2 e^{-2k_2x} + |D|^2 k_2 e^{-2k_2x}\right]}_{0}\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{j}'_{tr} = \vec{0}$$

لأن e^{-k_2x} حقيقي

$$\Rightarrow R = \frac{|\vec{j}'_{ref}|}{|\vec{j}'_{in}|} = \frac{|B'|^2}{|A'|^2} = \frac{|k_1 + ik_2|^2}{|k_1 - ik_2|^2} = \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 1}$$

$$T = \frac{|\vec{j}'_{tr}|}{|\vec{j}'_{in}|} = 0 \Rightarrow \boxed{T = 0}$$

ع) $x > 0 \Rightarrow \rho(x) = |\psi'_{tr}(x)|^2 = |D|^2 e^{-2k_2x}$

نلاحظ أن $\rho(x) \neq 0 \Rightarrow$ وجود جسيمات في المنطقة الممنوعة كلاسيكيا $x > 0$.

المسألة الثانية

1) $\hat{a}\,\psi_0(x) = 0 \Rightarrow \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - im\omega \hat{x}\right)\psi_0(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\psi_0(x) + \frac{m\omega}{\hbar} x\, \psi_0(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\psi_0(x)}{\psi_0(x)} = -\frac{m\omega}{\hbar} x\, dx$$

بالمكاملة:

$$\psi_0(x) = A\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

الشرط العياري $\Leftarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = 1$$

$$\Rightarrow A^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx}_{\sqrt{\frac{\pi}{\frac{m\omega}{\hbar}}}} \Rightarrow A^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

2) $\hat{a}^+|0\rangle = \sqrt{0+1}\,|1\rangle \Rightarrow \langle x|\hat{a}^+|0\rangle = \langle x|1\rangle$

$$\Rightarrow \psi_1(x) = \hat{a}^+\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(\hat{p}_x + im\omega\hat{x}\right)\psi_0(x)$$

$$\Rightarrow \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(-i\hbar\frac{d}{dx} + im\omega x\right)\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(+i\hbar\frac{m\omega}{\hbar}x + im\omega x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$= i\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{2m\omega}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\, x\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\Rightarrow \psi_1(x) = i\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, x\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$a^+|1\rangle = \sqrt{1+1}\,|2\rangle \Rightarrow \langle x|\hat{a}^+|1\rangle = \sqrt{2}\langle x|2\rangle$$

$$\Rightarrow \psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}^+\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i\hbar\frac{d}{dx} + im\omega x\right)\frac{\psi_1(x)}{\sqrt{2\hbar\omega m}}$$

$$\Rightarrow \psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\hbar m\omega} \, i \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \left(-i\hbar \frac{d}{dx} + im\omega x\right) x \, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\Rightarrow \psi_2(x) = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\hbar m\omega} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \left[-i\hbar + i\hbar \frac{m\omega}{\hbar} x^2 + im\omega x^2\right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\Rightarrow \psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left[1 - 2\frac{m\omega}{\hbar} x^2\right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

التعامد :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^*(x)\, \psi_2(x)\, dx \underset{\text{ثابت}}{=} c \int_{-\infty}^{+\infty} x \left[1 - \frac{2m\omega}{\hbar} x^2\right] e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx$$

$$= c \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{2m\omega}{\hbar} x^3\right) e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx$$

تكامل دالة فردية معدوم صفرا .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(-x)\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx$$

$$\Rightarrow 2\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1 \psi_2\, dx = 0$$

المسألة الثالثة :

١) $|n\rangle$ تمثل متجه ذاتي لـ $\hat{H}$ قيمة ذاتية $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ و
$|n\rangle$ " " " لـ $\hat{B}$ " " $b_n = b(n+1)$ و

٢) بما أن القيمتين الذاتيتين E_n و b_n حقيقيتين $\Leftarrow$
$\hat{H}$ و $\hat{B}$ مؤثران هرميتيان

٣)
$$HB|n\rangle = b_n H|n\rangle = b_n E_n|n\rangle$$
$$BH|n\rangle = E_n B|n\rangle = E_n b_n|n\rangle$$
$$\Rightarrow \quad HB = BH \Rightarrow [H,B] = 0$$

٤) نلاحظ أن القيم الذاتية $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ و $E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega$ و $E_3 = \frac{7}{2}\hbar\omega$
متمايزة مثنى مثنى $\Leftarrow$ E_n غير منحلة (متوالدة)
بما أن القيم الذاتية لـ H غير متوالدة $\Leftarrow$ $\{H\}$ مجموعة كاملة

5)
$$|\psi'(0)\rangle = \frac{|\psi(0)\rangle}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}|\psi(0)\rangle$$
$$\Rightarrow |\psi'(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle - \frac{2}{\sqrt{6}}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|3\rangle$$

6)
$$\bar{E} = \langle\psi'(0)|H|\psi'(0)\rangle = \frac{1}{6}\left[\langle 1| - 2\langle 2| + \langle 3|\right] \times H\left[|1\rangle - 2|2\rangle + |3\rangle\right]$$
$$= \frac{1}{6}\left[\langle 1| - 2\langle 2| + \langle 3|\right]\left[E_1|1\rangle - 2E_2|2\rangle + E_3|3\rangle\right]$$
$$= \frac{1}{6}E_1\underbrace{\langle 1|1\rangle}_{1} + \frac{4}{6}E_2\underbrace{\langle 2|2\rangle}_{1} + \frac{1}{6}E_3\underbrace{\langle 3|3\rangle}_{1}$$
$$= \frac{1}{6}\frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{4}{6}\frac{5}{2}\hbar\omega + \frac{1}{6}\frac{7}{2}\hbar\omega = \frac{30}{12}\hbar\omega$$
$$\Rightarrow \quad \bar{E} = \frac{15}{6}\hbar\omega$$

7)
$$P_1 = |\langle 1|\psi'(0)\rangle|^2 = \frac{1}{6}$$
$$P_2 = |\langle 2|\psi'(0)\rangle|^2 = \frac{4}{6} \quad \Rightarrow \quad P_1 + P_2 + P_3 = 1 \quad (8$$
$$P_3 = |\langle 3|\psi'(0)\rangle|^2 = \frac{1}{6}$$

$$|\psi'(t)\rangle = \sum_{n=1} C_n(0)\, e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t} |E_n\rangle \qquad (9$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-\frac{iE_1}{\hbar}t} |1\rangle - \frac{2}{\sqrt{6}} e^{-\frac{iE_2}{\hbar}t} |2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-\frac{iE_3}{\hbar}t} |3\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-\frac{3i\omega}{2}t} |1\rangle - \frac{2}{\sqrt{6}} e^{-\frac{5i}{2}\omega t} |2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-\frac{7i\omega}{2}t} |3\rangle$$