المحاضرة الثامنة

النهايات

النهايات:

مفهوم النهاية:

نهاية الدالة يقصد بها إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة. وعادة تكتب النهايات على الصيغة $\lim_{x \to a} f(x)$ وتقرأ نهاية الدالة f(x) عندما تقترب x من القيمة a ($x \to a$)

مثال:

إذا كانت f(x)=2x+1 فان $\lim_{x \to 2} f(x)$ يعني إيجاد قيمة الدالة f(x) عندما قيمة x تؤول إلى ٢. وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي ٥.

تابع: النهايات:

جبر النهايات:

١. إذا كانت $f(x)=c$ ، حيث c عدد حقيقي فان $\lim_{x\to a} f(x)=c$ لكل عدد حقيقي a .

٢. إذا كانت $f(x)=mx+c$ فان $\lim_{x\to a} f(x)=ma+c$ لكل عدد حقيقي a .

تابع: النهايات:

مثال:

أوجد قيمة كل مما يأتي:

1. $\lim_{x \to 5} 27$

2. $\lim_{x \to -2} (1 - 2x)$

3. $\lim_{x \to 2} (3x + 4)$

4. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (8x - 5)$

تابع: النهايات:

الحل:

1. $\lim_{x \to 5} 27 = 27$

2. $\lim_{x \to -2} (1-2x) = 1-(2\times -2) = 1+4 = 5$

3. $\lim_{x \to 2} (3x+4) = 3\times 2+4 = 6+4 = 10$

4. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (8x-5) = 8\times \frac{1}{2} - 5 = 4-5 = -1$

تابع: النهايات:

٣. إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = l$ ، وكانت $\lim_{x\to a} g(x) = k$ وكانت c أي عدد حقيقي ، فان:

i. $\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = l \pm k$

ii. $\lim_{x\to a} cf(x) = c \times \lim_{x\to a} f(x) = c \times l$

iii. $\lim_{x\to a}\left[f(x) \times g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = l \times k$

iv. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{l}{k} \quad , k \neq 0$

تابع: النهايات:

مثال:

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$، $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$

فأوجد مما يلي:

i. $\lim_{x\to 2}\left[h(x) - f(x)\right]$

ii. $\lim_{x\to 2}\left[g(x)\times h(x)\right]$

iii. $\lim_{x\to 2} 8f(x)$

تابع: النهايات:

iv. $$\lim_{x \to 2} [f(x) + h(x) + g(x)]$$

v. $$\lim_{x \to 2} [f(x) - g(x) \times h(x)]$$

vi. $$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$$

vii. $$\lim_{x \to 2} \frac{h(x)}{f(x)}$$

تابع: النهايات:

الحل:

i. $$\lim_{x\to 2}[h(x)-f(x)]=\lim_{x\to 2}h(x)-\lim_{x\to 2}f(x)$$
$$=10.5-5=5.5$$

ii. $$\lim_{x\to 2}[g(x)\times h(x)]=\lim_{x\to 2}g(x)\times\lim_{x\to 2}h(x)$$
$$=-8\times 10.5=-84$$

ii. $$\lim_{x\to 2}8f(x)=8\lim_{x\to 2}f(x)=8\times 5=40$$

تابع: النهايات:

الحل:

iv. $$\lim_{x\to 2}[f(x)+h(x)+g(x)]=\lim_{x\to 2} f(x)+\lim_{x\to 2} h(x)+\lim_{x\to 2} g(x)$$
$$=5+10.5+(-8)$$
$$=15.5-8=7.5$$

v. $$\lim_{x\to 2}[f(x)-g(x)\times h(x)]=\lim_{x\to 2} f(x)-\lim_{x\to 2} g(x)\times\lim_{x\to 2} h(x)$$
$$=5-(-8\times 10.5)$$
$$=5+84=89$$

تابع: النهايات:

vi. $$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2} f(x)}{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}=\frac{5}{-8}=-\frac{5}{8}$$

vii. $$\lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2} h(x)}{\lim\limits_{x\to 2} f(x)}=\frac{10.5}{5}=2.1$$

تابع: النهايات:

نظرية:

إذا كانت النهاية $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة و n عددا صحيحاً موجباً فان

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

مثال:

$$\lim_{x\to 1}[3x-1]^6 = \left[\lim_{x\to 1} 3x-1\right]^6 = [3\times 1-1]^6 = [3-1]^6 = 2^6 = 64$$

تابع: النهايات:

أمثلة:

أوجد نهاية كل من الدوال التالية:

1. $$\lim_{x\to 2}(3x^3+5x^2-7)=3\times 2^3+5\times 2^2-7$$
$$=3\times 8+5\times 4-7$$
$$=24+20-7=37$$

2. $$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2+7}{x-5}=\frac{3\times 3^2+7}{3-5}=\frac{3\times 9+7}{-2}=\frac{27+7}{-2}=\frac{34}{-2}=-17$$

تابع: النهايات:

3. $$\lim_{x \to 2} \frac{2x-1}{5x+3} = \frac{2\times 2-1}{5\times 2+3} = \frac{4-1}{10+3} = \frac{3}{13}$$

4. $$\lim_{x \to 2} e^{x} = e^{2}$$

5. $$\lim_{x \to 1} e^{x^2+2x+1} = e^{1^2+2\times 1+1} = e^{1+2+1} = e^{4}$$

6. $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(-1)^2-1}{-1+1} = \frac{1-1}{-1+1} = \frac{0}{0}$$ كمية غير معينة

تابع: النهايات:

7. $$\lim_{x\to 2}\left((\log(3x^2+5)\right) = \log(3\times 2^2+5)$$
$$= \log(3\times 4+5)$$
$$= \log(12+5)$$
$$= \log 17$$

8. $$\lim_{x\to 3}\left(\ln(2x-5)\right) = \ln(2\times 3-5) = \ln(6-5) = \ln 1 = 0$$

9. $$\lim_{x\to 1}(3x^3+4x-2)^3 = (3\times 1^3+4\times 1-2)^3 = (3+4-2)^3 = 5^3 = 125$$

10. $$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^2+5} = \sqrt[3]{2^2+5} = \sqrt[3]{4+5} = \sqrt[3]{9}$$

تابع: النهايات:

٣. إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل:

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , x<1\\ 7x-2 & , x>1\end{cases}$$

وأردنا إيجاد $f(x)$ $\lim_{x\to a}$ فقد تنشأ إحدى ثلاث حالات:

i. تقع a ضمن مجال القاعدة الأولى

تابع: النهايات:

i. تقع a ضمن مجال القاعدة الثانية

ii. تقع a على الحد الفاصل بين المجالين

مثال: إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+5 & , x<1 \\ 7x-2 & , x>1 \end{cases}$$

فأوجد

$$i.\ \lim_{x\to 3} f(x) \quad , \quad ii.\ \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) \quad , \quad iii.\ \lim_{x\to 1} f(x)$$

تابع: النهايات:

الحل:

i. تقع ٣ ضمن مجال القاعدة الثانية لان $3 > 1$

$$\therefore \lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} 7x - 2 = 7\times 3 - 2 = 21 - 2 = 19$$

ii. تقع $\frac{1}{2}$ ضمن مجال القاعدة الثانية لان $\frac{1}{2} < 1$

$$\therefore \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{2}} 3x^2 + 5 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 = \frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{23}{4}$$

تابع: النهايات:

iii. تقع ١ على الحد الفاصل بين مجال القاعدتين لذا نحسب النهاية من اليمين(أي $\lim_{x\to 1^+} f(x)$) والنهاية من اليسار(أي $\lim_{x\to 1^-} f(x)$)

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} 7x - 2 = 7\times 1 - 2 = 7 - 2 = 5$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 3x^2 + 5 = 3\times 1^2 + 5 = 3 + 5 = 8$$

$$\because \lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)$$ غير موجودة

تمارين

أ- إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ ، $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$

فأوجد مما يلي:

i. $\lim_{x\to 2}[5f(x) - 4h(x)]$

ii. $\lim_{x\to 2}\left[-\frac{1}{2}g(x) \times h(x)\right]$

iii. $\lim_{x\to 2}[f(x) + 2h(x) + 3g(x) - 2]$

تابع: تمارين:

iv. $\lim_{x\to 2}\left[8f(x)-g(x)\times h(x)\right]$

v. $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{f(x)}$

vi. $\lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{2f(x)}$

تابع: تمارين:

ب- أوجد النهايات التالية إذا وجدت:

1. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 2x + 1)$

2. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

3. $\lim_{x \to -2} \dfrac{2x - 3}{x + 4}$

4. $\lim_{x \to 0} e^x$

تابع: تمارين:

5. $\lim_{x\to 6} \sqrt[4]{x^2-3x-8}$

6. $\lim_{x\to 3} \left(\log(2x+4)\right)$

7. $\lim_{x\to 2} \left(\ln(x^2+1)\right)$

8. $\lim_{x\to -1} (2x^2+5x+1)^2$

9. $\lim_{x\to 1} \sqrt{x}$

تمت
بحمد الله