المحاضرة السادسة

الدوال الاسية واللوغاريتمية والمثلثية

الدالة الاسية:

أي دالة من النوع $y = a^x$ تسمى دالة أسية .

حيث a عدد حقيقي موجب. يسمى a: الأساس ، x: الأس.

حيث أن مجالها الأعداد الحقيقية ومجالها المقابل الأعداد الحقيقية الموجبة.

أي

$$f : R \to R^+$$

أمثلة:

$$f(x) = 2^x , f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x , f(x) = e^x , f(x) = 10^x$$

الدالة اللوغاريتمية:

إذا كان $a > 0$ ، $a \neq 1$ فان الدالة الاسية $y = a^x$ لها معكوس يرمز لها بالرمز $x = \log_a y$ تسمى الدالة اللوغاريتمية ، حيث $\log_a y$ وتقرأ لوغاريتم y للأساس a .

حيث أن مجالها الأعداد الحقيقية الموجبة ومجالها المقابل الأعداد الحقيقية.

أي $f : R^+ \longrightarrow R$

أمثلة:

$$f(x) = \log_2 x, \; f(x) = \log_4 (2x + 4)$$

تابع: الدالة اللوغاريتمية:

اللوغاريتمات الطبيعية واللوغاريتمات الاعتيادية:

يعتبر العددان ١٠ ،e (عدد غير نسبي يساوي تقريباً 2.71828) من أكثر الأعداد استعمالاً كأساس للوغاريتمات. واللوغاريتمات للأساسe تسمى اللوغاريتمات الطبيعية ويرمز لها $\ln x$. تسمى اللوغاريتمات للأساس ١٠ باللوغاريتمات الاعتيادية ويرمز لها بالرمز $\log x$ بدلا عن $\log_{10} x$.

تابع: الدالة اللوغاريتمية:

قوانين اللوغاريتمات:

إذا كان كل من x ، y ، b عدداً حقيقياً موجباً ، b≠1 ، وكان n عدداً حقيقياً فان:

1. $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

2. $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

3. $\log_b x^n = n \log_b x$

4. $\log_b 1 = 0$

5. $\log_b b = 1$

الدوال المثلثية:

هناك دالتان أساسيتان هما:

$$(i) \quad y = \sin x$$

$$(ii) \quad y = \cos x$$

وهناك دوال تعرف بواسطة هاتين الدالتين مثل:

تابع الدوال المثلثية:

$$(iii)\ y = \tan x \qquad \left(\frac{\sin x}{\cos x} \quad , \cos x \neq 0 \right)$$

$$(iv)\ y = \sec x \qquad \left(\frac{1}{\cos x} \quad , \cos x \neq 0 \right)$$

$$(v)\ y = \csc x \qquad \left(\frac{1}{\sin x} \quad , \sin x \neq 0 \right)$$

$$(vi)\ y = \cot x \qquad \left(\frac{\cos x}{\sin x} \quad , \sin x \neq 0 \right)$$

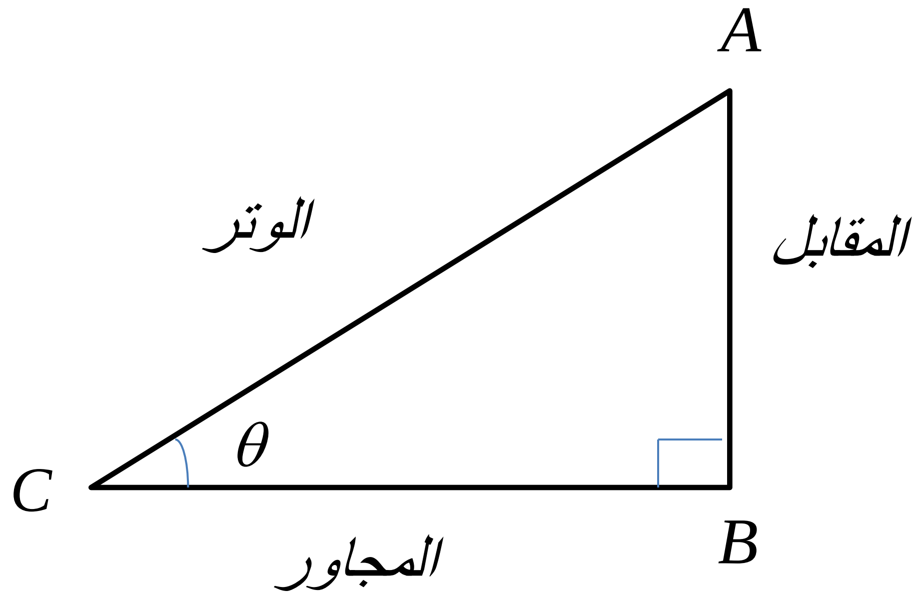
ملاحظة:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

تابع : الدوال المثلثية:

التفسير الهندسي للدوال المثلثية:

إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في B كما في الشكل التالي:



تابع : الدوال المثلثية:

فان النسب المثلثية لزاوية حادة θ وهي:

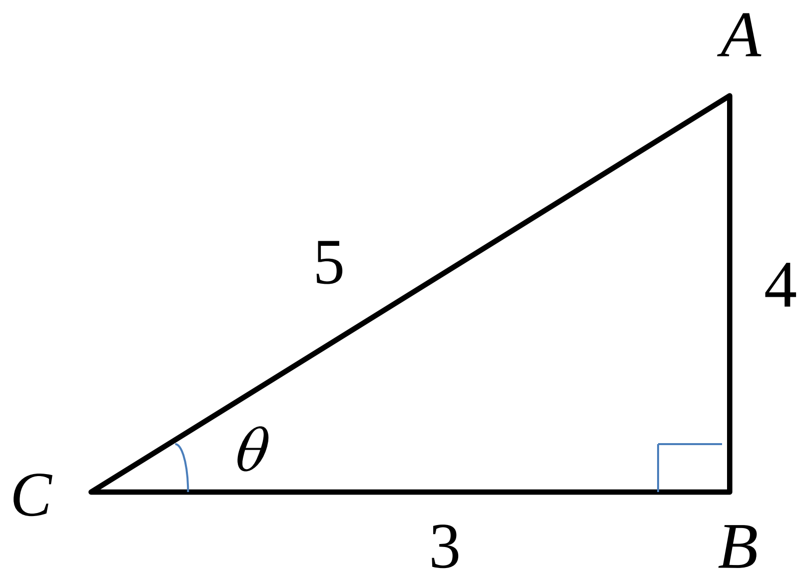
$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \ ، \ \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \ ، \ \tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

مثال:

إذا كان $\cot\theta = \frac{3}{4}$ ، فأوجد النسب الأساسية: $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$

تابع : الدوال المثلثية:

الحل:



$$\tan\theta = \frac{4}{3} \text{ ، } \cos\theta = \frac{3}{5} \text{ ، } \sin\theta = \frac{4}{5}$$

الدوال النسبية:

إذا كان $h(x)$ ، $g(x)$ كثيري حدود فان $f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ تسمى دالة نسبية بشرط $g(x)\neq 0$ ومجالها هو كافة الأعداد الحقيقية باستثناء أصفار المقام.

أمثلة:

1. $f(x)=\frac{x+7}{x+5}$

2. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

3. $f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$

الدوال الصريحة والدوال الضمنية:

الدالة الصريحة:

هي الدالة التي يمكن كتابتها في الصورة y=f(x) ، أي المتغير التابع y في طرف والمتغير المستقل x في الطرف الآخر.

أمثلة:

1. $y = 2x + 3$
2. $y = x$
3. $y = x^2 + 2x - 3$

الدوال الصريحة والدوال الضمنية:

الدالة الضمنية:

هي التي يمكن كتابتها في الصورة f(x,y)=k، حيث k قيمة ثابتة.

أمثلة:

1. $x^2 + y^2 = 25$
2. $x^2 + y^2 + xy + 2x - 4y + 5 = 0$
3. $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 49$

الدوال الزوجية والدوال الفردية:

الدالة الزوجية:

تعتبر الدالة $y=f(x)$ دالة زوجية إذا كانت $f(-x)= f(x)$

مثال:

هل الدالة $f(x)=x^2$ دالة زوجية ؟

الحل:

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= (-x)^2 \\
&= (-x)(-x) \\
&= x^2 \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

اذاً الدالة زوجية

تابع : الدوال الزوجية والفردية:

مثال:

هل الدالة $f(x)=x^2+x$ دالة زوجية ؟

الحل:

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= (-x)^2+(-x) \\
&=(-x)(-x)+(-x) \\
&= x^2-x \\
&\neq f(x)
\end{aligned}
$$

اذاً ليست زوجية.

تابع : الدوال الزوجية والفردية:

الدالة الفردية:

تعتبر الدالة y=f(x) دالة فردية إذا كانت f(-x)= -f(x)

مثال:

هل الدالة $f(x) = x^3$ دالة فردية ؟

الحل:

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= (-x)^3 \\
&= (-x)(-x)(-x) \\
&= -x^3 \\
&= -f(x)
\end{aligned}
$$

اذاً الدالة فردية.

تابع : الدوال الزوجية والفردية:

مثال:

هل الدالة $f(x) = x^3 + x$ دالة فردية ؟

الحل:

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= (-x)^3 + (-x) \\
&= (-x)(-x)(-x) + (-x) \\
&= -x^3 - x \\
&= -f(x)
\end{aligned}
$$

اذاً الدالة فردية

Q_d

تطبيقات اقتصادية:

١- دوال الطلب الخطية:

هناك علاقة عكسية بين كمية الطلب على سلعة معينة وسعرها بمعنى أنه كلما زاد سعر السلعة كلما قل الطلب عليها. ونرمز لكمية الطلب على السلعة بالرمز Q_D بينما نرمز لسعر السلعة بالرمز P

تابع : تطبيقات اقتصادية:

مثال:

إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة $Q_D = 25 - 5P$

فأوجد

١. الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما $P = 3$.

٢. سعر الوحدة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_D = 18$

٣. الكمية المطلوبة من هذه السلعة إذا كانت بدون مقابل. أي $P = 0$

٤. أعلى سعر يمكن أن يدفعه أي شخص لهذه السلعة .

تابع : تطبيقات اقتصادية:

الحل:

١. عندما $P = 3$

$$
\begin{aligned}
Q_D &= 25 - 5P \\
&= 25 - 5 \times 3 \\
&= 25 - 15 \\
&= 10
\end{aligned}
$$

٢. عندما $Q_D = 18$.

$$
\begin{aligned}
Q_D &= 25 - 5P \\
18 &= 25 - 5 \times P \\
5P &= 25 - 18 = 7 \\
\therefore P &= \frac{7}{5} = 1.4
\end{aligned}
$$

تابع : تطبيقات اقتصادية:

٣. عندما $P=0$

$$\begin{aligned} Q_D &= 25-5P \\ &= 25-5\times 0 \\ &= 25 \end{aligned}$$

٤. أعلى سعر يحدث عندما $Q_D=0$

$$\begin{aligned} Q_D &= 25-5P \\ 0 &= 25-5\times P \\ 5P &= 25 \\ \therefore P &= 5 \end{aligned}$$

تابع:تطبيقات اقتصادية:

٢- دالة العرض (الإنتاج) الخطية:

هناك علاقة طردية بين كمية الإنتاج من سلعة معينة وسعرها بمعنى أنه كلما زاد سعر السلعة كلما زادت كمية الإنتاج. ونرمز لكمية العرض (الإنتاج) من سلعة ما بالرمز Q_S بينما نرمز لسعر السلعة بالرمز P

تابع: تطبيقات اقتصادية:

مثال:

إذا كانت $Q_S = 3P - 2$ فأوجد:

١. Q_S إذا كانت $P = 5$

٢. P إذا كانت $Q_S = 10$

٣. اقل سعر يمكن أن تباع به وحدة السلعة لتفي حاجة الإنتاج(أي لكي يمكن الإنتاج).

تابع: تطبيقات اقتصادية:

الحل:

١. عندما $P = 5$

$$Q_S = 3P - 2$$
$$= 3 \times 5 - 2$$
$$= 15 - 2$$
$$= 13$$

٢. عندما $Q_S = 10$

$$Q_S = 3P - 2$$
$$10 = 3P - 2$$
$$-3P = -2 - 10 = -12$$
$$\therefore P = 4$$

تابع : الحل:

٣. أقل سعر يمكن أن تباع به وحدة السلعة لتفي حاجة الإنتاج(أي لكي يمكن الإنتاج). أي عندما $Q_S = 0$

$$Q_S = 3P - 2$$

$$0 = 3P - 2$$

$$-3P = -2 - 0 = -2$$

$$\therefore P = \frac{2}{3}$$

تطبيقات اقتصادية:

٣- التوازن في السوق بين دالتي العرض والطلب الخطيتين:

يحدث التوازن في السوق إذا كانت الكمية المعروضة من سلعة ما مساوياً للكمية المطلوبة منها. وهذه الحقيقة تعين سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن.

مثال:

إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي $Q_D = 2 - P$.

وان دالة العرض لنفس السلعة هي $Q_S = P - 1$

أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن

تابع الحل :

الحل: يحدث التوازن عندما تتساوي الكميتان المطلوبة والمعروضة .

$$Q_S = Q_D$$

$$P - 1 = 2 - P$$

$$P + P = 2 + 1$$

$$2P = 3$$

$$\therefore P = \frac{3}{2}$$

تابع: الحل:

نعوض سعر التوازن في إحدى الدالتين، ولتكن دالة العرض

$$\therefore Q_S = \frac{3}{2} - 1 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

تمارين:

١. هل الدالة $f(x)=3x^2-4x$ دالة زوجية؟
٢. هل الدالة $f(x)=3x^3-4x$ دالة فردية ؟
٣. هل الدالة $f(x)=2x^2+x$ دالة فردية ؟
٤. هل الدالة $f(x)=x^3-4$ دالة زوجية ؟
٥. هل الدالة $f(x)=x^3-x$ زوجية أم فردية أم غير ذلك؟

تمارين:

٦. إذا كان $\sec\theta = 2$ ، فأوجد النسب الأساسية $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$

٧. إذا دالة الطلب على سلعة معينة: $Q_D = 100 - 5P$ فأوجد

أ) الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما $P = 19$.

ب) سعر وحدة السلعة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_D = 50$.

جـ) الكمية المطلوبة من هذه السلعة إذا كانت بدون مقابل، أي $P = 0$.

د) أعلى سعر يمكن أن يدفعه أي شخص لهذه السلعة.

تمارين:

٨. إذا دالة العرض على سلعة معينة: $Q_S = 4P - 5$ فأوجد

أ) Q_S إذا كانت $P = 5$.

ب) P إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_S = 7$.

جـ) أقل سعر يمكن أن تباع به وحدة السلعة لتفي حاجة الإنتاج(أي لكي يمكن الإنتاج)

تمارين:

٩. إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي $Q_D = 25 - \frac{1}{2}P$.

وان دالة العرض لنفس السلعة هي $Q_S = 2P - 50$

أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن

١٠. إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي $Q_D = 3P - 4$.

وان دالة العرض لنفس السلعة هي $Q_S = 36 - 2P$.

أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن

تمت
بحمد الله