المحاضرة الثالثة

الدوال

الدالة:

يعتبر مفهوم الدالة واحدا من أهم المفاهيم في الرياضيات. وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على)أو (تتوقف على)أو(تتعين بواسطة) كمية أخرى.

فمثلاً:

- حجم الكرة يعتمد على نصف قطرها.
- متوسط إنتاج الفدان من المحاصيل يعتمد على كمية السماد المستخدمة.
- الاستهلاك الشهري لأسرة ما يعتمد على دخلها الشهري.

تابع : الدالة:

تعريف مجرد لمفهوم الدالة:

إذا كانت A ، B مجموعتين فان f دالة من A إلى B ، أي $f:A \longrightarrow B$ إذا كانت f مجموعة جزئية من $A\times B$ بحيث انه لكل $x\in A$ توجد y واحدة في B بحيث $(x,y)\in f$. يسمى y قيمة الدالة f عند x ويكتب ذلك رمزا على النحو $y=f(x)$. ويسمى y بالمتغير التابع و x بالمتغير المستقل.

ملاحظة:

إذا كانت f دالة من A إلى B. فان A تسمى مجال الدالة . وتسمى B المجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى.

تابع : الدالة:

مثال: إذا كانت $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ وكانت

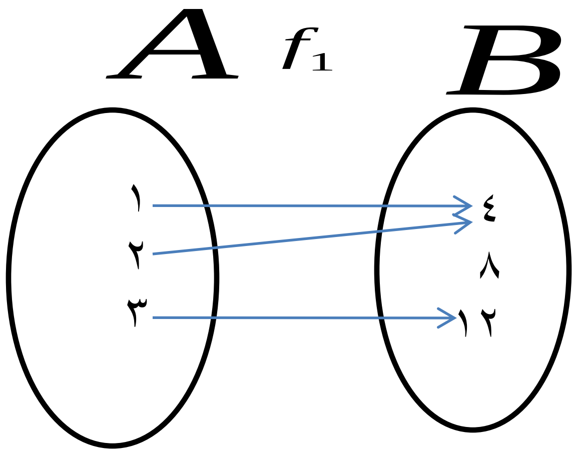
$f_1 = \{(1,4),(2,4),(3,12)\}$ و $f_2 = \{(1,4),(2,8)\}$ و

$$f_3 = \{(1,4),(1,8),(2,4),(3,12)\}$$

فهل f_1 ، f_2 و f_3 دوال من A إلى B ؟

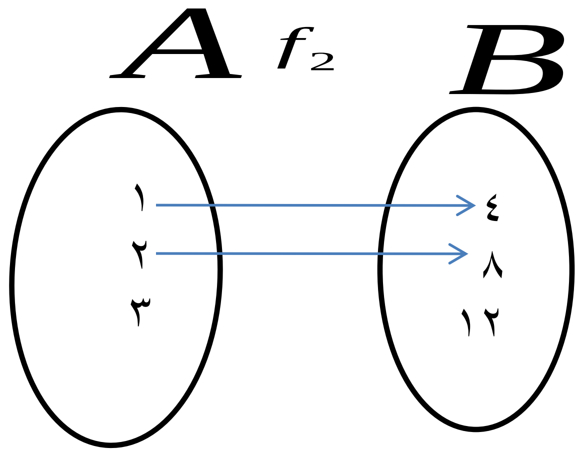
تابع : الدالة:

الحل:



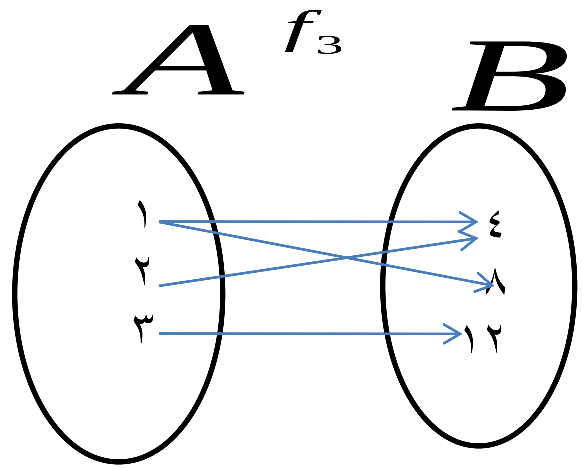
نعم f_1 دالة لان كل عنصر في المجال له صورة واحدة فقط في المجال المقابل.

تابع : الحل:



f_2 ليست دالة لان $3 \in A$ وليس له صورة B .

تابع : الحل:



f_3 ليست دالة لان $1 \in A$ وله صورتان

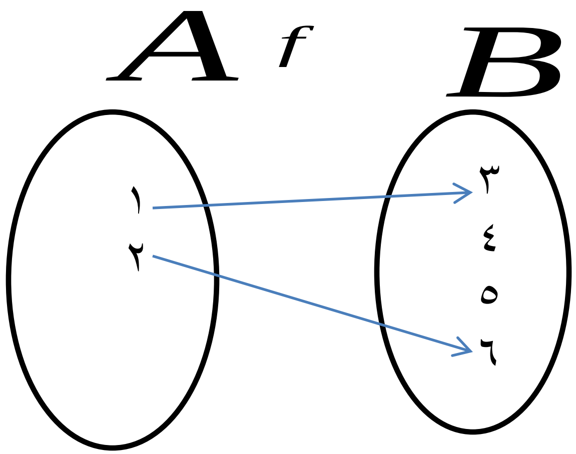
تابع الدالة:

مثال:

إذا كان $A=\{1,2\}$ ، $B=\{3,4,5,6\}$ ، $f=\{(1,3),(2,6)\}$

مثل f بالمخطط السهمي ثم أوجد مداها

الحل:



مدى f هو $\{3,6\}$

تمرين:

- أي من العلاقات التالية تمثل دالة

1. $R= \{(-1,2), (2,2), (3,5), (6,1) \}$
2. $R =\{(0,7), (1,5), (1,2), (3,-4) \}$
3. $R=\{(-3,1), (-1,1), (0, 1), (4,1)\}$
4. $R=\{(-4,0), (-4,4), (2,3), (1,9)\}$
5. $R=\{(3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$
6. $R=\{(1,1), (2,2), (4,4), (9,9)\}$

إيجاد قيمة الدالة:

مثال:

إذا كان $f(x)=x^2+4x-3$ ، فأوجد

$$(i)\ \ f(2)$$

$$(ii)\ \ f(-1)$$

$$(iii)\ \ f(a)$$

$$(iv)\ \ f(x+1)$$

تابع الدالة:

الحل:

$$(i)\ \ f(2)=2^2+4\times 2-3=4+8-3=9$$

$$(ii)\ \ f(-1)=(-1)^2+(4\times -1)-3=1-4-3=-6$$

$$(iii)\ \ f(a)=a^2+4\times a-3=a^2+4a-3$$

$$(iv)\ \ f(x+1)=(x+1)^2+4(x+1)-3$$

$$=x^2+2x+1+4x+4-3=x^2+6x+2$$

تابع: إيجاد قيمة الدالة:

مثال:

إذا كان $f(x)=3x^2 -7x+2$ ، فأوجد

$$(i)\ \ f(a)$$

$$(ii)\ \ f(-3)$$

$$(iii)\ \ f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$(iv)\ \ f\left(\frac{-2}{3}\right)$$

تابع إيجاد قيمة الدالة:

الحل:

$$(i)\ \ f(a) = 3a^2 - 7a + 2$$

$$(ii)\ \ f(-3) = 3(-3)^2 - 7(-3) + 2$$
$$= 27 + 21 + 2 = 50$$

$$(iii)\ \ f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right) + 2$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{7}{2} + 2 = \frac{-3}{4}$$

$$(iv)\ \ f\left(\frac{-2}{3}\right) = 3\left(\frac{-2}{3}\right)^2 - 7\left(\frac{-2}{3}\right) + 2$$
$$= \frac{4}{3} + \frac{14}{3} + 2 = 8$$

تمرين:

١. إذا كان $f(x)=2x^2-3x$ ، فأوجد

$$(i)\ f(0)$$

$$(ii)\ f(-4)$$

$$(iii)\ f(1+h)$$

$$(iv)\ f(x+h)$$

تابع : تمارين:

٢ . للدالة $f(x)=2x^2-x-5$ أحسب $f(t)$ و $f(-1)$

٣. للدالة $g(x)=\frac{x-1}{2x+3}$ أحسب $g(x-1)$ و $g(4)$

٤. للدالة $f(x)=2x^2-1$ أحسب $f(1)+f(2)+f(3)$

٥. للدالة $f(x)=x^2$ أحسب $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

٦. للدالة $g(x)=x+1$ أحسب $2[g(2)]^2-g(2)+5$

٧. للدالة $f(t)=\frac{2t-1}{t+3}, t\neq -3$ أحسب $\frac{5}{f(4)}$

تابع الدالة:

ملاحظة:

سنقتصر في دراستنا للدوال على دراسة بعض أنواع الدوال الحقيقية .

الدوال الحقيقية:

الدالة الحقيقية هي الدالة المعرفة من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية . أي $f:R \longrightarrow R$

- دالة كثيرة الحدود:

هي الدالة التي على الصورة $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a$

حيث $a_n, a_{n-1}, \cdots, a$ أعداد حقيقية وتسمى معاملات كثيرة الحدود، n عدد طبيعي. تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لــ (x)

الدوال الحقيقية:

مثال: ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية:

$$(1)\ f(x)=3$$

$$(2)\ f(x)=3x-4$$

$$(3)\ f(x)=x^2-x+1$$

$$(4)\ f(x)=2-3x+x^3$$

$$(5)\ f(x)=x^3+x^5+5x-6$$

تابع: الدوال الحقيقية:

الحل:

١. الدرجة الصفرية ويسمى أيضا دالة ثابتة.
٢. الدرجة الأولى ويسمى أيضا دالة خطية.
٣. الدرجة الثانية ويسمى أيضا دالة تربيعية.
٤. الدرجة الثالثة أو دالة تكعيبية.
٥. الدرجة الخامسة

العمليات على الدوال:

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة معطيات. وتشمل هذه العمليات، العمليات الثنائية من جمع وطرح وضرب وقسمة وتركيب وعملية أحادية واحدة هي المعكوس.

لتكن f ،g دالتين فان:

$$(i)\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(ii)\ (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(iii)\ (f\times g)(x) = f(x)\times g(x)$$

تابع: العمليات على الدوال:

$$(iv)\ \frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, \qquad g(x)\neq 0$$

$$(v)\,(fog)(x)=f(g(x))$$

(vi) معكوس الدالة:

إذا كانت $y=f(x)$ دالة فان معكوسها يعني إيجاد x كدالة في y أي $x=f^{-1}(y)$، حيث **f^{-1}** يرمز لمعكوس الدالة f .

تابع: العمليات على الدوال:

مثال: إذا كانت $f(x)=3x+5$ ، $g(x)=x^2+1$ ، فأوجد

$$(i)\ (f+g)(x)$$

$$(ii)\ (f-g)(x)$$

$$(iii)\ (f\times g)(x)$$

$$(iv)\ \frac{f}{g}(x)$$

$$(v)\ (f\circ g)(x)$$

$$(vi)\ f^{-1}$$

تابع: العمليات على الدوال:

الحل:

$$(i)(f+g)(x)=f(x)+g(x)=3x+5+x^2+1$$
$$=x^2+3x+6$$

$$(i)(f-g)(x)=f(x)-g(x)=3x+5-(x^2+1)$$
$$=3x+5-x^2-1=3x-x^2+4$$

$$(iii)(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=(3x+5)(x^2+1)$$
$$=3x^3+3x+5x^2+5$$
$$=3x^3+5x^2+3x+5$$

تابع: العمليات على الدوال:

الحل:

$$(iv)\ \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$$

$$(v)\ (f o g)(x) = f\left(g(x)\right) = f(x^2+1) = 3(x^2+1)+5$$
$$= 3x^2+3+5$$
$$= 3x^2+8$$

$$(vi)\ f^{-1}(y) = \frac{y-5}{3}$$

تابع : العمليات على الدوال:

تمرين ١ : افرض أن $f(x) = 1/(x-2)$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ، احسب

$(i)\ (f o g)(9)$

$(ii)\ (f o g)(x)$

$(iii)\ (g o f)(6)$

$(iv)\ (g o f)(x)$

حلول تمرين ١:

$$(i)(f \circ g)(9) = f\left(g(9)\right) = f(3) = \frac{1}{3-2} = 1$$

$$(i)(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = \frac{1}{g(x)-2} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

$$(iii)(g \circ f)(6) = g\left(f(6)\right) = g\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$(iii)(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\frac{1}{x-2}}$$

تمرين ٢ :

افرض أن $f(x)=1/(x-1)$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ ، فأوجد

$(i)\ (f+g)(x)$

$(ii)\ (f-g)(x)$

$(iii)\ (f\times g)(x)$

$(iv)\ \dfrac{f}{g}(x)$

$(v)\ (f\circ g)(x)$

$(vi)\ (g\circ f)(x)$

تمت

بحمد الله